固体力学中的有限元素法

译文集

（上集）

科学出版社

固体力学中的有限元素法

译文集

（上 集）

《固体力学中的有限元素法译文集》编译组 译

科学出版社
1975

内 容 简 介

有限元素法是随着电子计算机的发展，首先在固体力学领域中蓬勃发展起来的一种强有力的数值计算方法。

本译文集分上、下集，介绍有限元素法的发展动态、基本原理，以及它在三维弹性体、平板、薄壳、振动、稳定性和塑性力学等问题中的应用，并介绍有限元素法对电子计算机所提出的要求。

本译文集可供航空、造船、原子能、土木建筑和机器制造方面的工程技术人员、计算数学工作者及高等院校师生参考。

固体力学中的有限元素法

译文集

（上　集）

《固体力学中的有限元素法译文集》编译组　译

*

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1975年8月第一版　开本：787×1092　1/32

1975年8月第一次印刷　印张：11

印数：0001—7,090　字数：250,000

统一书号：13031·315

本社书号：486·13—2

定价：1.15元

前　　言

有限元素法是最近二十年来，随着电子计算机的发展，首先在固体力学领域中蓬勃发展起来的一种强有力的数值计算方法．为了使有限元素法能够在我国社会主义建设事业中发挥更广泛的作用，我们遵照毛主席“**洋为中用**”的教导，编译了这本文集，供广大工程技术人员和科研工作者参考．

有限元素法是在五十年代中期，由结构力学工作者为解决复杂的飞机强度计算问题而首先提出来的．

有限元素法是这样一种方法，它把连续介质分割成在有限个节点处连接起来的有限个小块(即元素)，以此代替原来的连续介质，然后建立元素组合体的支配方程，并求解．整个计算过程编成程序后，由计算机来完成．有限元素法的基础是能量原理．它采用矩阵表示法，使公式的表示十分简洁．

这个方法目前可用来计算固体力学中的大部分问题，如杆系结构、平板、薄壳、二维和三维固体等的静态应力、热应力、振动、稳定性，以及弹塑性、蠕变、粘弹性这些材料非线性问题和大挠度等几何非线性问题．不论结构的形状和支持条件如何复杂，不论材料性能和外载荷如何变化，有限元素法均一概适用．这是任何其它经典方法所不及的．

有限元素法已广泛应用于从航空、宇航直到土木建筑、机器制造、造船、原子能等各种工程技术领域．

随着电子计算机的大型高速化，有限元素法越来越发挥出它的威力．除结构分析的领域之外，有限元素法已经渗透到流体力学、热传导以及电磁学等领域，成为偏微分方程数值

解的有力手段.

从一定的意义上来说，有限元素法结构分析，实际上就是在电子计算机上的数值模拟实验. 用它可以逐渐代替一部分耗费资金的结构实物试验. 例如，据国内外资料报道，有限元素平面应力分析完全可以取代平面光弹性实验.

过去，对于象飞机、轮船这样的大型复杂结构，不得不采用许多简化假设，化为部件后分别计算. 部件之间载荷传递、刚度影响等很难处理. 计算的结果往往与实验不相符合. 有了有限元素法及大型高速计算机后，现在已经做到：利用编好的大型通用程序，只要向计算机输入原始数据，即能获得全机或整条轮船的应力分析和振动分析的结果，并能以图象显示出来. 这样，节省了大量人力，加快了研制周期，提高了应力分析的质量，改进了结构的安全可靠性.

在有限元素法的基础上，最优结构设计和计算机辅助设计的研究应用工作也迅速地发展了起来.

在有限元素法方面，正进行着大量的理论研究和应用工作，论文的数量以加速度增长，举行了频繁的国际会议和讨论会，并出版了许多教科书、专著和多种专门的国际杂志.

早在六十年代初，国内就开始介绍这一方法. 而在1965年，就编成了当时具有先进水平的大型结构部件应力分析程序，促进了多快好省地完成科研设计任务.

本文集选译了固体力学中的有限元素法方面的一些文章，介绍它的发展动态，基本原理以及它在三维弹性体、平板、薄壳、振动、稳定性和塑性力学方面的应用，并介绍有限元素法对于电子计算机提出的要求.

由于这方面论文的数量很大，涉及的面又广，方法本身发展很快，本文集显然不能反映全貌. 由于我们水平能力所限，定会存在不少错误和缺点，恳请读者批评指正.

在编译过程中，得到领导和许多同志的支持和帮助；有关院校的几位老师帮助我们解决了一些疑难问题，谨在此表示谢意。

译　者

目　录

有限元素法——从直觉到概括

O. C. Zienkiewicz

一、引 言

工程技术人员要有数字才能描述其设计过程．使人心烦的是往往有些问题虽然能够“正确地列出公式”，但方程繁复，用经典数学又只能得出比较浅显的解．这时候往往特地为此提出一些粗糙的模型，模型用过一次后就不用了．但是，在某些时候，从这种粗糙的方法却导致发现（或再发现）一些有效的基本方法．例如，从赫维赛德（Heaviside）的运算子方法一直到索思韦尔（Southwell）在有限差分方法实际运用方面的示范，都是这样．有限元素法现在也必须看成是属于这一类的．它在工程技术人员中确实很流行，后来应用数学家对它感到兴趣，促进了它的迅速发展，或至少是巩固了它的基础．

实际工作者都很熟悉离散型结构系统的处理方法，或者类似的水力学网络、电路网络等的处理方法．有许多计算机程序在这里是用得上的；事实上电子计算机出现以后，最早发展的一批程序中就有它们．常常想把一个连续统简化为离散的、等效的元素的组合体，这也许是一种朴素的，但实质上是物理的方法．比如，在弹性连续介质中，一开始总想用梁或杆的组合体来模拟其性质，而杆和梁是一般工程人员都很熟悉的标准构件．应该提到一些早期的著作，比如 1941 年雷尼柯夫（Hrenikoff）的 [1]，1943 年麦克亨利（McHenry）的 [2]

以及 1949 年纽马克 (Newmark) 的 [3]. 但是, 采用具有多重联结点的元素来直接逼近一个连续统, 首先应归功于 1956 年特纳 (Turner) 等人的 [4]、1960 年克拉夫的 [5] 和 1955年阿吉里斯 (Argyris) 的 [6]. 在这些文章中第一次采用了"有限元素"这个奇妙的名词, 但是基本性质的推导, 是从关于子区域中应力或位移分布的物理的推理得出的. 那时候, 计算机开始成为有效的工具, 这就很快使解决实际的复杂的弹性问题成为可能.

元素的刚度性质如何推导出来,在企图解决这个问题时,马上想到的方法之一是一个元素一个元素地假定位移模式,并用节点的位移表示出来,这样保持了连续性,而内力则由虚功得出. 显然,这个过程和对总势能作近似的极小化(类似于雷利—里茨 (Rayleigh—Ritz) 法) 是一致的[7]. 其实, 这种方法和以前的标准方法的主要差别在于分区连续场的确定, 这使得对不规则的边界也可以简单地拟合, 从而避免了显然的限制.

另外,这种分区确定法的第二个主要优点是明显的. 和在"标准"的里茨过程中不一样, 由最小化得出的方程形成了带状矩阵(或者至少是稀疏的矩阵), 它的解很容易用直接法或迭代法得出.

那个时期有两件事明确起来. 第一, 如果有限元素法可以如此简单地描写,那么它可能是已知的数学方法的一个"再发现"; 第二, 它的范围可以推广到其他要求将(二次)泛函极小化的情况. 关于第一点, 在回顾库兰特 (Courant) 的著作以及普拉格 (Prager) 和辛格 (Synge) 的著作后很快就得到了答案. 库兰特在 1943 年的著作[8]中用公式表达了三角形有限元素的实质, 而从普拉格和辛格类似的著作[9]中可引出"超圆"法[10,11].

关于第二点，有限元素法被监凯维奇(Zienkiewicz)[12]和其他人[13-16]迅速地推广到非结构的领域中，表明这种方法可用于流体力学、热传导、以及由准调和微分形式支配的其他问题.

再则，如果变分法可用有限元素法的表达方式，则(a)在分析中可以包括进除节点未知量以外的其他参数；(b)对同一个问题可以作出许多不同的表达方式.

卞学镄(Pian)[17]证明，在弹性力学中，可以引进无节点参数，而且实际上用了另外的标准方式来处理. 但是，为了保持所需要的元素间的连续性，总还要保留一些节点参数.

在弹性分析中，还证明了可采用不同的变分形式. 乌贝克(Veubeke)[18,19]表明，可采用平衡态应力分布以及采用余能作为所要极小化的泛函.(乌贝克和监凯维奇[20]推导出一种特别简单的方法，可用来求出这种平衡态场以及相应的对偶.)赫尔曼(Hermann)[21]首次成功地运用了赖斯纳(Riessner)泛函，而其他可能的杂交型表达法则由卞学镄详细讨论过[22]. 然而，指出这样一点也会是有益的，即在卞学镄导出这种复杂的杂交型泛函以前很久，早已引进了而且成功地运用了这种类型的元素，其根据仅仅是物理直觉[23,24].

其实，上面最后一点提醒本文作者注意到，即使在今天，虽然有些很成功的元素明显地没有适当的变分形式，却已知它是收敛的，而且给出极为精确的逼近值. 是否有限元素只能从变分形式中推导出来呢？ 将会证明，其它的可能性是存在的.

二、有限元素的一些数学问题

设要求在指定区域上极小化的一个二次泛函是 χ，这个泛函由未知函数$\{\phi\}$和它的一些导数的积分所定义. 如果$\{\phi\}$

是一个元素一个元素分区地由坐标、"形状"函数 $[N]$ 和(未知的)节点参数 $\{\bar{\phi}\}$ 所描述,则极小化的方程组的形式为[25]

$$\frac{\partial x}{\partial\{\bar{\phi}\}}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial\bar{\phi}_1}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial x}{\partial\bar{\phi}_n}\end{Bmatrix}=[K]\{\bar{\phi}\}+\{F\}=0. \tag{1}$$

对每一元素有

$$\{\phi\}=[N]\{\bar{\phi}\}^e, \tag{2}$$

每一元素的贡献 x^e 求得为

$$\frac{\partial\{x\}^e}{\partial\{\bar{\phi}\}^e}=[K^e]\{\bar{\phi}\}^e+\{F\}^e, \tag{3}$$

并且可应用网络拓扑集合的重要规则,即

$$[K_{ij}]=\sum_{e=1}^{m}[K_{ij}^e] \text{ 和 } \{F_i\}=\sum_{e=1}^{m}\{F_i^e\}. \tag{4}$$

不论这个泛函的物理性质或数学性质是什么,它和标准的结构力学问题显然是相似的.

一旦坐标、形状函数 $[N]$ 确定后,列出方程几乎是自动的.

如果所涉及的泛函是二次的,则矩阵 $[K]$、$\{F\}$ 和元素的类似贡献与节点参数无关,并且可以用显式计算出来.

然而这类形状函数的确定也不是完全任意的. 它必须遵守某些完备性准则,如果要求在减少元素尺寸时能够收敛到正确解答的话.

首先,在元素间的边界上,要遵守某些连续性要求,使得在那里对 x 没有贡献[7,25]. 其次,假设没有奇异性,x 的被积函数的任意常数值在元素尺寸减小时必须是可以得到的. 在弹性力学中,这就是贝兹利(Bazeley)等[26]给出的常应变准则. 关于收敛准则的许多推广(这些准则都符合米赫林

(Михлин)[27] 的"完备性"定义)的讨论可见卞学鐄[28]、基(Key)[29]、奥利维拉(Oliveira)[30]和约翰逊(Johnson)[103]的文章.

大部分有限元素的表达法属于上述的变分类型，而有些元素虽不满足上述准则，却已知是单调收敛到正确值的，这至少对于某些网格分割是如此. 例如，一个三角形的板元素违反由贝兹利等[26]提出的(斜率)连续性要求，但却被证明是准确地收敛的(对由三族平行线组成的网格而言). 再如，一个较老的，同样是非协调的矩形[31,32]由沃尔兹(Walz)等[33]证明是收敛的. 梅洛什(Melosh)[34]还导出另一种极为重要的元素，它不根据任何一个现成的变分原理. 为什么这种形式会表现出通常很满意的性态，现在还不大清楚，但可能在物理上等同的模型化中有某些意义.

然而，还有更为正式的途径可用于有限元素的表达法，它们不需和变分表达法联系起来. 一旦未知函数的形状由方程(2)描述出来，一个微分方程

$$A(\{\bar{\phi}\}) = 0 \tag{5}$$

的解的所有**加权剩余**过程将导致标准的组合形式. 点或者面积的配置(collocation)能够这样来表示，并且，如果权函数真的可由形状函数本身表示出来，那么就得到迦辽金(Галеркин)法. 在某些情形中，应用这种方法和用变分得到的结果完全相同[35,36]，但应用范围现在可以推广到那些变分泛函不存在或者需要人为地创造的问题中去. 它的一个典型例子是将有限元素-迦辽金表达法应用于瞬态过程中的时间域内[37]. 此外奥登(Oden)还提出了有限元素表达法的其他方法[38].

三、矩阵和有限元素

大概在和有限元素第一次出现的同时，矩阵方法也用来组织结构中的计算工作[6,39,40]，当时这两种不同的方法已经有

些地方是一致的. 显然，如果矩阵方法在建立离散的网络型问题的解时是最有效的方法，那么它们也能用于由离散化而得出的标准方程(1)的组合和求解过程. 同样明显地，有限元素法的过程将连续统的描述简化为一个离散的模型，它形成了本质上的逼近，而这个逼近与求解的技术是毫不相干的. 作者指出这一点，是想启发非结构方面的应用力学工作者，他们可能由于所谓“结构力学中的矩阵方法”的复杂形式而轻易放弃它.

(再者，澄清这一点，也是由于近三十年来，松弛法常和有限差分法混淆不清的缘故.)

最近出版的一些矩阵法方面的教科书，已经明确地提到了有限元素法，对于希望熟悉标准运算的初学者是有用的[41,104,105].

四、有限元素与有限差分的对比

在有限元素法早期，往往有种议论，认为它比用有限差分进行离散化的方法没有多大优点. 现在，偶而也还有另一种议论，认为这两种方法实际上是等同的. 这些议论是否有意义，也许先得从词义上作些说明. 如果把有限差分方法理解为对于“微分支配方程”的一个“局部的、直接的近似方法”[42]，那么(以积分形式导出的)有限元素法的优点可列举如下：

(a) 节点的定位是颇为任意的(这说明经济性)；

(b) 产生“改进”元素的可能性是无限的，只要增加元素参数的个数就可以了；

(c) 由于它的积分形式，改进了边界值的逼近；

(d) 可以随意选择不同类型和不同尺寸的元素.

以上(c)项是最重要的，最近有些文章比较了组合的有限元素和有限差分算法，评价了它们的相对精度，而没有涉

及边界条件．这里，如果规定了任何梯度条件，标准的有限差分算子通常会引进极大的截断误差．

最近几年来，出现了不少“有限差分”法，其中只对低阶导数作直接的近似，而最后的算法则通过变分原理组合起来[43,44]．这些方法显然把两种方法沟通起来，而实际上一些明显的优点消失了．不过上述(a)，(b)，(d)三点还是成立的．

最后，虽和计算效率不直接有关，对有限元素的物理解释给使用者一种真实感．这种“心理”因素在两方面有利．其一，由列方程而引起的总体误差容易察觉到；其二，使用者会遇到这种方法意外的推广．

五、形状函数的重要性

当问题的类型和变分（或其它）的表达式决定以后，剩下的唯一主要步骤是决定形状函数的形式．这个做好了，其余的代数和计算就可以完全按照一个标准模样办．选择适当的形状函数的重要性是显然的．

空间分割的最简单形式对二维问题是三角形，对三维问题是四面体．在有些问题中，最早使用的元素[4,45]里，就有这类节点在它们的顶点上的三角形和四面体，对于这些问题，决定 x 时要求未知函数本身的连续性（如弹性力学，准调和问题等）．

后来看到，如果与一个元素相联系的总自由度数增加的话，那么对组合问题却可以用较少的自由度得到同样的精确度，因此导致引进更复杂的元素．乌贝克[18]和阿吉里斯[46]分别采用了节点在边中点的三角形和四边形．今天，显然已能推导出整套的这样或那样的元素[47]，见图1．

数量小、形状大的元素难以严密逼近复杂的边界形状，除非元素可以成为弯曲的．艾恩斯（Irons）[48]引进了形状函数确

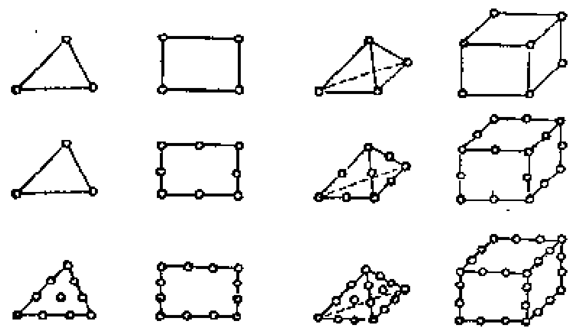

图 1　一些二维和三维元素

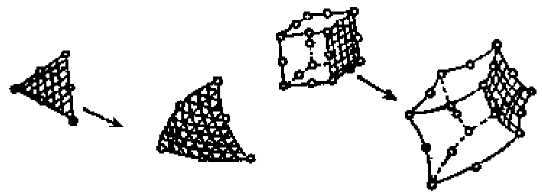

图 2　简单形体利用曲线坐标进行畸变

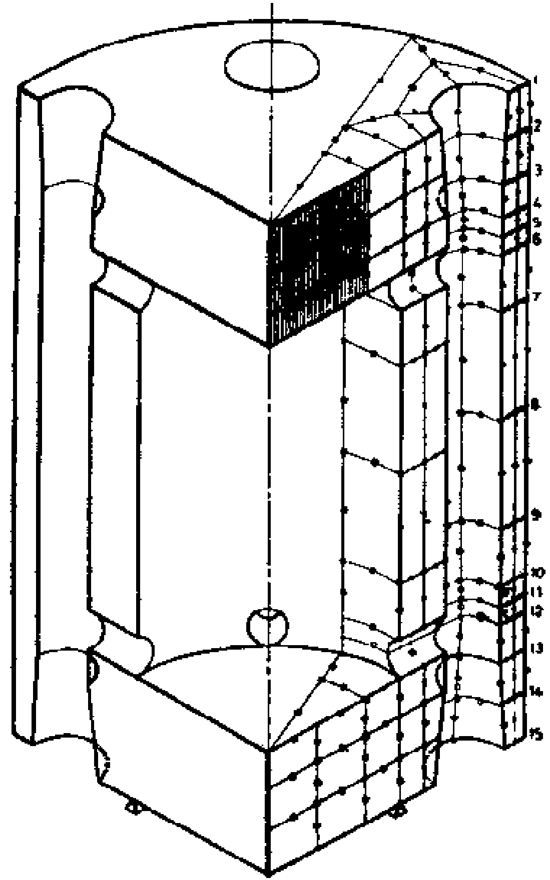

图 3a　压力容器三维应力分析中的弯曲等参数元素

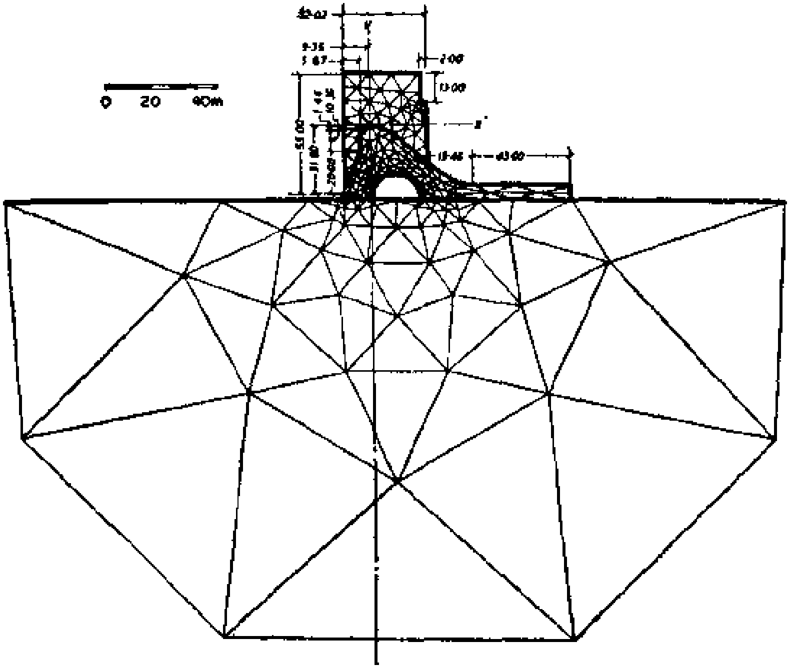

图 3b　水坝二维应力分析中的简单三角形网格

定的局部曲线坐标，其形状函数与函数逼近中采用的相同（等参数系统），然后再运用数值积分，使这方面取得了进展（图 2）. 现在这种元素在二维和三维分析中已广泛使用[47,49,50]. 图 3(a)和(b)表明将"实际"区域分成为简单元素和弯曲元素的典型分割法（第一个有四个自由度，第二个有 60 个自由度）.

在这种元素中首先引进的数值积分法现已广泛使用. 不仅可以用它很快地计算出元素性质，而且可以排除不少出现代数误差和计算误差的机会.

有些问题中的泛函定义需要附加的条件，即要求函数的一阶导数甚至于高阶导数在两元素之间是连续的. 弹性力学中的板壳问题，以及流体力学中的粘性流问题，是这种情况的典型例子. 这里要做出合适的形状函数就更困难了. 在板的

弯曲问题中，有些文献已经提到了如何成功地避免这类连续性[26,31,32]，而在粘性流的解[51]中也采用了同样的元素. 但是，要实现协调性，可以有两种办法：一种是用象克拉夫等[52,53]、贝兹利等[26]和乌贝克[19]关于简单板元素的文章中指出的奇异函数；第二种是在节点处引用高阶导数(二阶导数)的连续性，这个方法最早是由博格勒 (Bogner) 和施米特 (Schmit)[54]采用的. 在当前提倡的各种复杂的板元素中[55~59]，第二种办法更为流行些.

在壳体分析中也遇到类似的问题，这里读者可以看到从最简单的用平面或锥面逼近[60,61]，一直发展到最近采用复杂的曲面壳体元素[52,62,53]. 在教科书[25]中有详细的参考文献目录.

正如阿马德 (Ahmad) 等[64,65]所指出的，可以再次采用等参数概念，并由完全三维连续介质降阶得出曲面壳体元素，但值得同时提醒一下，从根本上更为正确一些的表达方式，是如何避免落入那些由物理上不可靠的近似法所产生的圈套的，而这种近似法在古典的板壳理论中却不得不采用.

六、非线性和动态问题

固体力学中的非线性问题(由于材料或几何上的原因)以及有动态项的问题，当然也可以用有限元素的离散化法来处理，如同其它方法(例如有限差分法)那样. 在非线性问题中，必须采用某种形式的迭代法，而在动态问题中，必须或者应用特征值方法，或者用对时间逐段积分法. 随着有能力求解复杂的、线性的边界值问题，这类应用显然正变得越来越多，以致本文无法综合评述. 这里再次证明，在有限元素的物理表达式中采用的简单、直接的方法，对于处理这样复杂的问题是非常有价值的. 其实，对现象进行仔细的推敲，带来了迭代法