现代应用数学丛书

可压缩流体理论

〔日〕河村龙馬 著

上海科学技术出版社

現代应用数学丛书

可压縮流体理論

〔日〕河村龙馬著
刘亦珩譯
谷超豪等校

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书是日本岩波书店出版的現代应用数学丛书之一的中譯本，对近代气体动力学的一些基本理論，作了比較系統的叙述。

全书共分八章。第1～5章是本书的基础部分，包括：理想气体的基本方程和微小扰动的基本性质；激波理論；二維定常势流基本方程的綫性化方法，即速度图法；小扰动法的綫性理論，以及研究利用超声速源点分布方法等內容。

第6～8章主要研究机翼理論，錐型流理論，并討論了跨声速流动的問題。这三章可看作是近代高速空气动力学的入門。

本书可供高等学校数学和力学专业师生及有关工程技术人員参考。

現代应用数学丛书

可压縮流体理論

原书名 压縮性流体の理論
原著者 〔日〕河村龙馬
原出版者 〔日〕岩波书店
譯者 刘亦珩
校者 谷超豪 苏德昌 黃城超

*

上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路450号）
上海市书刊出版业营业許可証出093号
新华书店上海发行所发行 各地新华书店經售
商务印书館上海厂印刷

*

开本850×1168 1/32 印張4 字数92,000
1962年6月第1版 1962年6月第1次印刷
印数1—5,000

統一书号：13119·461
定 价：(十四) 0.70元

出版説明

这一套书是根据日本岩波书店出版的"現代应用数学讲座"翻譯而成。日文原书共15卷60册，分成A、B两組，各編有序号。現在把原来同一題目分成两册或三册的加以合并，整理成42种，不另分組編号，陆續翻譯出版。

这套书涉及的面很广，其內容都和現代科学技术密切有关，有一定参考价値。每一本书收集的資料都比較丰富，而叙述扼要，篇幅不多，有利于讀者以較短时間掌握有关学科的主要內容。虽然，这套书的某些观点不尽适合于我国的情况，但其方法可供参考。因此，翻譯出版这一套书，对我国学术界是有所助益的。

由于日文原书是1957年起以讲座形式陆續出版的，写作时間和篇幅的限制不可避免地会影响原作者对內容的处理，为了尽可能地减少这种影响，我們在每一譯本中，特請譯者或校閱者撰写序或后記，以介紹有关学科的最近发展状况，并对全书內容作一些評价，提出一些看法，結合我国情况补充一些資料文献，在文內过于簡略或不足的地方添加了必要的注释和改正原书中存在的一些錯誤。希望这些工作能对讀者有所帮助。

承担翻譯和校閱的同志，为提高书籍的质量付出了巨大劳动，在此特致以誠摯的謝意。

欢迎讀者对本书提出批評和意見。

上海科学技术出版社

譯 者 序

本书将近代气体动力学的一些基本理論，作了比較系統的叙述，可供具有流体力学基础知識的讀者作进一步学习的参考。

全书以二阶偏微分方程为主要工具，对于二維問題叙述得比較詳細，又提出了把方程綫性化的各种变换方法，就各个具体情况予以解决。只要具有大学理工科高等数学的水平，讀起来就不会感到十分困难。

全书共八章二十九节。第1章介紹理想气体的基本方程和微小扰动的基本性质。第2章介紹激波的理論。第3章介紹二維定常势流基本方程的綫性化的方法，即所謂速度图法，特別討論了 Kármán–Tsien (錢学森)的方法。第4章討論小扰动法的綫性理論。第5章研究利用超声速源点分布的方法。这五章可以看作全书的基础部分。

以下第6第7章主要研究机翼理論和錐型流理論。第8章討論跨声速流动的問題。这三章可以看作近代高速空气动力学的入門。特別是，最后一章討論跨声速方程时，归結到所謂 Tricomi 混合型方程，用两个特例討論了它的解法。这类方程的数学处理是比較难的，本书提供了实例及解法，适宜于作为数学物理方程課程的补充教材。

本书譯竣，承谷超豪、苏德昌、黄城超三位同志校閱，提出了很多宝貴意見，在此表示衷心的感謝。

刘 亦 珩

目　录

第1章 基本方程

§1 基本方程

通常流体的运动都伴随着压力的变化。在流体的有一些运动中，由于压力变化而产生的密度变化是不能忽视的，研究这样的流体运动的学科叫做可压缩流体力学。本书将忽略流体的粘性和热傳导，而且只考虑理想气体。和这样的流体的运动有关的物理量是压力 p，密度 ρ，温度 T 和速度 $\boldsymbol{q}$. 联系这些量的基本方程有状态方程 (equation of state)，連續性方程 (equation of continuity)，运动方程 (equation of motion) 及能量方程 (equation of energy)。在物理空間中处理时，采用普通时間 t 和固定在空間的正交坐标系的三个分量 x, y, z 作为独立变量。

状态方程是气体热力学状态量 p, ρ, T 間存在着的一个关系式，在理想气体的情形下可写为如下的形式：

$$\frac{p}{\rho}=RT, \tag{1.1}$$

这里 R 叫做普遍气体常数，它是和 p, ρ, T 无关的常数。

連續方程是描述质量守恒定律的关系式，和不可压縮流体力学中完全类似，可表示为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho \boldsymbol{q})=0. \tag{1.2}$$

若令速度的 x, y, z 分量各为 u, v, w，則(1.2)也可写为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho w)=0. \tag{1.3}$$

运动方程是和不可压縮流体力学中的运动方程完全相同的。即是

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},\\
\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},\\
\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}.
\end{aligned}\right\} \tag{1.4}
$$

能量方程是由包含了动能的热力学第一定律再加上压力随时間变化所做的功得到的。它可以写为如下的形式:

$$\frac{DQ}{Dt}=\frac{D}{Dt}\left(c_pT+\frac{1}{2}q^2\right)-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t}, \tag{1.5}$$

这里，Q 是由外部加入的热量，c_p 是定压比热，$\frac{D}{Dt}$ 表示对于实质部分的时間微分。在絕热变化($Q=0$)时，有

$$\frac{D}{Dt}\left(c_pT+\frac{1}{2}q^2\right)=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t}. \tag{1.6}$$

又在定常情形，有

$$c_pT+\frac{1}{2}q^2=\text{常数}. \tag{1.7}$$

在热傳导可以略去的情形，即使粘性不为零，(1.7) 也是成立的。由于粘性在流体内部引起摩擦生热的情形，只要流体元素是处在热絕緣状态，那么 (1.7) 仍是可以应用的。但是，正由于最初的假定，我們不仅忽略了热傳导性，而且連气体的粘性也加以忽略，这时当然不会有摩擦生热的現象，于是气体的状态变化完全是可逆的。这样的变化在热力学中叫做等熵变化 (isentropic)，这时 p 和 ρ 間有下列关系:

$$\frac{p}{\rho^\gamma}=\text{常数}, \tag{1.8}$$

这里γ是定压比热和定容比热的比❶。服从 (1.7) 的变化叫做等能变化，而等熵变化是包含在等能变化之中的。在处理可以忽略粘性及热傳导的情形，用等熵关系 (1.8) 来代替能量方程 (1.7) 是更为方便的。(1.1)到(1.8)这些关系式就是可压缩流体力学的基本方程。

§2 微小扰动的傳播，声波

我們来考虑在静止气体中給以非常小的扰动时的气体运动。为簡单起見，假定运动只限于x方向，而状态变化是等熵的。如果u和$\dfrac{d\rho}{\rho}$都可看做一阶小量而其二阶以上的项均可略去，則由(1.3)得到

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=0, \tag{2.1}$$

由(1.4)的第一式得到

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}. \tag{2.2}$$

因为在p及ρ之間成立等熵关系式(1.8)，所以可以写出

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_S\frac{\partial\rho}{\partial x},$$

这里标数S表示等熵变化。于是(2.2)可以改写为

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-a^2\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x},\quad a^2=\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_S. \tag{2.3}$$

考虑到a是和t及x无关的量，所以由 (2.1) 及 (2.3) 消去ρ就得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{2.4}$$

---

❶ 依照这里的推导，(1.8) 右边的常数还可能和流綫有关，一般的等熵流应指(1.8)的右边的常数和地点无关的。——校者注

(2.4) 叫做波动方程。若令 f 和 g 是任意的函数，则 (2.4) 的一般解为

$$u=f(x-at)+g(x+at). \tag{2.5}$$

此式右边第一项表示用速度 a 向 x 正向傳播的扰动，第二項表示用同样的速度向 x 負向傳播的扰动。若仅考虑 $u=f(x-at)$ 时，这个扰动就以常速度 a 向 x 的正向进行而不改变形状。这样的扰动就叫做声波，而 a 叫做声速。声波的傳播速度为 a 这一点，在三維情形通常也成立。

声速 a 在可压縮流体力学里占有重要的位置。用 (1.1) 及 (1.8) 計算声速 a 时，得到

$$a^2=\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_s=\gamma\frac{p}{\rho}=\gamma RT, \tag{2.6}$$

即声速和 $\sqrt{T}$ 成正比。

結合 (1.7) 及 (2.6) 就可以求得定常流动的流速 q 和声速 a 的关系。如果考虑到 $c_p=\frac{\gamma}{\gamma-1}R$，就有

$$\frac{1}{2}q^2+\frac{a^2}{\gamma-1}=\text{常数}. \tag{2.7}$$

若設 $q=a$ 的状态的流速为 a^*，$q=0$ 时的声速为 a_0，則有

$$\frac{1}{2}q^2+\frac{a^2}{\gamma-1}=\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}a^{*2}=\frac{1}{\gamma-1}a_0^2, \tag{2.8}$$

a^* 叫做临界速度 (critical velocity)。又利用 (1.1)，則 (2.8) 可写为

$$\frac{1}{2}q^2+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}=\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0}=\frac{1}{2}c^2=\frac{1}{\gamma-1}a_0^2, \tag{2.9}$$

这里标数 0 表示 $q=0$ 时的状态。又 c 是 $p=0$ 时的速度，叫做最大速度 (limiting velocity)。

§3 势　流

在流体力学里，环量 (circulation) Γ 及渦量 (vorticity) $\boldsymbol{\omega}$ 分别由下列公式定义：

$$\Gamma=\oint_C \boldsymbol{q}\cdot d\boldsymbol{r}, \qquad \boldsymbol{\omega}=\operatorname{curl}\boldsymbol{q}, \tag{3.1}$$

这里 $d\boldsymbol{r}$ 是积分路綫 C 的弧素向量。若令以积分路綫 C 为截綫的任意曲面为 S，且 S 的法綫为 $\boldsymbol{n}$，则根据 Stokes 定理，在 Γ 与 $\boldsymbol{\omega}$ 之間成立如下的关系：

$$\Gamma=\oint_C \boldsymbol{q}\cdot d\boldsymbol{r}=\iint_S \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\omega}\,dS. \tag{3.2}$$

我們来考虑定义在和流体一起运动的閉曲綫 C 上的环量 Γ 随时間的变化：

$$\frac{D\Gamma}{Dt}=\frac{D}{Dt}\oint_C \boldsymbol{q}\cdot d\boldsymbol{r}=\oint_C \frac{D}{Dt}(\boldsymbol{q}\cdot d\boldsymbol{r})$$

$$=\oint_C \frac{D\boldsymbol{q}}{Dt}\cdot d\boldsymbol{r}+\oint_C \boldsymbol{q}\cdot\frac{D}{Dt}(d\boldsymbol{r}).$$

利用运动方程，得到

$$\frac{D\boldsymbol{q}}{Dt}\cdot d\boldsymbol{r}=-\frac{1}{\rho}(\operatorname{grad}p)\cdot d\boldsymbol{r}.$$

又因 $\frac{D}{Dt}(d\boldsymbol{r})=d\boldsymbol{q}$，所以有

$$\frac{D\Gamma}{Dt}=-\oint_C \frac{1}{\rho}(\operatorname{grad}p)\cdot d\boldsymbol{r}+\frac{1}{2}\oint_C d\boldsymbol{q}^2.$$

此式右边第二項显然为零，若 p 是 ρ 的单值函数时，則第一項也变为零。在等熵流动中这个关系是滿足的，所以有 $\frac{D\Gamma}{Dt}=0$ 成立。于是在不可压縮流体力学里成立的 Kelvin 定理，又可以推广到忽略粘性和热傳导的可压縮流体的运动中。当物体在静止着的这样

的流体中运动时，以及在无穷远存在着均匀流动的情形时，由于运动最初的环量为零，所以在流体的全部区域里恒有 $\Gamma=0$，又由(3.2)可以推知 $\omega=0$。这样的流动叫做无旋流动 (irrotational flow)。若不能略去流体的粘性及热傳导，这时 Kelvin 定理就不能成立。这样的例子在本书第 2 章有激波的情形中将会遇到。

在无旋流动时有 $\omega=0$，所以由(3.1)的定义，成立

$$\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}=0. \tag{3.3}$$

这个关系式指出，在无旋流动时存在着依下面的式子所定义的速度势 Φ:

$$u=\frac{\partial \Phi}{\partial x},\quad v=\frac{\partial \Phi}{\partial y},\quad w=\frac{\partial \Phi}{\partial z}. \tag{3.4}$$

在这个意义上，无旋流动又叫做势流。

利用无旋条件改写基本方程。为方便起見，将坐标 x, y, z 改写为 x_i $(i=1, 2, 3)$，u, v, w 改写为 u_i $(i=1, 2, 3)$，且在同一項內含有两个相同标数时，就表示关于該标数自 1 到 3 作总和[1]。

利用(3.3)可将运动方程(1.4)的左边写为

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial (u_j u_j)}{\partial x_i}$$
$$=\frac{\partial u_i}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial q^2}{\partial x_i},$$

于是运动方程变为

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}+\frac{1}{2}q^2\right)=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i},$$

积分一次，得到

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}+\frac{1}{2}q^2+\int\frac{dp}{\rho}=F(t). \tag{3.5}$$

---

[1] 这就是所謂 Einstein 总和規約。——譯者注

方程(3.5)相当于不可压縮流体力学中的 Bernoulli 方程。左边第三項的积分可以用(1.6)来作出。

其次,我們来推导关于 Φ 的微分方程。将(1.4)左边乘以 u_i,且导入声速 $a^2=\dfrac{dp}{d\rho}$, 则

$$\frac{1}{2}\frac{\partial(u_iu_i)}{\partial t}+u_iu_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=-\frac{a^2}{\rho}u_i\frac{\partial\rho}{\partial x_i},$$

利用(1.3)改写右边,得到

$$\frac{1}{2}\frac{\partial(u_iu_i)}{\partial t}+u_iu_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=a^2\frac{\partial u_i}{\partial x_i}+\frac{a^2}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t}.$$

在(3.5)里把 $F(t)$ 看作包含在 Φ 之中,将它对于 t 求导数,则有

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial(u_iu_i)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{dp}{\rho}=0,$$

这里有 $\dfrac{\partial}{\partial t}\displaystyle\int\frac{dp}{\rho}=\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{a^2}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t}dt=\frac{a^2}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t}$, 所以

$$\frac{a^2}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial(u_iu_i)}{\partial t}\right).$$

将此式代入前式消去 ρ, 再导入 Φ, 就可以得到微分方程

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i^2}=\frac{1}{a^2}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i\partial x_j}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}+2\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i\partial t}\right]^{❶}. \quad (3.6)$$

(3.6)就是 Φ 的微分方程。不可压縮流动和 $a\to\infty$ 时的情形相当,此时右边消失,Φ 的微分方程变为 Laplace 方程。在 Laplace 方程中不含有对于 t 的导数,所以在不可压縮流动中不論是定常还是不定常的情形,Φ 的微分方程总是一样的。然而在可压縮流动的情形,由(3.6)可知,两者所满足的微分方程是不同的,这是值得注意的。

特别在定常流动时,(3.6)变为

❶ 此式的左边也表示 $\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x_2^2}+\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x_3^2}$. ——校者注

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i\partial x_j}, \tag{3.7}$$

这里声速 a 由(3.5)可当作速度 q 的函数求出来。即由

$$\frac{q^2}{2}+\int\frac{dp}{\rho}=\text{常数}$$

利用(1.8)及 $a^2=\frac{dp}{d\rho}$ 作計算，可以得到

$$\frac{q^2}{2}+\frac{a^2}{\gamma-1}=\frac{a_0^2}{\gamma-1}=\frac{U^2}{2}+\frac{a_\infty^2}{\gamma-1}, \tag{3.8}$$

这里 a_0 是 $q=0$ 的点的声速，U 及 a_∞ 各为无穷远的均匀流动的速度及声速。由(3.8)可知 a 是 q 的函数。

(3.7)是复杂的非綫性二阶偏微分方程。为簡单起見，我們只考虑二維流动。于是(3.7)变为

$$\left(1-\frac{u^2}{a^2}\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-2\frac{uv}{a^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}+\left(1-\frac{v^2}{a^2}\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=0. \tag{3.9}$$

具有两个独立变量的二阶偏微分方程的数学性质，是由其二阶项系数所作的判别式的正負来定的。若令(3.9)的判别式为 D，則有

$$D=\left(\frac{uv}{a^2}\right)^2-\left(1-\frac{u^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{v^2}{a^2}\right)=\frac{q^2}{a^2}-1.$$

于是

$$\frac{q}{a}<1\text{ 时,}\quad D<0;$$

$$\frac{q}{a}=1\text{ 时,}\quad D=0;$$

$$\frac{q}{a}>1\text{ 时,}\quad D>0.$$

当 $D<0$ 时，二阶偏微分方程叫做椭圓型的，$D=0$ 时叫做抛物型的，$D>0$ 时叫做双曲型的。另一方面，$\frac{q}{a}$ 是流速与声速之比，通常叫做 Mach 数。Mach 数小于1时叫做亚声速，大于1时叫做超声速。上述結果表示，当流动状态是亚声速时，其基本方程(3.9)

是椭圓型的，而当流动是超声速时，其基本方程是双曲型的。正如在偏微分方程理論中早已詳細研究过的，椭圓型微分方程的問題，是在包圍着区域的閉边界上給出函数或其法向微商的值，而求区域里的解 (Dirichlet 問題❶)。作为不可压縮流体力学的基础的 Laplace 方程就是这一类型方程的典型例子。于是不可压縮流动的性质，例如在孤立奇点以外不再有間断存在，或者扰动在全区域所有方向上傳播等等，在亚声速流动里也都能定性地成立。另一方面，双曲型微分方程的典型的例子是波动方程，在包圍着区域的一部分边界上給出函数値及法向微商的值时可以决定其解 (Cauchy 問題❷)。于是在椭圓型时处理边值問題，在双曲型时处理初值問題，两者的解的性质根本不同。在双曲型时，扰动所及的范圍仅限于全区域的一部分，而且具有在某些特定曲綫或曲面上一阶以上导数可以有間断的特性。于是对于超声速流动，由不可压縮流动或亚声速流动所作的类推是不能成立的。即使在三維定常流动的情形，其微分方程在亚声速情形也是椭圓型的，在超声速情形也是双曲型的，在其各个区域里的流动特性和二維的情形是一样的。

---

❶ 应添上"和 Neuman 問題"。——校者注

❷ 这里对双曲型方程的 Cauchy 問題的提法是很不确切的。同时在力学中所遇到的，通常也有其他的边界問題，可参閱谷超豪等編的《数学物理方程》，第二版，上海科学技术出版社出版。——校者注

第2章 激波理論

§4 不定常一維流动和激波的发生

在§2里曾說过静止气体里所发生的微小扰动，以常速度a(声速)傳播。在这里将处理大振幅扰动的傳播問題。若就一維运动討論时，由(1.3)和(1.4)基本方程可以写成如下的形式:

$$\rho_t + u\rho_x + \rho u_x = 0 \tag{4.1}$$

$$u_t + uu_x = -\left(\frac{1}{\rho}\right)\left(\frac{dp}{d\rho}\right)\rho_x, \tag{4.2}$$

这里的标数x及t表示这些量关于x及t的导数，且p及ρ間有关系(1.8)成立。

要求出这些方程的一般解是非常困难的，所以在此不仅假定p是ρ的单值函数，而且还假定u也是这样的。将(4.1)变形就得

$$(d\rho/du)(u_t + uu_x) = -\rho u_x,$$

将此式代入(4.2)而整理之，便得到下列式子:

$$du = \pm\sqrt{(dp/d\rho)}\,(d\rho/\rho).$$

今若設 $a = \sqrt{(dp/d\rho)}$，則

$$d\rho/\rho = \pm du/a. \tag{4.3}$$

利用(1.8)求a与ρ的关系，得到

$$a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \sqrt{\gamma\frac{p_0}{\rho_0}}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{2}} = a_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{2}}, \tag{4.4}$$

这里标数0表示静止气体中的值。将(4.4)代入(4.3)得

$$\pm u = \frac{a_0}{\rho_0^{\frac{\gamma-1}{2}}}\int_{\rho_0}^{\rho}\rho^{\frac{\gamma-1}{2}-1}d\rho = \frac{2a_0}{\gamma-1}\left[\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{2}} - 1\right], \tag{4.5}$$

或者利用(4.4)，得