

HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

离散数学习题题解

LISAN SHUXUE XITI TIJIE

洪帆 傅小青 编

华中理工大学出版社



0158-44

H145

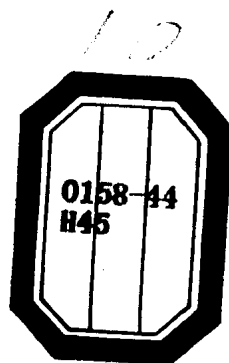
145564

离散数学习题题解

洪 帆 傅小青 编



华中理工大学出版社



图书在版编目(CIP)数据

离散数学习题题解/洪帆 傅小青 编
武汉:华中理工大学出版社, 1999年3月
ISBN 7-5609-1904-9

I. 离…

II. ①洪… ②傅…

III. 离散数学-解题

IV. O158-44

离散数学习题题解

洪帆 傅小青 编

责任编辑 李立鹏

*

华中理工大学出版社出版发行

(武昌喻家山 邮编:430074)

华中理工大学出版社照排室排版

新华书店湖北发行所经销

武汉市科普教育印刷厂印制

开本:850×1168 1/32 印张:10.125 字数:254 000

1999年3月第1版 1999年5月第2次印刷

印数:3 501-7 500

ISBN 7-5609-1904-9/O · 185

定价:11.80元

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行科调换)

前 言

本书是为配合高等院校本、专科“离散数学”课程有关教材的学习而编写的一本教学参考书。编者根据多年来在离散数学教学中所积累的经验和对学生学习中感到困难的问题,将其内容由浅入深地分为三个层次。对各章,在简短扼要地归纳其主要内容之后,首先逐一列出该章的基本知识点,对每一知识点均配有相应的实例来加以说明,以使读者正确地理解教材中的基本内容。在此基础上,针对学生对推理论证感到较为困难这一薄弱点,列举了大量的例题对读者进行逻辑推理的训练,与此同时,也使读者熟练地掌握该课程中的基本概念、基本定理、基本运算和方法。在每一部分之后,安排了一些较为复杂或有多种解题方法的题目,以帮助读者开拓思维、加深理解并学会运用所学的知识去解决各种问题。

全书共分十章,编入了 359 个例题,其内容侧重于课程的重点和难点。例题的解答比较详尽,编者希望它能对读者在掌握、熟悉基本概念、分析和解决问题的能力等方面有所帮助。希望读者对这些例题最好先自己进行思考,作出解答后再阅读书上的解答,这样体会深刻,收获更大。另外,读者可根据自己对离散数学课程学习掌握的情况,或采用由浅入深,循序渐进的学习方式,或直接进入第二个层次或第三个层次的学习。

本书第一章至第六章由洪帆编写,第七章至第十章由傅小青编写。对华中理工大学出版社的同志为本书的编辑出版所作的工作,在此表示衷心的感谢。

由于时间仓促,水平有限,书中错误与疏漏之处恳请读者不吝指正。

编 者

1998 年 10 月于武汉

0499/21

内 容 简 介

本书针对“离散数学”有关教材中集合论、代数系统、图论和数理逻辑四大部分的内容,分为十章进行编排。按照基本知识点、问答与论证、解题思路与方法三个层次,由浅入深地编入了 359 多个具有代表性的例题。解答详实,注重基本概念的理解,分析能力的培养和逻辑思维的训练。

本书可供高等院校计算机及有关专业本、专科师生作为离散数学课程的教学和学习参考书,也是离散数学自学者的好辅导教材。



目 录

第一部分 集合论

第一章 集合	(1)
1.1 内容提要	(1)
1.2 基本知识点	(2)
1.3 问答与论证	(14)
第二章 关系	(20)
2.1 内容提要	(20)
2.2 基本知识点	(21)
2.3 问答与论证	(40)
第三章 函数	(52)
3.1 内容提要	(52)
3.2 基本知识点	(54)
3.3 问答与论证	(68)
A. 解题思路与方法	(79)

第二部分 代数系统

第四章 代数系统	(96)
4.1 内容提要	(96)
4.2 基本知识点	(97)
4.3 问答与论证	(116)
第五章 群	(123)
5.1 内容提要	(123)
5.2 基本知识点	(124)
5.3 问答与论证	(142)
第六章 环和域	(155)
6.1 内容提要	(155)
6.2 基本知识点	(155)
6.3 问答与论证	(160)
第七章 格和布尔代数	(165)

7.1 内容提要.....	(165)
7.2 基本知识点.....	(166)
7.3 问答与论证.....	(179)
B. 解题思路与方法	(184)

第三部分 图论

第八章 图论	(201)
8.1 内容提要.....	(201)
8.2 基本知识点.....	(203)
8.3 问答与论证.....	(233)
C. 解题思路与方法	(241)

第四部分 数理逻辑

第九章 命题逻辑	(246)
9.1 内容提要.....	(246)
9.2 基本知识点.....	(247)
9.3 问答与论证.....	(269)
第十章 谓词逻辑	(276)
10.1 内容提要	(276)
10.2 基本知识点	(277)
10.3 问答与论证	(299)
D. 解题思路与方法	(309)
参考文献	(315)

第一部分 集合论

第一章 集 合

1.1 内容提要

1. 集合及有关概念、集合的表示法

- 集合、元素、集合的基数；
- 集合的两种表示方法：列举法和描述法；
- 两个特殊的集合：全集和空集；
- 子集、包含集和幂集；
- 分划和细分；
- 集合的最小集标准形式和最大集标准形式.

2. 集合间的关系

- 集合间的包含关系 $B \subseteq A$ ；
- 集合间的真包含关系 $B \subset A$ ；
- 集合间的相等关系 $A = B$ ；
- 集合间的互补关系 $B' = A$.

3. 集合的运算

- 集合的并运算 $A \cup B$ ；
- 集合的交运算 $A \cap B$ ；

- 集合的补运算: 相对补运算($B-A$)、绝对补运算($A' = U-A$), A' 简称为 A 的补集;

- 集合运算的定律.

4. 对集合间的关系和运算进行分析和论证的工具

- 文氏图 直观、形象, 可作为描述和分析的工具;

- 成员表 是根据运算的定义严格构造出来的, 可作为证明的工具.

1.2 基本知识点

1. 集合的列举法和描述法

列举法是用列出集合中所有元素的方法来表示集合, 描述法则是通过条件 P 来定义集合中元素的属性.

例 1-1 设全集是整数集 I , 试用列举法表示下列集合

(1) $A = \{x | x^2 - 16 = 0 \text{ 或 } x^4 = 1\}$;

(2) $B = \{x | x^2 - 10x - 24 < 0 \text{ 且 } -5 \leq x \leq 6\}$.

解 (1) 满足 $x^2 - 16 = 0$ 即 $x^2 = 16$ 的 x 有两个整数 $x_1 = 4$ 和 $x_2 = -4$. 满足 $x^4 = 1$ 的 x 也有两个整数 $x_3 = 1$ 和 $x_4 = -1$. 因此

$$A = \{4, -4, 1, -1\}.$$

(2) 令 $y = x^2 - 10x - 24 = (x - 5)^2 - 49$,

显然, 当 $x = -2$ 和 $x = 12$ 时, $y = 0$, 当 $x = 5$ 时, y 有极小值 -49 . 函数图象如图 1-1 所示. 因为 B 是全

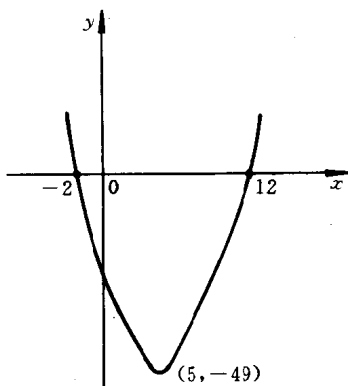


图 1-1

集合 I 的子集, 所以当

$$x = -1, 0, 1, 2, \dots, 11 \text{ 时, } y < 0.$$

但 x 的这些取值中, 只有 8 个数满足不等式 $-5 \leq x \leq 6$, 因此

$$B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

2. 属于关系和包含关系

“ $a \in A$ ”表示 a 是集合 A 的一个元素. “ $B \subseteq A$ ”表示 B 是 A 的一个子集, 它意味着集合 B 中的每一个元素也是集合 A 中的元素.

在“ $a \in A$ ”的关系中, 允许 a 是一个集合, 因此也可能有“ $B \in A$ ”的关系成立, 这表示集合 B 是集合 A 的元素.

例 1-2 设 $A = \{a, b, \{c\}, \{a\}, \{a, b\}\}$, 试指出下列论断是否正确.

- | | |
|-------------------------------|----------------------------------|
| (1) $a \in A$; | (8) $\{b\} \subseteq A$; |
| (2) $\{a\} \in A$; | (9) $\{a, b\} \in A$; |
| (3) $\{a\} \subseteq A$; | (10) $\{a, b\} \subseteq A$; |
| (4) $\emptyset \in A$; | (11) $c \in A$; |
| (5) $\emptyset \subseteq A$; | (12) $\{c\} \in A$; |
| (6) $b \in A$; | (13) $\{c\} \subseteq A$; |
| (7) $\{b\} \in A$; | (14) $\{a, b, c\} \subseteq A$. |

解 (1)、(2)、(3)、(5)、(6)、(8)、(9)、(10)、(12) 正确;

(4)、(7)、(11)、(13)、(14) 错误.

例 1-3 对于任意集合 A 、 B 和 C , 下述论断是否正确? 请说明理由.

- (1) 若 $A \in B, B \subseteq C$, 则 $A \in C$;
- (2) 若 $A \in B, B \subseteq C$, 则 $A \subseteq C$;
- (3) 若 $A \subseteq B, B \in C$, 则 $A \in C$;
- (4) 若 $A \subseteq B, B \in C$, 则 $A \subseteq C$.

解 (1) 正确.

因为 $B \subseteq C$, 所以集合 B 的每一个元素也是集合 C 的元素, 由 $A \in B$ 知 A 是 B 的一个元素, 因此 A 也是 C 的一个元素, 故 $A \in C$.

(2) 错误.

举反例如下: 设 $A = \{a\}$, $B = \{\{a\}, b\}$, $C = \{\{a\}, b, \{d\}\}$. 显然 $A \in B$, $B \subseteq C$, 但 $A \notin C$. 因为 $a \in A$, 但 $a \notin C$.

(3) 和 (4) 都是错误的.

举反例如下: 设 $A = \{a\}$, $B = \{a, b\}$, $C = \{\{a, b\}, d\}$. 显然 $A \subseteq B$, $B \in C$, 但 $A \notin C$. 因为集合 C 中没有元素 $\{a\}$. 又 $A \not\subseteq C$, 因为集合 A 中的元素 a 不是集合 C 的元素.

3. 子集和幂集

如果集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素, 则称 A 是 B 的子集. 记作 $A \subseteq B$. 按照这一定义, 每一集合 A 是 A 自己的子集, 有 $A \subseteq A$. 如果 A 是 B 的子集, 而 B 中至少有一个元素不属于 A , 则称 A 是 B 的真子集. 记作 $A \subset B$.

例 1-4 列出下列集合的全部子集

(1) $A = \{a, \{b\}\}$;

(2) $B = \{\emptyset\}$;

(3) $C = \emptyset$.

解 (1) 因为 $\emptyset$ 是任何集合的子集, 所以 $\emptyset$ 是 A 的子集. 由 A 中任意一个元素所组成的集合是 A 的子集, 所以 $\{a\}$ 和 $\{\{b\}\}$ 是 A 的子集. 由 A 中任意两个元素组成的集合是 A 的子集, 所以 $\{a, \{b\}\}$ 是 A 的子集, 即 A 自己是 A 的子集. 因为 A 中只有两个元素, 故 A 再没有其他的子集.

由上可知, A 有四个子集: $\emptyset$ 、 $\{a\}$ 、 $\{\{b\}\}$ 和 $\{a, \{b\}\}$.

(2) 与上同样的道理, $\emptyset$ 是 B 的子集. 此外由于 B 中仅有一个元素 $\emptyset$, 因此 B 仅有的另一个子集是 $\{\emptyset\}$, 即 B 自己.

由上可知, B 有两个子集: $\emptyset$ 和 $\{\emptyset\}$.

(3) $\emptyset$ 是任何集合的子集, 因此 $\emptyset$ 也是 $\emptyset$ 的子集, 即 $\emptyset$ 是 C 的子集. 因为 C 中没有元素, 所以 C 不可能有其它子集, 故 C 只有一个子集: $\emptyset$.

由真子集的定义, 对于任意集合 A , 除了 A 自身不是 A 的真子集外, 其它子集均是 A 的真子集. 因此

A 有三个真子集: $\emptyset$ 、 $\{a\}$ 和 $\{\{b\}\}$.

B 有一个真子集: $\emptyset$.

C 没有真子集.

集合 A 的幂集是以 A 的所有子集为元素组成的集合. 因此只要子集的概念清楚, 将 A 的所有子集列出来, 便可得到 A 的幂集. A 的幂集记作 2^A 或 $P(A)$.

例 1-5 求下列集合的幂集

(1) $A = \{a, \{b\}, \{a, b\}\}$;

(2) $B = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

解 (1) $2^A = \{\emptyset, \{a\}, \{\{b\}\}, \{\{a, b\}\}, \{a, \{b\}\}, \{a, \{a, b\}\}, \{\{b\}, \{a, b\}\}, \{a, \{b\}, \{a, b\}\}\}$;

(2) $2^B = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

由例 1-4 和例 1-5 可以看出, 当 A 是有限集, 元素个数为 n 时, A 的幂集也是有限集, 其元素个数为 2^n . 因此若用符号 $\#A$ 表示集合 A 的基数, 则 $\#(2^A) = 2^{\#A}$.

4. 集合间的包含关系和相等关系

若 A 是 B 的子集 (即若 $A \subseteq B$), 则称集合 B 包含集合 A . 这时 A 的每一个元素也是 B 的元素, 但 B 的元素不一定是 A 的元素. 如果 $A \subseteq B$ 与 $B \subseteq A$ 同时成立, 即如果 A 的每一个元素都是 B 的元素, B 的每一个元素也都是 A 的元素, 则 A 和 B 两个集合具有完全相同的元素, 这时称集合 A 与 B 相等. 记作 $A = B$. 因此若 $A = B$, 则 A 与 B 代表的是同一个集合.

例 1-6 设 $A = \{i \mid i = 2k, k \in N\}$; $B = \{i \mid i = 2^k, k \in N\}$; $C =$

$\{2, 4, 6, 8, \dots\}$, 试用符号“ $\subseteq$ ”、“ $\subset$ ”和“ $=$ ”恰当地连结这些集合. 这里 N 表示正整数集.

解 由集合 A 中元素的定义条件可知, $A = \{i \mid i \text{ 是正偶数}\}$, 所以 $A = C$. 由集合 B 中元素的定义条件, $B = \{2, 4, 8, 16, 32, \dots\}$ 是部分正偶数的集合, 所以 $B \subseteq A$. 因为 $6 \notin B, 10 \notin B, \dots$, 所以 B 是 A 的真子集, 因此又有 $B \subset A$. 于是也有 $B \subseteq C, B \subset C$.

5. 集合的运算及运算定律

集合的相对补运算也称为集合的差运算. 差集 $B - A$ 是由所有属于 B 而不属于 A 的元素组成.

例 1-7 设 $A = \{2, 3, \{2, 3\}, \emptyset\}$, 求下列集合

- (1) $A - \{2, 3\}$;
- (2) $\{\{2, 3\}\} - A$;
- (3) $A - \emptyset$;
- (4) $A - \{\emptyset\}$.

解 (1) $A - \{2, 3\} = \{\{2, 3\}, \emptyset\}$;

(2) $\{\{2, 3\}\} - A = \emptyset$;

(3) $A - \emptyset = A$;

(4) $A - \{\emptyset\} = \{2, 3, \{2, 3\}\}$.

集合的差运算可转化为集合的交运算和补运算来表达.

例 1-8 设 A, B 是任意两个集合, 试证明

$$A - B = A \cap B'. \quad (1-1)$$

分析 根据两集合相等的定义, 若能证明 $A - B \subseteq A \cap B'$ 且 $A \cap B' \subseteq A - B$, 则 $A - B = A \cap B'$ 便成立.

证 设 $u \in A - B$, 则 $u \in A$ 且 $u \notin B$, 即 $u \in A$ 且 $u \in B'$, 因此 $u \in A \cap B'$, 故 $A - B \subseteq A \cap B'$.

反之, 设 $u \in A \cap B'$, 则 $u \in A$ 且 $u \in B'$, 即 $u \in A$ 且 $u \notin B$, 由差集的定义 $u \in A - B$, 因此 $A \cap B' \subseteq A - B$.

由上证得 $A - B = A \cap B'$.

运用证明两个集合互相包含的方法,一般来说可以证明任何集合恒等式的成立,但这种方法较为繁琐.运用集合并、交、补运算的运算定律,可方便地证明集合恒等式.若集合表达式中出现形为 $A-B$ 的差集时,可利用(1-1)式先将运算“-”转化为运算“ $\cap$ ”和“ $'$ ”.

例 1-9 设 A, B, C 为任意集合,试证明

$$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C).$$

$$\begin{aligned} \text{证} \quad A \cap (B - C) &= A \cap (B \cap C') && (1-1) \text{ 式} \\ &= A \cap B \cap C', && \text{结合律} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{又 } (A \cap B) - (A \cap C) &= (A \cap B) \cap (A \cap C)' && (1-1) \text{ 式} \\ &= (A \cap B) \cap (A' \cup C') && \text{德摩根定律} \\ &= (A \cap B \cap A') \cup (A \cap B \cap C') && \text{分配律} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \emptyset \cup (A \cap B \cap C') \\ &\quad \text{交换律、结合律、互补律} \\ &= A \cap B \cap C', && \text{同一律} \end{aligned}$$

因此 $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$.

6. 文氏图与有限集的计数

文氏图用平面上图示的方法形象地描述全集 U 与其子集,以及全集 U 的子集与子集之间的关系.由于文氏图具有形象、直观的特点,因此利用文氏图可以方便地解决一些有关有限集的元素计数问题.

例 1-10 某学校举行运动会,有 100 米短跑、掷铅球和跳高三个项目.二年级 170 人,已知有 25 人三个项目都参加了,有 62 人至少参加了两个项目.若该年级参加比赛的总人次是 200 人次,试问有多少人没有参加任何项目?

解 (1) 用集合的概念描述上述问题.

设全集 U 为二年级 170 人的集合, A_1 为参加 100 米短跑的

学生集合, A_2 为参加掷铅球的学生集合, A_3 为参加跳高的学生集合.

(2) 用文氏图(图 1-2)表示各个集合.

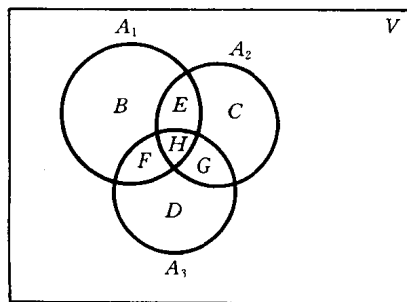


图 1-2

由题设条件和文氏图可知有关集合的基数

$$\#U = 170(\text{人})$$

$$\#H = \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 25(\text{人}),$$

$$\#(E \cup H \cup F \cup G) = 62(\text{人}).$$

(3) 计算

$$\begin{aligned} \#(E \cup F \cup G) &= \#(E \cup H \cup F \cup G) - \#H \\ &= 62 - 25 = 37(\text{人}), \end{aligned}$$

$$25 \times 3 = 75(\text{人次}),$$

$$37 \times 2 = 74(\text{人次}),$$

$$200 - (75 + 74) = 51(\text{人次}),$$

因此

$$\#B + \#C + \#D = 51(\text{人}),$$

于是 $\#((A_1 \cup A_2 \cup A_3)') = \#U - \#(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$

$$= 170 - (51 + 62)$$

$$= 57(\text{人}),$$

故该年级有 57 人没有参加任何项目.

7. 集合成员表

成员表是用表格的方式描述集合的并、交、补运算的定义。

表 1-1 中任一集合 S 所标记的列中, 0 表示全集中的元素 $u \notin A$, 1 表示 $u \in A$. 利用上述三个基本的成员表可以进而构造出全集 U 的其它子集的成员表.

表 1-1

(a) A' 的成员表

A	A'
0	1
1	0

(b) $A \cup B$ 的成员表

A	B	$A \cup B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

(c) $A \cap B$ 的成员表

A	B	$A \cap B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

例 1-11 试构造集合 $(A \cup B) \cap (B \cup C)'$ 和集合 $A \cap B'$ 的成员表, 通过其成员表判断这两个集合之间是否有相等关系或包含关系.

解 构造两个集合的成员表如表 1-2 所示.

表 1-2

A	B	C	$A \cup B$	$B \cup C$	$(B \cup C)'$	$(A \cup B) \cap (B \cup C)'$	B'	$A \cap B'$
0	0	0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	0	0	0	0

集合 $(A \cup B) \cap (B \cup C)'$ 所标记的列中, 仅在第五行为 1, 这意味着当元素 $u \in A, u \notin B$ 且 $u \notin C$ 时, $u \in (A \cup B) \cap (B \cup C)'$, 而在其它情形下, 元素 $u \notin (A \cup B) \cap (B \cup C)'$.

集合 $A \cap B'$ 所标记的列中, 第五行与第六行均为 1, 这意味着当元素 $u \in A, u \notin B$ 且 $u \notin C$ 时, $u \in A \cap B'$, 当元素 $u \in A, u \in C$ 但 $u \notin B$ 时, 也有 $u \in A \cap B'$.

由上可以看出, 当元素 $u \in (A \cup B) \cap (B \cup C)'$ 时, 也有 $u \in A \cap B'$, 但当 $u \in A \cap B'$ 时, 不一定有 $u \in (A \cup B) \cap (B \cup C)'$, 所以可以得出结论 $(A \cup B) \cap (B \cup C)' \subseteq A \cap B'$.

8. 分划和细分

集合 A 的分划是由 A 的某些非空子集组成的集合, 但这些非空子集必须满足以下两个条件: (1) 任意两个子集没有公共元素; (2) 这些子集的并集恰好等于集合 A .

直观地说, 所谓集合 A 的分划就是将集合 A 中的元素划分成几块, 使得 A 的每一个元素必须在某一块中, 也仅在一块中.

例 1-12 设 $A = \{2, 3, 5, 8, 9, 16, 22, 25, 27, 35\}$, 按照 A 中元素是奇数或偶数来区分, 可将 A 中元素分划为两块

$$B_1 = \{3, 5, 9, 25, 27, 35\};$$

$$B_2 = \{2, 8, 16, 22\}.$$

因此 $\Pi_1 = \{B_1, B_2\}$ 是集合 A 的一个分划.

按照 A 中元素能被 2 整除, 被 3 整除或被 5 整除来区分, 又可将 A 中元素分划为三块

$$A_2 = \{2, 8, 16, 22\};$$

$$A_3 = \{3, 9, 27\};$$

$$A_5 = \{5, 25, 35\}.$$

因此 $\Pi_2 = \{A_2, A_3, A_5\}$ 也是集合 A 的一个分划.

若按照 A 中元素能被 2 整除、被 3 整除或被 4 整除来区分,