量子力学习题集

D.特哈尔选编
王正清 刘弘度译

人民教育出版社

量子力学习题集

D. 特哈尔选编
王正清　刘弘度译

人民教育

本书系根据D.ter Haar编译的"Problems in Quantum Mechanics"(Infosearch Limited, London, 1960)一书译出，而该书则取材于苏联的两本同类书籍(详见本书"英译本编译者序")。中译本曾根据俄文原书改正了英译本中的一些错漏和不确切的地方，并发现俄文原书有几处错误，也加以改正；为了方便读者，还将原书中的某些数学符号统一为我国惯用的符号。

本书包括非相对论量子力学方面的不同难度的三百多道习题，其中大部分给出了解答。

量子力学习题集

〔英〕D·特哈尔选编

王正清　刘弘度 译

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

济南印刷厂印装

*

开本850×1168　1/32　印张13.625　插页　字数313,000

1965年1月第1版　1981年11月第2次印刷

印数5,001—20,500

书号13012·574　定价 1.20 元

英譯本編譯者序

本习題集包括 И. И. 戈利德曼(Гольдман)和 В. Д. 克里符欽科夫(Кривченков)的习題集的全部习題，以及从 В. И. 科甘 (Коган)和 В. М. 加利茨基(Галицкий)的习題集选出的部分习題。后者被安插在戈利德曼和克里符欽科夫的习題集的相应章节中，幷加 * 号以資区别。

虽然这些习題在苏联是同 Л. Д. 朗道 (Ландау) 和 Е. М. 栗弗席兹(Лифшиц)合著的"量子力学"配合使用的，但同样也可以同任何其他量子力学教科书，諸如西弗 (Schiff) 或克拉末斯 (Kramers)著的量子力学配合使用。本书还可以供已从包令(Pauling)和威尔孙(Wilson)的教科书中熟悉了量子力学基本概念的学生作进一步的讀物。(以下略)

D. 特哈尔

俄文本著者序

本习题集包括非相对論量子力学方面的不同难度的习题，是供国立莫斯科大学四年級学生在課堂討論中解答或留給学生作为练习用的。要求較多計算的題目，主要是打算給专門学习理論物理学的学生用的，他們学习量子力学是以朗道和栗弗席茲合編的“量子力学”为主要教科书。

教学經驗表明，学习量子力学时遇到的最大困难，是在量子力学的矩陣方面。因此在編纂这本习題集时，对如何构成微扰矩陣并使它对角化的問題，給予更多的注意。在本习題集中，角动量和自旋部分也占有較大篇幅，因为对这些基本概念不清楚，就談不上认眞地学习过量子力学。

И. И. 戈利德曼

В. Д. 克里符欽科夫

目　录

英譯本編譯者序……v

俄文本著者序……vi

习題……1

§1. 一維运动；能譜和波函数……1
§2. 隧道效应……5
§3. 对易关系；海森伯关系；波包的扩散；算符……9
§4. 角动量；自旋……17
§5. 有心力場……25
§6. 粒子在磁場中的运动……28
§7. 原子……31
§8. 分子……42
§9. 散射……47

解答……55

§1. 一維运动；能譜和波函数……55
§2. 隧道效应……97
§3. 对易关系；海森伯关系；波包的扩散；算符……126
§4. 角动量；自旋……195
§5. 有心力場……214
§6. 粒子在磁場中的运动……233
§7. 原子……247
§8. 分子……334
§9. 散射……364

附录 I……419

附录 II……422

索引……426

习　　题①

§1. 一維运动；能譜和波函数

1. 設粒子的势能为：

$$当\ x<0\ 及\ x>a\ 时，V=\infty;$$

$$当\ 0<x<a\ 时，V=0.$$

試求在这"势阱"② 中粒子的能級和归一化波函数。

2. 試证明对于在"势阱"中的粒子（見上题），下列关系式成立：

$$\bar{x}=\frac{1}{2}a,\quad \overline{(x-\bar{x})^2}=\frac{a^2}{12}\left(1-\frac{6}{n^2\pi^2}\right).$$

并证明当 n 大时，上面的結果与相应的經典的結果一致。

3. 当粒子在"势阱"中处于第 n 个能态时，試求出其动量几率分布函数。

4. 試求在不对称的势阱中（見图 1）粒子的能級和波函数，并考虑 $V_1=V_2$ 这一情况。

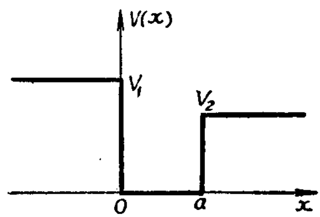

图　1

5. 振子的哈密頓量为 $\hat{H}=\dfrac{\hat{p}^2}{2\mu}+\dfrac{\mu\omega^2\hat{x}^2}{2}$，其中 $\hat{p}$ 和 $\hat{x}$ 滿足对易关系 $\hat{p}\hat{x}-\hat{x}\hat{p}=-i\hbar$。为了在下面的計算中避免写 $\hbar$、μ 和 ω，我們引进新的变量 $\hat{P}$ 和 $\hat{Q}$③：

---

① 打星号的习题选自 B. И. 科甘和 B. M. 加利茨基的量子力学习题集（Сборник задач по квантовой механике, Москва, 1956）。

② 所謂"势阱"（加了引号的）专指题中所說的无限深矩形势阱——譯者注。

③ 所有的算符都标以尖角号∧。

$$\hat{P}=\frac{1}{\sqrt{\mu\hbar\omega}}\hat{p},\quad \hat{Q}=\sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}}\hat{x}\quad (\hat{P}\hat{Q}-\hat{Q}\hat{P}=-i),$$

并且将能量E用$\hbar\omega$单位表出($E=\varepsilon\hbar\omega$)。用新的变量表示时，振子的薛定諤方程将是

$$\hat{H}'\psi=\frac{1}{2}(\hat{P}^2+\hat{Q}^2)\psi=\varepsilon\psi.$$

a) 利用对易关系$\hat{P}\hat{Q}-\hat{Q}\hat{P}=-i$, 证明

$$\frac{1}{2}(\hat{P}^2+\hat{Q}^2)(\hat{Q}\pm i\hat{P})^n\psi=(\varepsilon\mp n)(\hat{Q}\pm i\hat{P})^n\psi.$$

b) 求出振子的能級和归一化波函数。

c) 确定算符 $\hat{a}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{Q}+i\hat{P})$ 和它的厄密共軛算符 $\hat{a}^+=\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{Q}-i\hat{P})$的对易关系。利用算符$\hat{a}$, 将第$n$个激发态的波函数用基态波函数表示出来。

d) 确定算符$\hat{P}$和$\hat{Q}$在能量表象中的矩陣元。

提示 $\hat{P}^2+\hat{Q}^2-1=(\hat{P}+i\hat{Q})(\hat{P}-i\hat{Q})$.

6. 利用上題結果，用矩陣直接相乘的办法证明，对于处在第n个定态的振子，有

$$\overline{(\Delta x)^2}=\overline{x^2}=\frac{\hbar}{\mu\omega}\left(n+\frac{1}{2}\right);\quad \overline{(\Delta p)^2}=\overline{p^2}=\mu\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right).$$

7. 有一粒子在势場$V(x)=\frac{\mu\omega^2x^2}{2}$中运动。若粒子处在基态，試求出发现它在經典界限之外的几率。

8. 設粒子在如下形式的势場中运动:

$$V(x)=\infty\quad (x<0);\quad V(x)=\frac{\mu\omega^2x^2}{2}\quad (x>0).$$

求該粒子的能級。

9. 試写出“p表象”中振子的薛定諤方程，并求出其动量几率

分布函数。

10. 求在势場 $V(x)=V_0\left(\frac{a}{x}-\frac{x}{a}\right)^2$ $(x>0)$ (見图 2)中粒子的波函数和能級，幷证明其能譜与振子的能譜相同。

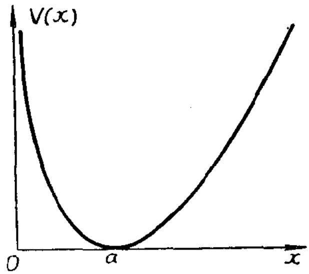

图 2

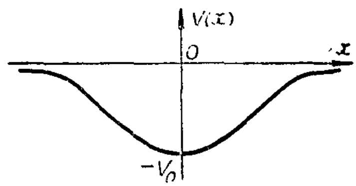

图 3

11. 試确定在势場 $V=-\frac{V_0}{\mathrm{ch}^2\frac{x}{a}}$ (見图 3)中粒子的能級。

12. 試求出在势場 $V=V_0\,\mathrm{ctg}^2\frac{\pi}{a}x$ $(0<x<a)$ (見图 4) 中粒子的能級和波函数，幷求出基态波函数的归一化常数。

考虑 V_0 值很大和很小这两个极限情况。

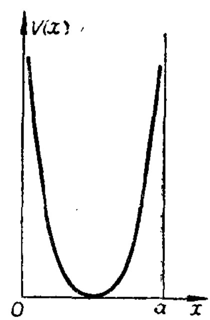

图 4

13. 試求在均匀場 $V(x)=-Fx$ 中带电粒子的波函数。

14. 設粒子在周期場 $V(x)=V_0\cos bx$ 中运动，試写出它在“p 表象”中的薛定諤方程。

15. 設粒子在周期場 $V(x)=V(x+b)$ 中运动，試写出它在“p表象”中的薛定諤方程。

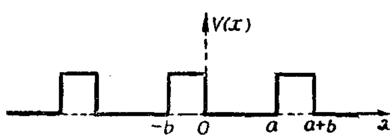

图 5

16. 設粒子在图 5 所示的

周期場中运动,試求出它的容許能带。研究$V_0\to\infty$, $b\to 0$而$V_0b=$=常数的极限情形。

17. 在准經典近似下,求势場$V=-\dfrac{V_0}{\mathrm{ch}^2\dfrac{x}{a}}$中粒子的能級,幷求分立能級的总数。

18. 在准經典近似下,求在下列势場中粒子的能譜:

a) $V=\dfrac{\mu\omega^2x^2}{2}$(振子);

b) $V=V_0\mathrm{ctg}^2\dfrac{\pi}{a}x$ $(0<x<a)$.

19. 在准經典近似下,确定定态中动能的平均值。

20. 利用上題結果,在准經典近似下,求出处于下列势場(見第18題)中粒子的平均动能:

a) $V=\dfrac{\mu\omega^2x^2}{2}$;

b) $V=V_0\mathrm{ctg}^2\dfrac{\pi x}{a}$ $(0<x<a)$.

21. 利用准經典近似和維里定理,确定在势場$V(x)=ax^\nu$中粒子的能譜形式。

22. 在准經典近似下,試对給定的能譜E_n求出势能$V(x)$的形式。可假設$V(x)$为偶函数$V(x)=V(-x)$,且当$x>0$时,$V(x)$单調地上升。

23*. 求轉动慣量为I的平面轉子的定态波函数和能級。

所謂轉子,是指在平面上(或空間中)轉动的两个剛性連接的粒子所組成的系統。轉子的轉动慣量$I=\mu a^2$,注意式中的μ在本題中是两粒子的約化质量,a是它們間的距离。

24*. 一质量为μ的粒子,在均匀重力場g中运动,运动区域被限制在一个完全反射平面之上,求粒子的定态波函数和能級。

(我們可以取一个在金屬板上上下跳动的重剛球，作为这个系統的經典类比。我們注意，本題的全部計算和結果，对于带电荷 e 的粒子在均匀电場 $\mathscr{E}$ 中运动，且存在一个反射平面的情况来說，显然也是正确的，只要在所有的方程中将 g 换为 $\frac{e}{\mu}\mathscr{E}$ 即可。) 試进行向經典力学的极限过渡。

25*. 設有一粒子，被限制在一个具有无限高壁的一維矩形势阱內，試計算这粒子作用在阱壁上的平均力。

26*. 設有一粒子处在无限深的矩形势阱中，它所处的态由下列波函数描写：

$$\psi(x)=Ax(a-x),$$

式中 a 是阱的寬度①，A 是归一化常数。

求粒子取不同能量的几率分布以及能量的平均値和方均根偏差。

27*. 設一粒子在均匀重力場中运动，运动区域被限制在一个完全反射平面之上，求粒子能級的准經典表达式。

28*. 一粒子在周期場 $U(x)$ 中运动：

$$U(x+a)=U(x).$$

利用适当的准經典近似，求出确定容許能带的超越方程，并討論之。

29*. 求动量表象中的薛定諤方程的准經典解。

证明：从通常的在坐标表象中的准經典波函数出发，再从"x表象"变换到"p 表象"，也能得到同样的准經典解。

§2. 隧道效应

1. 在研究金屬的电子发射时，必須考虑到以下事实：具有足

① 英譯本誤为阱的深度——譯者注。

够能量能从金屬中跑出来的电子，可能在金屬表面被反射。

考虑一个势場为 V 的一維模型。当 $x<0$ 时(在金屬內)，V 等于 $-V_0$；而当 $x>0$ 时(在金屬外)，V 等于 0(見图 6)。

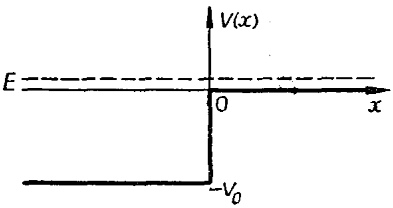

图 6

試求能量 $E>0$ 的电子在金屬表面的反射系数。

2. 在上題中曾經假設势場在金屬表面是不連續变化的。实际上，势場的这个变化，在其大小为金屬中原子間距离的范圍內是連續发生的。設金屬表面附近的势可近似地表为

$$V=-\frac{V_0}{e^{\frac{x}{a}}+1}\quad(\text{見图 7}),$$

試求能量 $E>0$ 的电子的反射系数。

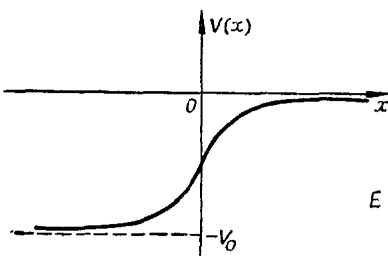

图 7

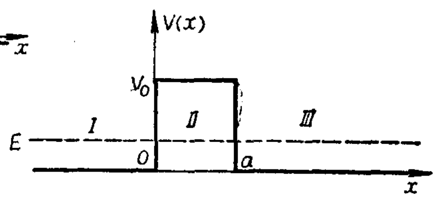

图 8

3. 試求粒子穿过矩形势垒的透射系数(見图 8)。

4. 在能量 $E>V_0$ 的情形下，求矩形势垒对粒子的反射系数(在势垒之上的反射)。

5. 試計算粒子流穿过势垒 $V(x)=\dfrac{V_0}{\mathrm{ch}^2\dfrac{x}{a}}$(見图 9)的透射系数，粒子的能量 $E<V_0$。

6. 在准經典近似下，計算电子在强度为 F 的强电場作用下，

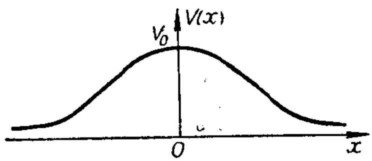

图 9

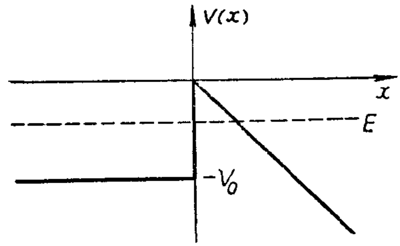

图 10

穿过金屬表面的透射系数（見图 10）。并指出这計算的适用限度。

7. 在金屬表面附近，势的变化实际上是連續的。例如，电像势 $V_{电像}=-\dfrac{e}{4x}$ 在远离金屬表面的地方还起作用。試求出电子在电場作用下（計及电像力）穿过金屬表面的透射系数 D（見图 11）。

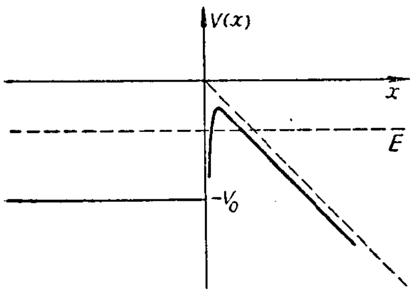

图 11

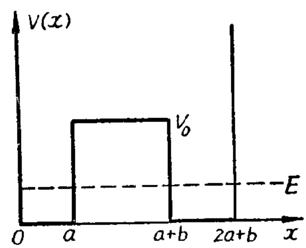

图 12

8. 近似地求出在图 12 所示的对称势阱中粒子的能級和波函数。假設 $E \ll V_0$，并且势垒的穿透性很小 $\left(\dfrac{2\mu V_0}{\hbar^2}b^2 \gg 1\right)$。

9. 一对称势場 $V(x)$ 是由被一势垒分开的两个势阱所組成的（見图 13）。假設可以用准經典近似，試求粒子在势場 $V(x)$ 中的能級。把所得的

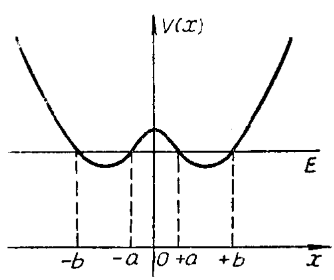

图 13

能譜与单个势阱的能譜作比較。并求出单个势阱的能級的分裂。

提示 見附录 I。

10. 假定 $t=0$ 时在两个对称势阱間存在一不可穿透的隔板(見上題),并設粒子在左边势阱中处于一定态。試問,在移动隔板后,經过多长时間 τ,粒子将出現在右边势阱中。

11. 势場 $V(x)$ 由 N 个相同的势阱組成,这些势阱被相同的势垒隔开(見图 14)。假設可以用准經典的办法,試确定在这势場中的能級。

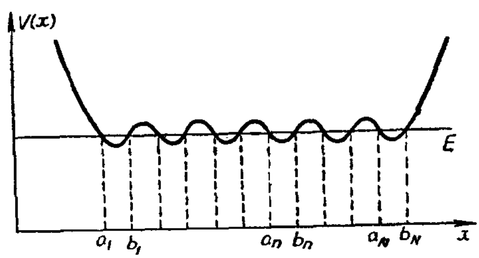

图 14

試将所得能譜和单个势阱的能譜比較。

12. 假設可以用准經典的处理办法,試求出在图 15 所示的对称場中粒子的准定态能級。

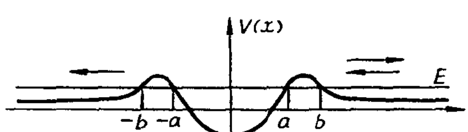

图 15

并求出能量 $E<V_0$ 的粒子的透射系数 $D(E)$,这里 V_0 是势 $V(x)$ 的极大值。

13*. 試一般证明:对于任何势垒,关系式

$$R+D=1$$

自动地滿足,式中 R 是反射系数,D 是透射系数。

14*. 試求出粒子穿过三角形势垒的透射系数（見图16）。并考慮穿透性很小和很大这两种极限情况。

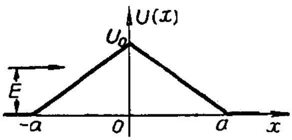

图 16

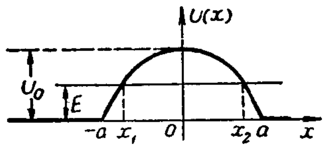

图 17

15*. 在准經典近似下，試計算如下形式的抛物形势垒（見图17）的透射系数：

$$U(x)=\begin{cases}U_0\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right) & 当 -a\leqslant x\leqslant a,\\ 0 & 当 |x|\geqslant a.\end{cases} \tag{1}$$

試給出所得結果的适用条件。

§3. 对易关系；海森伯关系；波包的扩散；算符

1. 若两个厄密算符 $\hat{A}$ 和 $\hat{B}$ 满足对易关系 $\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}=i\hat{C}$，試证明下列关系式成立：

$$\sqrt{\overline{(\Delta\hat{A})^2}\,\overline{(\Delta\hat{B})^2}}\geqslant\frac{|\overline{\hat{C}}|}{2}.$$

2. 設 $\hat{q}$ 和 $\hat{p}$ 満足对易关系 $\hat{q}\hat{p}-\hat{p}\hat{q}=i\hbar$，試求出算符 $\hat{q}$ 和 $F(\hat{p})$ 的測不准关系。

提示 将 $F(\hat{p})$ 表成泰勒級数形式。

3. 試利用海森伯关系估計諧振子基态的能量。

4. 試估計在相对論和非相对論两种情形下，在原子序数为 Z 的原子的 K 壳层上一个电子的能量。

5. 試利用海森伯关系，估計核电荷为 Z 的双电子原子的基态

能量。

6. 自由电子所产生的磁場，一部分是来自它的运动，而另一部分則来自它的固有磁矩。

从电动力学知道，运动电荷产生的磁場，其强度的数量級为

$$H_1 \sim \frac{ev}{cr^2},$$

而由偶极矩 μ 所产生的磁場强度的数量級为

$$H_2 \sim \frac{\mu}{r^3}.$$

为了能从测量自由电子所产生的磁場强度来确定它的磁矩 μ，下面两个条件必須满足：

$$H_2 \gg H_1 \tag{1}$$

和

$$\Delta r \ll r. \tag{2}$$

后一条件的意义是，电子必須局限于 Δr 区域内，而 Δr 比从这区域到测量磁場地点的距离要小得多。

問这两个条件是否能同时满足？

提示 考虑海森伯关系以及电子磁矩的值 $\mu = \frac{e\hbar}{2mc}$。

7. 在波函数

$$\psi(x) = \varphi(x) e^{\frac{ip_0 x}{\hbar}}$$

的表式中，若 $\varphi(x)$ 是实函数，問量 p_0 的物理意义是什么？

8. 证明在具有分立的能量本征值的定态中，动量的平均值 $\bar{p}$ 等于零。

9. 在 $t=0$ 时自由粒子的波函数为

$$\psi(x, 0) = \varphi(x) e^{\frac{ip_0 x}{\hbar}}.$$

函数 $\varphi(x, 0)$ 是实的，且只对在間隔 $-\delta < x < +\delta$ 内的 x 值才显著

地不等于零。試确定在 x 值的什么区域内， t 时刻的波函数将不为零。

10. 若給定在 $t=0$ 时刻下列三种情形的波函数，試求这些波函数的变化(波包的扩散)：

a）自由粒子

$$\psi(\boldsymbol{r},0)=\frac{1}{(\pi\delta^2)^{\frac{3}{4}}}\exp\left\{\frac{i\boldsymbol{p}_0\cdot\boldsymbol{r}}{\hbar}-\frac{r^2}{2\delta^2}\right\};$$

b）在均匀場中运动的粒子

$$\psi(\boldsymbol{r},0)=\frac{1}{(\pi\delta^2)^{\frac{3}{4}}}\exp\left\{\frac{i\boldsymbol{p}_0\cdot\boldsymbol{r}}{\hbar}-\frac{r^2}{2\delta^2}\right\};$$

c）在势場 $V(x)=\dfrac{\mu\omega^2x^2}{2}$ 中运动的粒子

$$\psi(x,0)=c\ \exp\left\{\frac{ip_0x}{\hbar}-\frac{\alpha^2(x-x_0)^2}{2}\right\},\quad \alpha=\left(\frac{\mu\omega}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

11. 证明下列关系式成立：

$$e^{\hat{L}}\hat{a}e^{-\hat{L}}=\hat{a}+[\hat{L},\ \hat{a}]+\frac{1}{2!}[\hat{L},[\hat{L},\hat{a}]]+$$

$$+\frac{1}{3!}[\hat{L},[\hat{L},[\hat{L},\hat{a}]]]+\cdots.$$

12. 設有一振子，在 $t=-\infty$ 时处于基态。如果它受的作用力为 $f(t)$，这里 $f(t)$ 是时間 t 的任意函数(当 $t\to\pm\infty$ 时，$f(t)=0$)，試求 $t=+\infty$ 时振子处于第 n 个激发态的几率。

对以下两种情况計算上面得到的表式：

a) $f(t)=f_0\,e^{-\frac{t^2}{\tau^2}}$,

b) $f(t)=f_0\dfrac{1}{\left(\dfrac{t}{\tau}\right)^2+1}$.

13. 試证明：若引入新的变数 $x_1=x-\xi(t)$（这里，$\xi(t)$ 满足經