青年科学家著作丛书

张耀中 著

反常规范理论导论

吉林科学技术出版社

青年科学家著作丛书
反常规范理论导论
张耀中 著

责任编辑：张瑛琳 封面设计：杨玉中

出版 发行	吉林科学技术出版社	850×1168毫米32开本	5.875印张
		插页4	140 000字
		1990年4月第1版	1990年4月第1次印刷
		印数：1—1 180册	定价：4.00元
印刷	长春新华印刷厂	ISBN 7-5384-0505-4/O·28	

内容提要

本书系统地阐述了反常规范理论的基础。内容包括：阿贝尔和非阿贝尔反常，自洽性条件，协变和自洽反常，对易子和Jacobi等式反常，反常Jacobi等式的约束，上同调与群表示，反常规范理论的自洽量子化等。

本书适用于高等院校物理和数学专业高年级学生、研究生；也可作为科研人员和高校教师的研究或教学参考书。

祖国的希望　未来的曙光
——寄语青年科技工作者

王大珩

翻开吉林科学技术出版社送来的《青年科学家著作丛书》书目及作者名单，一个个自强好学，勇于探索创新的青年人仿佛就在眼前，使我欣慰，感到后生有望。所以在《丛书》编辑出版之际，我很乐于借此机会，同广大青年科技工作者讲几句共勉的话。

这些年来，一大批在五星红旗下诞生，成长起来的年轻科技工作者崭露头角，在面向国民经济主战场的应用研究和在基础科学以及高技术研究等诸多方面取得优异成就，有的跻于国际领先地位，或达到国际先进水平，有的填补国内空白，这些成果对推动科学技术进步，发展国民经济起到了重要作用。为鼓励青年科技工作者的科学研究和发明创造，中国科学技术协会、中国科学院分别设立了青年科技奖和青年科学家奖，规定每两年评选一次。首届青年科技奖评出94名，首届青年科学家奖评出25名，他们是从全国数以百万计的青年科技工作者中层层遴选出的佼佼者。

在此基础上，经过中国科协和中国科学院的推荐，吉林科学技术出版社编辑出版首届部分获奖者的著作，并获得长白山学术著作出版基金的资助，这对广大青年

科技工作者是很大的鼓舞。出版社关心青年科技工作者的成长是值得赞扬的。

当今，在激烈的国际竞争中，重要的是看一个国家的综合国力，而其中重要的一个方面是科学技术的进步，所以各国都把科学技术作为推动经济发展和社会进步的重要手段。我国是一个拥有十一亿人口的大国，经济还很落后。但是我们有志气、有能力振兴中华，立足于世界民族之林。实现这样的宏愿，要靠我们几代人的艰苦奋斗。中国科学技术的兴旺发达要靠我们老中青科技工作者团结合作，但归根到底要靠你们青年人。长江后浪推前浪，一代更比一代强。党和人民把国家的前途、民族的命运寄托在你们青年人身上，正如江泽民同志所说："你们是祖国希望所在，是中国未来的曙光。"

我们这些人都已年逾古稀，要你们接好班，要有理想、有志气。一个人也好，一个民族也好，都要有一点精神，要有使命感，要有民族自强心，要为国家、为民族争口气，奋发向上，勇于进取；作为优秀的青年科技人才，除业务上有突出成就外，还要有不计名利、无私奉献的高尚精神，现在尤其要提倡这种精神，还要有求实的科学态度，尊重知识，尊重他人的劳动；你们还要发扬中华民族的美德，那就是要有集体主义精神，要团结协作，自力更生，艰苦奋斗，不折不挠地去拼搏，满怀希望，开拓未来！

1990年2月

前　言

我动笔写这本书的目的有两个：

一是较详细地评述近几年来发展起来的计算手征反常的非微扰论的方法和有关的数学概念。我希望我已经给出了比较完整的描述，以便帮助初学者能够通过阅读此书对反常规范理论有一个大概的了解；我也讨论了反常规范理论中还没有解决的问题。

二是我国有许多在反常理论方面做过大量一流工作的专家，他们是周光召，侯伯宇，郭汉英，王珮，宋行长，侯伯元，等等。我自己也在反常理论方面做了近三年的探讨。因此，我试图把我国科研人员在这方面的工作尽量写进此书，使读者能认识到我国的科研工作者在反常理论方面的工作是喜人的。

作者在这里首先要感谢吉林科学技术出版社和长白山学术著作出版基金会使此书的出版成为可能。作者也感谢西北大学现代物理所赵宏毅副所长给予的许多鼓励和帮助；是侯伯宇教授指导作者进入反常理论这个领域的，在此我对他表示感谢；作者也感谢郭汉英，王珮教授的鼓励、关怀及许多有益的讨论；我还感谢侯伯元，宋行长教授的讨论。

张耀中

1989年3月于西北大学

目　录

第 1 章

引 言

对称性原理在高能粒子物理中起着基本的作用。在经典理论中，Noether 定理保证了与对称性相应的流是守恒的。然而，在我们处理有无穷多个自由度的量子理论时，量子化的方法破坏一些基本的经典对称性。例如，无质量费米子的连续手征对称性。结果，在量子化后，一些经典的对称性不能再维持；与之对应的守恒流在量子化后不再守恒。这样的现象称作为反常。

本书只讨论规范理论中经典手征对称性在量子化后的破坏，即所谓的手征反常。它最早是由 Adler, Bardeen, Bell 和 Jackiw 在微扰论计算中发现的。尽管手征反常的发现解决了粒子物理中的许多重要问题，如QCD中的$U(1)$疑难，$\pi^0\to 2\gamma$ 衰变，夸克-轻子族的GIM机制，等等，但是那时对反常问题的研究发展缓慢。

直到近几年来，人们发现手征反常具有深刻的拓扑根源，对手征反常的研究才得到迅速发展。人们把微分几何、拓扑、

上同调论等现代数学工具用于对反常的研究。建立了反常理论的优美的数学体系并得到了许多重要的结果。例如反常与指数定理间的联系，反常与规范场轨道空间和规范群空间拓扑之间的联系等等。反常理论的这些优美的数学体系激励人们进一步寻找处理反常理论的新方法。甚至，近来人们提出了自洽地量子化一个反常理论的可能性。本书中我们将对近几年来发展起来的计算反常的非微扰方法做比较详尽的介绍。

手征反常出现于带γ_5耦合的量子理论中。它在手征规范理论中所起的作用是无法估量的。现在，反常已被用到了量子理论的各个领域：从固态物理到超弦。人们普遍相信反常是量子场论的一般和基本的性质。

我们假定读者学过量子场论、规范场论及群论等基本课程，并对现代数学，例如微分几何、上同调等的基本性质也有所了解。

第 2 章

手征反常和它的路径积分推导

2.1　手征$U_A(1)$反常

手征$U_A(1)$反常或称阿贝尔反常代表费米子路径积分测度在手征转动下的非不变性。我们考虑一耦合到费米子的$SU(n)$杨-Mills理论，其Minkowski时空中费米子部分拉氏量为

$$\mathscr{L}^M{}_F = \bar{\psi}_i \not{D} \psi \qquad (2.1.1)$$
$$\not{D} = \gamma^\mu(\partial_\mu + A_\mu) \qquad A_\mu = -it^a A^a_\mu$$

t^a 为 $SU(n)$ 的厄米生成元：$(t^a)^+ = t^a$，它满足：$[t^a, t^b] = if^{abc}t^c$，(f^{abc}为结构常数)，$\mathrm{tr}\,t^a t^b = \frac{1}{2}\delta^{ab}$。$\gamma$矩阵满足

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \qquad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3)$$
$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \qquad \{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0 \qquad (2.1.2)$$

时空度规$g^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$。$\gamma^0$是厄米的，$\gamma^k(k = 1, 2, 3)$是反厄米的，$\gamma^5$是厄米的。

作 Wick 转动：$x^0\to -ix^4$，$A_0\to iA_4$，那么算子 $\not{D}=\gamma^\mu(\partial_\mu+A_\mu)$ 变成厄米算子

$$\not{D}=i\gamma^0D_4+\gamma^kD_k=\gamma^4D_4+\gamma^kD_k \tag{2.1.3}$$

度规张量变成$g^{\mu\nu}=\mathrm{diag}(-1,-1,-1,-1)$，$\gamma^\mu(\mu=1,2,3,4)$矩阵变成反厄米的。这样我们得Euclidean空间路径积分

$$\int\mathscr{D}\bar{\psi}\mathscr{D}\psi\exp\left(\int d^4x\mathscr{L}^E{}_F(x)\right) \tag{2.1.4}$$

$\mathscr{L}^E_F$是$\mathscr{L}^M_F$Wick 转动到 Euclidean 空间中的结果。在 Euclidean空间中，$\bar{\psi}$与ψ是独立的。

在无穷手征$U(1)$转动，

$$\psi(x)\to\psi'(x)=e^{i\theta(x)\gamma_5}\psi(x) \tag{2.1.5}$$

$$\bar{\psi}(x)\to\bar{\psi}'(x)=\bar{\psi}(x)e^{i\theta(x)\gamma_5} \tag{2.1.6}$$

下，拉氏量变成

$$\mathscr{L}^E{}_F(x)\to\mathscr{L}^{E'}_F(x)=\mathscr{L}^E{}_F(x)-\partial_\mu\theta(x)\overline{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi(x) \tag{2.1.7}$$

$\partial_\mu\theta(x)$的系数定义了对称流。若费米测度$\mathscr{D}\bar{\psi}\mathscr{D}\psi$在（2.1.5），（2.1.6）下保持不变，则我们有

$$\int\mathscr{D}\overline{\psi}\mathscr{D}\psi e^{S[\psi]}=\int\mathscr{D}\overline{\psi'}\mathscr{D}\psi e^{S[\psi']}=\int\mathscr{D}\bar{\psi}\mathscr{D}\psi e^{S[\psi']} \tag{2.1.8}$$

式中

$$S[\psi]=\int d^4x\mathscr{L}^E_F(x)\qquad S[\psi']=\int d^4x\mathscr{L}^{E'}_F(x)$$

把（2.1.8）式按$\theta(x)$的幂次展开，我们得朴素的等式

$$\partial_\mu\langle\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi\rangle=0 \tag{2.1.9}$$

$\langle O(x)\rangle$表$O(x)$在路径积分意义下的平均。

然而仔细考查一下便可知，在转动（2.1.5）和（2.1.6）下，费米测度$\mathscr{D}\bar{\psi}\mathscr{D}\psi$并非是不变的，而是有一非零的Jacobian

因子出现

$$\mathscr{D}\overline{\psi'}\mathscr{D}\psi' = J[A]\mathscr{D}\overline{\psi}\mathscr{D}\psi \tag{2.1.10}$$

这里 $J[A] = \exp(-i\int d^4x\theta(x)\alpha(x))$即为 Jacobian因子。那么关系（2.1.9）式修改为

$$\partial_\mu\langle\overline{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi\rangle = i\alpha(x) \tag{2.1.11}$$

它即为手征$U(1)$等式。

为计算（2.1.10）式中的Jacobian因子，我们作如下展开

$$\psi(x) = \sum_n a_n\varphi_n(x)$$

$$\overline{\psi}(x) = \sum_n \overline{b}_n\varphi_n(x)^+ \tag{2.1.12}$$

其中$\{\varphi_n(x)\}$是厄米算子$\not{D}$的完备本征函数集合

$$\not{D}\varphi_n(x) = \lambda_n\varphi_n(x) \qquad \langle\varphi_m(x)|\varphi_n(x)\rangle = \delta_{mn}. \tag{2.1.13}$$

为简单计，我们假定所有 本 征 值 λ_n 均是分立的。 系 数 a_n 和 $\overline{b}_n$是 Grassman 代数中的元素。变换（2.1.12）形式上是么正的。在展开式（2.1.12）下，我们有

$$\mathscr{D}\overline{\psi}\mathscr{D}\psi = \prod_{m,n} d\overline{b}_n da_m \tag{2.1.14}$$

这里我们已选择了任意的归一化因子为1。

同样，$\psi'(x)$和$\overline{\psi'}(x)$也可以用$\{\varphi_n(x)\}$来展开

$$\psi'(x) = \sum_n a_n'\varphi_n(x)$$

$$\overline{\psi'}(x) = \sum_n \overline{b}_n'\varphi_n(x)^+ \tag{2.1.15}$$

这样

$$\mathscr{D}\overline{\psi'}\mathscr{D}\psi' = \prod_{n,m} d\bar{b}_n' da_m' = J[A]\ \mathscr{D}\bar{\psi}\mathscr{D}\psi$$

$$= J[A]\ \prod_{n,m} d\bar{b}_n da_m$$

$$= (\det C_{m,n})^{-2}\mathscr{D}\bar{\psi}\mathscr{D}\psi \qquad (2.1.16)$$

其中

$$\det C_{m,n} = \det\langle\varphi_m(x)\,|\,e^{i\theta(x)\gamma_5}|\,\varphi_n(x)\rangle$$

$$= \exp(\mathrm{tr}\langle\varphi_m(x)\,|\,i\theta(x)\gamma_5|\,\varphi_n(x)\rangle)$$

$$= \exp\left(i\ \sum_n\langle\varphi_n(x)\,|\,\theta(x)\gamma_5|\,\varphi_n(x)\rangle\right)$$

$$= \exp\left(i\int d^4x\theta(x)\sum_n\varphi_n^+\gamma_5\varphi_n\right) \qquad (2.1.17)$$

从而

$$J[A] = \exp\left(-2i\int d^4x\vartheta(x)\sum_n\varphi_n^+\gamma_5\varphi_n\right) \qquad (2.1.18)$$

$$\boldsymbol{a}(x) = 2\sum_n\varphi_n^+\gamma_5\varphi_n \qquad (2.1.19)$$

(2.1.19) 式中的求和是无定义的和发散的。我们用算子ϕ来正规化它

$$\boldsymbol{a}(x) = 2\sum_n\varphi_n^+\gamma_5\varphi_n = 2\lim_{M\to\infty}\sum_n\varphi_n^+\gamma_5 e^{-\phi^2/M^2}\varphi_n$$

$$= 2\lim_{M\to\infty}\ \lim_{y\to x}\ \mathrm{tr}\gamma_5 e^{-\phi^2/M^2}\ \sum_n\varphi_n(x)\varphi_n^+(y)$$

$$= 2\lim_{M\to\infty}\ \lim_{y\to x}\ \mathrm{tr}\gamma_5 e^{-\phi^2/M^2}\,\delta^4(x-y)$$

$$= 2\lim_{M\to\infty}\ \lim_{y\to x}\ \mathrm{tr}\ \gamma_5\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-iky}e^{-\phi^2/M^2}\,e^{ikx}$$

$$= 2\lim_{M\to\infty}\mathrm{tr}\gamma_5\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-ikx}e^{-\phi^2/M^2}\,e^{ikx} \qquad (2.1.20)$$

利用等式

$$\not{D}^2=\gamma^\mu D_\mu\gamma^\nu D_\nu=\gamma^\mu\gamma^\nu D_\mu D_\nu$$

$$=g^{\mu\nu}D_\mu D_\nu+\frac{1}{2}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]D_\mu D_\nu$$

$$=D^\mu D_\mu+\frac{1}{4}[\gamma^\mu,\ \gamma^\nu]F_{\mu\nu}$$

$$F_{\mu\nu}=[D_\mu,D_\nu]=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu+[A_\mu,A_\nu] \tag{2.1.21}$$

我们得

$$\alpha(x)=2\lim_{M\to\infty}\ \mathrm{tr}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\gamma_5\exp\left(-\frac{(ik^\mu+D^\mu)(ik_\mu+D_\mu)}{M^2}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4M^2}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]F_{\mu\nu}\right) \tag{2.1.22}$$

求积符号理解为对内部对称指标和 Dirac 指标同时进行。对 (2.1.22) 式进行积分变数变换：$k\to Mk$，我们得

$$\alpha(x)=2\lim_{M\to\infty}\mathrm{tr}\gamma^5\exp\left(-\frac{1}{4M^2}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]F_{\mu\nu}\right)\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}$$

$$M^4\cdot\exp\left(k^\mu k_\mu-\frac{i}{M}k_\mu D^\mu-\frac{D^\mu D_\mu}{M^2}\right) \tag{2.1.23}$$

对上式中的指数按$1/M$进行展开，在tr符号以及$M\to\infty$的极限下，展开式中只有$\frac{1}{M^4}$项有贡献，所以

$$\alpha(x)=2\mathrm{tr}\,\gamma_5\frac{1}{2!}\left(\frac{-1}{4M^2}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]F_{\mu\nu}\right)^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-k^2}$$

$$=-\frac{1}{16\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\sigma\rho}\mathrm{tr}F_{\mu\nu}F_{\sigma\rho} \tag{2.1.24}$$

这样

$$\mathscr{D}\overline{\psi'}\,\mathscr{D}\psi' = \mathscr{D}\overline{\psi}\mathscr{D}\psi\,\exp\left(\frac{i}{16\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\sigma\rho}\int d^4x\vartheta(x)\operatorname{tr}F_{\mu\nu}F_{\sigma\rho}\right) \tag{2.1.25}$$

我们得反常的手征$U(1)$等式

$$\partial_\mu(\overline{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi) = \left\langle\frac{-i}{16\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\sigma\rho}\operatorname{tr}F_{\mu\nu}F_{\sigma\rho}\right\rangle \tag{2.1.26}$$

通过Wick转动转回到Minkowski时空，即去掉上式右边的因子i，我们得到Minkowski时空中的结果。

在$D=2n$ 维中，上述计算可以类似地进行。我们得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\alpha(x) &= \operatorname{tr}\frac{1}{n!}\gamma_5\left(\frac{-1}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]F_{\mu\nu}\right)^n\int\frac{d^Dk}{(2\pi)^{2n}}e^{-k^2}\\ &= \frac{i^n}{n!\,(4\pi)^n}\varepsilon^{\mu_1\cdots\mu_{2n}}\operatorname{tr}F_{\mu_1\mu_2}\ldots F_{\mu_{2n-1}\mu_{2n}}\end{aligned} \tag{2.1.27}$$

2.2 非阿贝尔反常

在本节中，我们来讨论非阿贝尔反常，即在非阿贝尔手征规范变换下的反常。考虑已延拓到了Euclidean 空间的费米部分拉氏量

$$\mathscr{L}^E{}_F = \overline{\psi}i\not{D}\psi \tag{2.2.1}$$

$$\not{D} = \gamma^\mu(\partial_\mu + V_\mu + A_\mu\gamma_5)$$

此处的$V_\mu = -it^aV_\mu{}^a$ 为矢量规范场，$A_\mu = -it^aA_\mu{}^a$ 为轴矢规范场。在Euclidean 空间中，算子$\not{D}$并非是厄米的

$$\not{D}^+ = \gamma^\mu(\partial_\mu + V_\mu - A_\mu\gamma_5) \neq \not{D} \tag{2.2.2}$$

为使ϕ厄米，我们对A_μ作光滑的延拓：$A_\mu \to iA_\mu$。在完成了所有的计算后，我们再把A_μ延拓回来。在做了上述延拓后，算子

$$\phi=\gamma^\mu(\partial_\mu+V_\mu+iA_\mu\gamma_5)=\phi^+ \tag{2.2.3}$$

是厄米的了。

若我们应用完备基矢

$$\phi\varphi_n(x)=\lambda_n\varphi_n(x) \qquad \langle\varphi_m(x)|\varphi_n(x)\rangle=\delta_{m,n} \tag{2.2.4}$$

和对应的正规子

$$e^{-\phi^2/M^2} \tag{2.2.5}$$

那么用与2.1节中相类似的办法，我们可得非阿贝尔反常。例如，对手征变换：

$$\psi(x)\to\psi'(x)=e^{i\theta^a(x)t^a\gamma_5}\psi(x)$$

$$\overline{\psi}(x)\to\overline{\psi}'(x)=\overline{\psi}(x)e^{i\theta^a(x)t^a\gamma_5} \tag{2.2.6}$$

我们得Jacobian因子

$$J[V,\ A]=\exp\left(-i\int d^4x\theta^a(x)\boldsymbol{a}^a(x)\right) \tag{2.2.7}$$

$$\boldsymbol{a}^a(x)=2\sum_n\varphi_n{}^+t^a\gamma_5\varphi_n \tag{2.2.8a}$$

$$\sum_n\varphi_n{}^+t^a\gamma_5\varphi_n=\lim_{M\to\infty}\mathrm{tr}t^a\gamma_5\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-ikx}e^{-\phi^2/M^2}e^{ikx} \tag{2.2.8b}$$

利用等式

$$\phi^2=\widetilde{D}^\mu D_\mu+\frac{1}{2}[\gamma^\mu,\ \gamma^\nu]\widetilde{D}_\mu D_\nu$$

$$\widetilde{D}_\mu=\partial_\mu+V_\mu-iA_\mu\gamma_5 \tag{2.2.9}$$

我们得

$$e^{-ikx}e^{-\phi^2/M^2}e^{ikx}=\exp\left\{\frac{-1}{M^2}\left[(ik^\mu+\widetilde{D}^\mu)(ik_\mu+D_\mu)\right.\right.$$