多元函数

〔美〕W·弗列明 著

庄亚栋 译

上册

人民教育出版社

多 元 函 数

上 册

〔美〕W. 弗列明 著
庄亚栋 译

人 民 教 育 出 版 社

本书系统地阐述多元函数的微积分学，包括高等微积分的传统课题，但在几个重要方面处理与传统不同：向量概念贯穿始终，保持 n 维欧氏空间及其对偶空间的区别，介绍了勒贝格积分的要义；代替传统的 E^3 内的向量分析介绍了外代数及外微分形式的微积分。可作为数学专业深入学习微积分的参考书。

多 元 函 数

上 册

〔美〕W. 弗列明 著

庄亚栋 译

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 9.375 字数 225,000

1981年4月第1版 1982年5月第1次印刷

印数 00,001—14,000

书号 13012·0598 定价 0.83 元

序

本书的目的是系统地阐述多元函数的微积分学. 它包括了高等微积分的传统课题: 极大与极小, 链导法则, 隐函数定理, 重积分, 散度定理, 斯托克斯定理等等. 但在几个重要方面, 本书的处理与传统不同: 向量概念贯穿始终, 并且保持了 n 维欧几里得空间 E^n 及其对偶空间之间的区别; 包括了勒贝格积分的要义; 代替传统的 E^3 内的向量分析, 我们介绍了外代数及外微分形式的微积分, 从而, 向量分析公式就成了微分形式及 E^n 内流形上的积分公式的特例.

本书适用作高年级大学生的一年课程. 只要去掉某些章节, 也可以在它基础上形成一学期的课程. 例如, 如果学生已经熟知偏导数与 E^n 的初等拓扑, 那么第 4, 5, 7, 8 章的基本部分就可以在一学期内学完. 我们假定读者已经具备线性代数方面的一些知识. 不过, 在本书里也已经复习了线性代数方面的一些必要的结果(有时是不加证明的).

这一版与第一版相比有了不少变化, 其中有许多是受到课堂教学经验的启发. 关于初等拓扑的第二章是新增加的. 在第六章和第八章里还增加了一些物理应用——对热力学与古典力学的应用. 对两个主要定理(隐函数定理和散度定理), 给了与第一版不同的证明, 比起原来的也许要容易些.

作者对于给本书以宝贵建议的布朗大学的许多同事和学生深表感激, 特别感谢准备本版时给以出色帮助的 Hildegarde

Kneisel, Scott Shenker 和 Joseph Silvermen.

Wendell H. Fleming

1976 年 6 月

目　录

第一章　欧几里得空间

这本书是讲多元函数微积分的. 为此, 首先需要知道 n 维欧几里得空间的一些基本性质, 这里的 n 是任意有限数. 在这开始的一章, 我们简短地复习一下实数, 向量代数基础以及 n 维欧几里得空间的几何. 在这一章的后面引进了邻域, 开集, 闭集等概念, 它们是研究 n 维空间的所谓拓扑性质的基础.

格式

"定理" 这个词, 只用于作者认为是最重要的结果. 称为 "命题" 的, 是程度或价值稍次一些的结果. 符号□表示定理或命题证明结束. 有时, 证明部分留作读者课外练习. 标有*号的各节可以略去而不会破坏本书的体系. 在书末给出了参考书目.

我们假定读者已经熟悉集合论的最初等的内容. 符号

$$\in,\ \notin,\ \cup,\ \cap,\ -,\ \subset$$

分别代表是…的元素, 不是…的元素, 并, 交, 差, 含于. 通常用大写斜体字母表示集. 要描述一个集, 可以列出它的元素, 或者用说明其特征的某个性质. 例如, $\{2, 5, 7\}$ 是元素为三个数 2, 5, 7 的集. 如果 S 是集, π 是 S 的元素所具有的性质, 则 $\{p\in S:\pi\}$ 表示具有性质 π 的所有 $p\in S$ 之集. 例如, 若 $Z=\{1, 2, \cdots\}$ 是自然数集, 则 $S=\{x\in Z:$ 对某个 $y\in Z$ 有 $x=2y-1\}$ 是奇数集. 集 $\{x\in Z:x^2=3\}$ 是空集, $\{x\in Z:x(x-1)=x^2-x\}$ 是整个 Z.

当从上下文看, 所指的集 S 是明显的时, 我们简写为 $\{p:\pi\}$.

1.1　实　数　系

尽管微积分的很大一部分是受到几何与物理问题的启发, 它

的基础仍然建立在数的概念上. 因而,对微积分进行完整的处理应该从研究实数开始. 实数系满足一些算术方面的与次序方面的公理,它们表达了数的性质,这些性质是大家已经从初等数学里熟悉了的.

我们把这些性质列为公理 I, II.

公理 I

(a) 任两实数 x, y 有和 $x+y$ 与积 xy, 它们也是实数. 其次,对任意 x, y, z, 成立着

交换律 $x+y=y+x$, $xy=yx$,

结合律 $x+(y+z)=(x+y)+z$, $x(yz)=(xy)z$,

分配律 $x(y+z)=xy+xz$.

(b) 存在两个(不同的)实数 0, 1, 它们分别是加法与乘法的单位元: 对任意 x,

$$x+0=x,\ x1=x.$$

(c) 每个实数 x 有一关于加法的逆元 $-x$, 并且, 当 $x\neq 0$ 时有一关于乘法的逆元 x^{-1}:

$$x+(-x)=0,\ xx^{-1}=1.$$

公理 II 存在实数之间的关系 $<$, 满足:

(a) 对每一对实数 x, y, 下列关系式恰好有一个成立: $x<y$, $x=y$, $y<x$.

(b) $w<x$ 与 $x<y$ 蕴含 $w<y$ (传递律).

(c) 对任何 z, $x<y$ 蕴含 $x+z<y+z$.

(d) $0<z$ 时, $x<y$ 蕴含 $xz<yz$.

从公理 I, II 可以得到全部通常的算术定律. 在代数里,具有满足公理 I 所列性质的两种运算 (通常叫加法与乘法) 的集叫域. 如果某域有满足公理 II 的关系 $<$, 则称之为有序域.

实数形成有序域. 但有序域并非只是实数域. 例如, 有理数

也形成有序域. 我们回想一下, x 为有理数是指 $x=p/q$, 其中 p, q 是整数, $q\neq 0$. 这样, 还必需有另一个公理来表示实数系的特征. 这个公理可以用好几种方式引入. 其中最简单的也许是下面用最小上界叙述的公理 III.

在 2.3 节, 我们要讲几个与公理 III 等价的其它公理. 应该提醒读者, 公理 III 要比公理 I, II 难以捉摸一些, 对它的含义的理解只会渐渐地变得清楚起来. 但这个公理是微积分里某些最重要的定理的基石.

设 S 是非空实数集. 若存在数 c, 使对所有 $x\in S$ 有 $x\leqslant c$, 则称 c 为 S 的上界. 若 c 是 S 的上界, $b\geqslant c$, 则 b 也是 S 的上界.

公理 III 任何有上界的实数集有最小上界.

S 的最小上界记为 $\sup S$. 如果 S 没有上界, 则规定 $\sup S=+\infty$.

若对所有 $x\in S$ 有 $d\leqslant x$, 则称 d 为 S 的下界. 若 S 有下界, 则 S 有最大下界 (习题 2). S 的最大下界记为 $\inf S$. 若 S 没有下界, 则规定 $\inf S=-\infty$.

例 1 设 $S=\{1, 2, 3, \cdots\}$ 是正整数集, 则 $\sup S=+\infty$, $\inf S=1$.

例 2 设 a, b 是实数, $a<b$. 集

$$[a, b]=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}, (a, b)=\{x: a<x<b\}$$

$$[a, b)=\{x: a\leqslant x<b\}, (a, b]=\{x: a<x\leqslant b\}$$

都叫做以 a, b 为端点的有限区间. 其中第一个叫闭区间, 第二个叫开区间, 后两个叫半开区间. 不管哪种情形, b 都是最小上界, a 都是最大下界.

同样,

$$[a, \infty)=\{x: x\geqslant a\}, (a, \infty)=\{x: x>a\}$$

分别叫闭与开的半无限区间, 并且以 a 为最大下界. 相应地, 区间

$(-\infty, b]$, $(-\infty, b)$以 b 为最小上界.

设 S 为有上界的集. 例 2 说明数 $\sup S$ 不一定属于 S. 如果 $\sup S$ 成为 S 的元素, 那么它是 S 的最大元素, 这时写 "$\max S$" 代替 "$\sup S$". 类似地, 若 S 有下界且 $\inf S$ 是 S 的元素, 则把它写作 "$\min S$".

例 3 设 $S=\{x: x^2<2,\quad x \text{ 是有理数}\}$, 则 $\sqrt{2}=\sup S$, $-\sqrt{2}=\inf S$. 由于$\sqrt{2}$不是有理数, 这个例子说明: 如果以有理数系代替实数系, 最小上界公理不成立.

例 4 设 $S=\{\sin x: x \in[-\pi, \pi]\}$, 则 $-1=\min S$, $1=\max S$.

实数系也满足阿基米德性质. 这是指: 对任意 $\varepsilon>0$, $x>0$, 存在正整数 m, 使 $x<m\varepsilon$. 为证明这一点, 设不是这样, 即存在正数 ε, x, 使对每个 $m=1, 2, \cdots$ 有 $m\varepsilon \leqslant x$. 于是 x 是集 $S=\{\varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon, \cdots\}$ 的上界. 设 $c=\sup S$, 则 $(m+1)\varepsilon \leqslant c$, $m\varepsilon \leqslant c-\varepsilon\,(m=1, 2, \cdots)$. 因此 $c-\varepsilon$ 是 S 的比 $\sup S$ 小的上界, 矛盾. 这就证明了阿基米德性质.

我们不打算证明确实存在着满足公理 I, II, III 的系统. 有两种著名的方法从有理数出发构造实数系. 一种是戴特金的分割方法, 另一种是康托儿的柯西列方法.

公理 I, II, III 确定了实数系的特征; 换句话说, 任意两个满足这三个公理的系统本质上是相同的. 用代数语言更精确地说, 就是: 满足公理 III 的任意两个有序域同构.

这些事实的证明可参看 Birkhoff 与 McLane 的书 [2, 第 III 章].

习　　题

1. 求下列各集的最小上界 $\sup S$ 与最大下界 $\inf S$:

(a) $\{x:x^2-3x+2<0\}$.

(b) $\{x:x^3+x^2-2x\leqslant 2\}$.

(c) $\{\sin x+\cos x:x\in[0,\ \pi]\}$.

(d) $\{x\exp x:x<0\}$. [注: exp 表示指数函数; 即 $\exp x=e^x$, e 是自然对数的底.]

试说明各个 $\sup S$ 与 $\inf S$ 是否 S 的元素?

2. 设 $T=\{x:-x\in S\}$. 证明 $-\sup T=\inf S$.

3. 设 x, y 是实数, $x<y$. 证明: 存在有理数 z, 使 $x<z<y$. [提示: 由阿基米德性质, 存在正整数 q, 使 $q^{-1}<y-x$. 设 $z=p/q$, 其中 p 是满足 $qx<p$ 的最小正整数.]

1.2 欧几里得空间 E^n

在这本书里, 以 E^1 表示实数系. 现在让我们来定义空间 E^n, 它的元素是 n 元实数组, 叫作向量.

纯量与向量

所谓纯量, 我们是指实数. 在初等数学里, 向量被描述为既有方向又有长度的量. 用图表示向量, 是画一支从已知点 **0** 出发的箭. 箭头处的点指定该向量. 因而我们可以把这个点就说成是向量(以后也就这么说). 这样, 在二维时, 向量刚好就是平面 E^2 的点 $(x,\ y)$. E^2 的向量是按平行四边形法则相加的, 这个法则归结为把相应的分量相加:

$$(x+y)+(u,\ v)=(x+u,\ y+v).$$

$(x,\ y)$与纯量 c 的积是向量$(cx,\ cy)$. 零向量是$(0,\ 0)$.

记住这一些, 让我们对任意正整数 n 定义空间 E^n. E^n 的元素是 n 元实数组$(x^1,\ \cdots,\ x^n)$. 为简短起见, 我们把 $(x^1,\ \cdots,\ x^n)$ 写作 $\mathbf{x}$. 符号 $\mathbf{x}\in E^n$ 指"$\mathbf{x}$ 是 E^n 的元素". E^n 的元素叫向量, 也叫点, 随上下文来看哪一个更合文意而定. E^n 内的加法与纯量乘法定义如下: 若

$$\mathbf{x}=(x^1,\ \cdots,\ x^n),\ \mathbf{y}=(y^1,\ \cdots,\ y^n)$$

是 E^n 的两个元素，则

$$\mathbf{x}+\mathbf{y}=(x^1+y^1,\ \cdots,\ x^n+y^n).$$

若 $\mathbf{x}\in E^n$，c 是纯量，则

$$c\mathbf{x}=(cx^1,\ \cdots,\ cx^n).$$

E^n 的零元素是

$$\mathbf{0}=(0,\ \cdots,\ 0).$$

关于这些定义，E^n 满足向量空间的公理(附录 A.1). 我们只把 E^n 的元素叫"向量"，而不把满足这些公理的任意空间的元素叫向量.

不要把 x 的上标与 x 的幂混淆起来. 例如，$(x^i)^2$ 表示 n 元数组 $(x^1,\ \cdots,\ x^n)$ 的第 i 个元 x^i 的平方.

当 $n=1$ 时，我们把一元数组 $\mathbf{x}=(x)$ 与纯量 x 等同起来. 这时的加法与纯量乘法就是普通的实数加法与乘法. 在 $n=2$ 或 3 时，正如初等解析几何里大家所做的一样，我们也常把 $(x^1,\ x^2)$ 或 $(x^1,\ x^2,\ x^3)$ 写作 $(x,\ y)$ 或 $(x,\ y,\ z)$. 实际上，本书的全部定理都是对任意维数 n 叙述与证明的. 不过，在例题及习题里，常常出现 $n=2,\ 3$ 这样一些特殊情形.

向量加法及向量与纯量的乘法这两个概念确定了 E^n 的向量空间结构，但要定义距离与角度，这就不够了. 距离与角度是通过在 E^n 内引进内积而定义的. 内积是对每一对向量 $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ 指定一个纯量，并且必需满足列在本节习题 2 内的四条性质. 我们所用的内积是欧几里得内积，记为·：

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=\sum_{i=1}^{n}x^iy^i.$$

有这个内积的向量空间 E^n 叫 n 维欧几里得空间. 在 2.11 节将考虑 E^n 内的其它内积.

向量 $\mathbf{x}$ 的欧几里得范数(或长度)是

$$|\mathbf{x}|=(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x})^{1/2}.$$

除 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 外,它是正的,并且满足下面两个重要不等式:对任何 $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}\in E^n$,

(1.1) $$|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}|\leqslant|\mathbf{x}||\mathbf{y}| \quad (\text{柯西不等式}),$$

(1.2) $$|\mathbf{x}+\mathbf{y}|\leqslant|\mathbf{x}|+|\mathbf{y}| \quad (\text{三角不等式}).$$

(1.1)之证 若 $\mathbf{y}=\mathbf{0}$, 则 (1.1) 两端都是 $\mathbf{0}$. 因而设 $\mathbf{y}\neq\mathbf{0}$. 对任意纯量 t, 因为内积满足结合律与分配律[习题 2(a),(b),(c)],故

$$(\mathbf{x}+t\mathbf{y})\cdot(\mathbf{x}+t\mathbf{y})=\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}+2t\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}+t^2\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}.$$

左边是 $|\mathbf{x}+t\mathbf{y}|^2$, 而 $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}=|\mathbf{x}|^2$, $\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}=|\mathbf{y}|^2$. 右边是 t 的二次式,当

$$t=t_0=-\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}}$$

时有最小值. 以此式代 t, 得

$$0\leqslant|\mathbf{x}+t_0\mathbf{y}|^2=|\mathbf{x}|^2-\frac{|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}|^2}{|\mathbf{y}|^2},$$

或

$$|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}|^2\leqslant|\mathbf{x}|^2|\mathbf{y}|^2.$$

此式与柯西不等式等价. □

从上述证明可见,柯西不等式内的等式等价于 $|\mathbf{x}+t_0\mathbf{y}|=0$, 即 $\mathbf{x}+t_0\mathbf{y}=\mathbf{0}$. 这样, $\mathbf{y}\neq\mathbf{0}$ 时 $|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}|=|\mathbf{x}||\mathbf{y}|$ 当且仅当 $\mathbf{x}$ 是 $\mathbf{y}$ 的纯量倍. 若 $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=|\mathbf{x}||\mathbf{y}|$, 则 $\mathbf{x}$ 是 $\mathbf{y}$ 的非负纯量倍(反之亦然).

(1.2)之证 如上写出

$$(\mathbf{x}+\mathbf{y})\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}+2\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}+\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}.$$

从柯西不等式,

$$|\mathbf{x}+\mathbf{y}|^2\leqslant|\mathbf{x}|^2+2|\mathbf{x}||\mathbf{y}|+|\mathbf{y}|^2,$$

或 $$|\mathbf{x}+\mathbf{y}|^2\leqslant(|\mathbf{x}|+|\mathbf{y}|)^2.$$
此式等价于三角不等式. □

若 $\mathbf{y}\neq\mathbf{0}$, 则当且仅当 $\mathbf{x}$ 是 $\mathbf{y}$ 的非负纯量倍时(1.2)内的等式成立.

利用 $|c\mathbf{x}|=|c||\mathbf{x}|$ 及关于 m 的数学归纳法, 易证三角不等式的下列推广形式: 对任意纯量 $c^1, \cdots, c^m$ 及向量 $\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_m$,

(1.3) $$\left|\sum_{j=1}^{m} c^j\mathbf{x}_j\right|\leqslant\sum_{j=1}^{m}|c^j||\mathbf{x}_j|.$$

我们回想起(附录 A.1), $\sum_j c^j\mathbf{x}_j$ 称为 $\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_m$ 的线性组合.

$\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{y}$ 之间的欧几里得距离是 $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$. 若 $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ 是向量, 则

$$\mathbf{x}-\mathbf{z}=(\mathbf{x}-\mathbf{y})+(\mathbf{y}-\mathbf{z}).$$

对 $\mathbf{x}-\mathbf{y}$ 及 $\mathbf{y}-\mathbf{z}$ 应用(1.2)有

(1.4) $$|\mathbf{x}-\mathbf{z}|\leqslant|\mathbf{x}-\mathbf{y}|+|\mathbf{y}-\mathbf{z}|.$$

这说明"三角不等式"这个名字是合理的(见图 1.1)。

若 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ 是非零向量, $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{y}$ 之间的夹角 θ 由

(1.5) $$\cos\theta=\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{|\mathbf{x}||\mathbf{y}|}, \quad 0\leqslant\theta\leqslant\pi$$

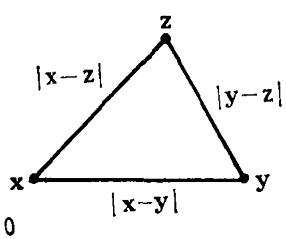

图 1.1

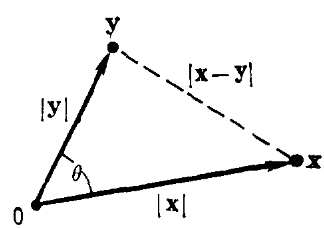

图 1.2

确定. 在维数 $n=2, 3$ 时, 这个公式与初等解析几何里的是一样的. 当 $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=0$ 时, 换句话说, θ 为直角时, 称向量 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{y}$ 正交. 我们有

$$|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2=|\mathbf{x}|^2+|\mathbf{y}|^2-2\mathbf{x}\cdot\mathbf{y},$$

或 $$|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2=|\mathbf{x}|^2+|\mathbf{y}|^2-2|\mathbf{x}||\mathbf{y}|\cos\theta.$$

这就是三角学里的余弦定律(图 1.2).

正规正交基

E^n 是 n 维向量空间，任何一个有 n 个元素的线性无关向量集 $\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ 都是它的基.

若 $\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ 是 E^n 的基，且 $\mathbf{v}_i\cdot\mathbf{v}_j=\delta_{ij}$, 其中

$$\delta_{ij}=\begin{cases}0 & \text{若 } i\neq j,\\ 1 & \text{若 } i=j,\end{cases}\quad i,\ j=1,\ \cdots,\ n,$$

则称 $\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ 为 E^n 的正规正交基. 符号 δ_{ij} 是数学家克隆内克首先引进的，因而叫作克隆内克 δ 符号. 单位坐标向量

$$\mathbf{e}_1=(1,\ 0,\ \cdots,\ 0),$$
$$\mathbf{e}_2=(0,\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 0),$$
$$\vdots$$
$$\mathbf{e}_n=(0,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ 1)$$

形成 E^n 的标准正规正交基. 对各个 $\mathbf{x}\in E^n$ 有

$$\mathbf{x}=(x^1,\ \cdots,\ x^n)=\sum_{i=1}^{n}x^i\mathbf{e}_i.$$

例如 $(2,\ -1,\ 3)=2\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2+3\mathbf{e}_3$.

若 $\mathbf{v}$ 是任一单位向量($|\mathbf{v}|=1$), 则 $\mathbf{x}\cdot\mathbf{v}$ 叫 $\mathbf{x}$ 关于 $\mathbf{v}$ 的分量. 因为 $\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}_i=x^i$, 故 $\mathbf{x}$ 关于标准正规正交基向量 $\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n$ 的分量是 $x^1, \cdots, x^n$. 如果 $\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ 是 E^n 的任一正规正交基，则 $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$ 是相互正交的单位向量. 每个 $\mathbf{x}\in E^n$ 可唯一地表示为线性组合

(1.6) $$\mathbf{x}=c^1\mathbf{v}_1+\cdots+c^n\mathbf{v}_n,$$

两边用 $\mathbf{v}_i$ 取内积，由公式 $\mathbf{v}_i\cdot\mathbf{v}_j=\delta_{ij}$ 得

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{v}_i=c^i.$$

这样，(1.6)内的系数 c^i 正是 $\mathbf{x}$ 关于这些正规正交基向量的分量.

习　　题

1．设 $n=4$，　$\mathbf{x}=\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2+2\mathbf{e}_4=(1,\ -1,\ 0,\ 2)$，　$\mathbf{y}=3\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_4=(3,\ -1,\ 1,\ 1)$. 求 $\mathbf{x}+\mathbf{y}$，$\mathbf{x}-\mathbf{y}$，$|\mathbf{x}+\mathbf{y}|$，$|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$，$|\mathbf{x}|$，$|\mathbf{y}|$，$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$. 就这个例子验证(1.1)和(1.2).

2．证明 E^n 内的标准欧几里得内积有下列四个性质:

(a) $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=\mathbf{y}\cdot\mathbf{x}$.

(b) $(\mathbf{x}+\mathbf{y})\cdot\mathbf{z}=\mathbf{x}\cdot\mathbf{z}+\mathbf{y}\cdot\mathbf{z}$.

(c) $(c\mathbf{x})\cdot\mathbf{y}=c(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})$.

(d) $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}>0$，若 $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$.

3．用第 2 题证明

$$(\mathbf{w}+c\mathbf{x})\cdot(\mathbf{y}+d\mathbf{z})=\mathbf{w}\cdot\mathbf{y}+c\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}+d\mathbf{w}\cdot\mathbf{z}+cd\mathbf{x}\cdot\mathbf{z}.$$

4．对任一 $\mathbf{x}=(x^1,\ \cdots,\ x^n)$证明 $\sum_{i=1}^{n}|x^i|\leqslant\sqrt{n}\,|\mathbf{x}|$.［提示：先设 $x^i\geqslant 0$. 利用 $y^i=1$ 时的等式(1.1).］

5．证明 $2|\mathbf{x}|^2+2|\mathbf{y}|^2=|\mathbf{x}+\mathbf{y}|^2+|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2$. 对平行四边形，这个式子说明什么(见图 1.3)？

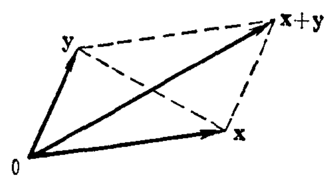

图　1.3

6．证明 $|\mathbf{x}+\mathbf{y}|\,|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\leqslant|\mathbf{x}|^2+|\mathbf{y}|^2$，其中等号当且仅当 $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=0$ 时成立. 对平行四边形，此式说明什么？

7．利用(1.2)与关于 m 的数学归纳法证明(1.3).

8．设 $n=4$，

$$\mathbf{v}_1=\frac{1}{5}(3\mathbf{e}_1+4\mathbf{e}_3),$$

$$\mathbf{v}_2=\frac{1}{5}(4\mathbf{e}_2-3\mathbf{e}_4),$$

$$\mathbf{v}_3=(\sqrt{2}/10)(-4\mathbf{e}_1+3\mathbf{e}_2+3\mathbf{e}_3+4\mathbf{e}_4).$$