现代应用数学丛书

富里哀变换与拉普拉斯变换

〔日〕河田龙夫 著

上海科学技术出版社

现代应用数学丛书

富里哀变换与拉普拉斯变换

〔日〕河田龙夫 著
钱 端 壮 译
林 坚 冰 等 校

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书是日本岩波书店出版的現代应用数学丛书之一的中譯全书共分八章，前四章介紹 Fourier 变换以及与其有关的 ltjes 积分、Mellin 变换和 Hankel 变换等，第五章介紹 place 变换，最后三章介紹这些变换的主要应用、表現問題、分函数和其他各种变换。适合于各高等学校数理系作为教学参考书，并可供工程技术人員、科学研究工作者参考。

現代应用数学丛书

富里哀变换与拉普拉斯变换

原书名 Fourier 变换と Laplace 变换
原著者 〔日〕河 田 龙 夫
原出版者 岩 波 书 店
譯 者 錢 端 壮
校 者 林 坚 冰 等

*

上海科学技术出版社出版
(上海瑞金二路450号)
上海市书刊出版业营业許可証出093号
新华书店上海发行所发行 各地新华书店經售
上海市印刷五厂印刷

*

开本 850×1168 1/32 印張 6 10/32 字数 149,000
1961年11月第1版 1961年11月第1次印刷
印数 1—16,000

出版説明

这一套书是根据日本岩波书店出版的“現代应用数学讲座”翻譯而成。日文原书共15卷60册，分成A、B两組，各編有序号。現在把原来同一題目分成两册或三册的加以合幷，整理成42种，不另分組編号，陆續翻譯出版。

这套书涉及的面很广，其内容都和現代科学技术密切有关，有一定参考价值。每一本书收集的資料都比較丰富，而叙述扼要，篇幅不多，有利于讀者以較短时間掌握有关学科的主要內容。虽然，这套书的某些观点不尽适合于我国的情况，但其方法可供参考。因此，翻譯出版这一套书，对我国学术界是有所助益的。

由于日文原书是1957年起以讲座形式陆續出版的，写作时間和篇幅的限制不可避免地会影响原作者对內容的处理，为了尽可能地减少这种影响，我們在每一譯本中，特請譯者或校閲者撰写序或后記，以介紹有关学科的最近发展状况，幷对全书內容作一些評价，提出一些看法，結合我国情况补充一些資料文献，在文內过于簡略或不足的地方添加了必要的注释和改正原书中存在的一些錯誤。希望这些工作能对讀者有所帮助。

承担翻譯和校閲的同志，为提高书籍的质量付出了巨大劳动，在此特致以誠摯的謝意。

欢迎讀者对本书提出批評和意見。

上海科学技术出版社

目　　录

第1章　Fourier 变换

§1 記　号

区間 $a<x<b$ 記作(a, b)，$a\leqslant x\leqslant b$ 記作$[a, b]$. 同样把 $a<x\leqslant b$，$a\leqslant x<b$ 分别記作$(a, b]$，$[a, b)$. $-\infty<x<+\infty$ 記作$(-\infty, +\infty)$. 滿足下列条件

$$\int_a^b |f(x)|^p dx<\infty$$

的所有函数 $f(x)$ 的全体記作 $L_p(a, b)$. $f(x)$ 是具有复数值的函数。

在沒有特别指出所考虑的区間的必要，以及沒有誤解的顧虑时，也簡单地用 L_p 来表示。

如果 $f(x)$是(a, ∞)中任意的有限区間內属于 L_1 的函数，并且极限值

$$\lim_{X\to\infty}\int_a^X f(x)dx$$

存在的时候，就把极限值記作

$$\int_a^{\to\infty} f(x)dx.$$

$\int_{\to-\infty}^{\to+\infty} f(x)dx$ 的意义就是 $\lim\limits_{\substack{X\to+\infty\\ X'\to-\infty}}\int_{X'}^X f(x)dx$. 同样地$\int_{\to a}^b f(x)dx$ 的意义就是 $\lim\limits_{A\to a}\int_A^b f(x)dx$.

§2 Fourier 变换的定义

設 $f(x)\in L_1(-\infty, +\infty)$，就是說

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx<\infty.$$

这时

$$F(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}f(x)dx \tag{2.1}$$

叫做$f(x)$的 **Fourier 变换**。

定理 2.1 $F(t)$ 在区間$-\infty<t<+\infty$内有界，并且一致連續。

証明 由于$|F(t)|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx$，所以很明显它是有界的。现在对任意的$\varepsilon>0$，取这样的$A$，使得

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{|X|>A}|f(x)|dx<\frac{\varepsilon}{4}.$$

当$|t_1-t_2|\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx\right)<\frac{\varepsilon\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}A}$ ❶ 时，由于

$$|F(t_1)-F(t_2)|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{|x|>A}|e^{it_1x}-e^{it_2x}|\cdot|f(x)|dx$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{+A}|e^{i(t_1-t_2)x}-1|\,|f(x)|dx,$$

又由于$|e^{i(t_1-t_2)x}-1|\leqslant|t_1-t_2|\,|x|$，所以

$$\leqslant\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{|x|>A}|f(x)|dx+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}A\cdot|t_1-t_2|\int_{-A}^{+A}|f(x)|dx$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}A\cdot|t_1-t_2|\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

如果$f(x)\in L_1(0,\infty)$的时候，就分别地把

$$F(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(x)\cos xt\,dt, \tag{2.2}$$

---

❶ 原文誤为$|t_1-t_2|<\frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}A}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx$.——譯者注

$$G(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(x)\sin xt\,dt \tag{2.3}$$

叫做$f(x)$的余弦变换以及$f(x)$的正弦变换。它們也是有界，并且一致連續的。

此外，如果$f(x)\in L_1(-\infty, +\infty)$，并且是偶函数，那么

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}f(x)\,dx\\
&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} e^{-ixt}f(x)\,dx+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{-ixt}f(x)\,dx\\
&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} e^{-ixt}f(x)\,dx+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} e^{ixt}f(x)\,dx\\
&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\cos xt\,f(x)\,dx.
\end{aligned}$$

这就是説，它的 Fourier 变换和它的余弦变换相等。同样，如果$f(x)\in L_1(-\infty,+\infty)$，而且是奇函数，那么，$f(x)$的 Fourier 变换等于区間$(0, \infty)$中的正弦变换。

定理 2.2 (Riemann-Lebesgue) (i)如果 $f(x)\in L_1(-\infty, +\infty)$，則

$$\lim_{|t|\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixt}dx=0. \tag{2.4}$$

(ii)一般，如果 $f(x)\in L_1(-\infty, +\infty)$，$K(x)$为有界函数，并且当$(A\to\infty, B\to\infty)$时，有

$$\int_0^{A} K(x)dx=o(A),\quad \int_{-B}^{0} K(x)\,dx=o(B),$$

則

$$\lim_{|t|\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)K(tx)\,dx=0. \tag{2.5}$$

証明 現在証明(ii)。事实上，

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)K(tx)\,dx=\int_0^{\infty}f(x)K(tx)\,dx+\int_{-\infty}^{0}f(x)K(tx)\,dx,$$

所以只需証明右边各項当 $t\to\infty$ 时的极限值为零，就是証明

$$\int_0^\infty f(x)K(tx)dx\to 0 \quad (|t|\to\infty) \tag{2.6}$$

郎可。現在先假設 $f(x)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 中等于定数 c，而对其他的 x 則等于零，这样，就有

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f(x)K(tx)dx&=c\int_\alpha^\beta K(tx)dx=\frac{c}{t}\int_{\alpha t}^{\beta t} K(u)du\\&=\frac{c}{t}\int_0^{\beta t} K(u)du-\frac{c}{t}\int_0^{\alpha t} K(u)du\\&=o(1) \quad (|t|\to\infty). \quad (\text{根据假設。})\end{aligned}$$

其次，設 $f_i(x)$ 在 $[\alpha_i, \beta_i]$ 的各区間中分別等于定数 c_i，而对其他的 x 等于零。这里 $[\alpha_i, \beta_i]$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ 是都在区間 $(0, \infty)$ 中但没有公共点的区間。这样，公式(2.6)对于 $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i f_i(x)$ 也是成立的。对于一般的 $f(x)\in L_1(0, \infty)$，取形如 $\sum c_i f_i(x)$ 的函数 $g(x)$，使得

$$\int_0^\infty |f(x)-g(x)|dx<\varepsilon,$$

ε 是任意給定的正数。所以有

$$\begin{aligned}\left|\int_0^\infty f(x)K(tx)dx\right|&\leqslant\left|\int_0^\infty \{f(x)-g(x)\}K(tx)dx\right|\\&\quad+\left|\int_0^\infty K(tx)g(x)dx\right|\\&=I_1+I_2.\end{aligned}$$

因为 $K(x)$ 有界，所以有定数 M，使得 $|K(x)|\leqslant M$，而有

$$|I_1|\leqslant M\int_0^\infty |f(x)-g(x)|dx<\varepsilon M.$$

另外，由于上面証实的理由，有

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^\infty g(x)K(tx)dx=0.$$

所以如果 T 是相当大的数，当 $|t|>T$ 时，就能使 $|I_2|<\varepsilon$。

因此

$$\left|\int_0^\infty f(x)K(tx)dx\right| < \varepsilon M+\varepsilon=(M+1)\varepsilon,$$

而(ii)証毕。(i)就是(ii)当 $K(x)=e^{itx}$ 时的特殊情况。 証毕

注意 当 a, b 是有限的数，$f(x)\in L_1(a, b)$ 时，有

$$\lim_{|t|\to\infty}\int_a^b f(x)e^{-ixt}dx=0.$$

这是定理 2.2 的特殊情况。因为可以令 $f(x)=0$ $(-\infty<x<a,\ b<x<\infty)$，而把 $f(x)$ 当作定义在 $(-\infty, \infty)$ 内，于是 $f\in L_1(-\infty, \infty)$.

定理 2.3 設对于任意的有限区間 (a, b)，$f(x)$ 属于 $L_1(a, b)$，并且在 $x>A$，$x<-B$ 内，$f(x)$ 分别单調地趋于零 $(|x|\to\infty)$；于是，若 $t\neq 0$，則积分

$$\int_{\to-\infty}^{\to\infty} f(x)e^{-itx}dx$$

存在。

証明 現在証明 $\int_0^{\to\infty} f(x)e^{-itx}dx$ 存在。我們先証明下面这个事实，卽对于已給的 ε，如果 A 相当大的話，对于任意的满足不等式 $X'>X\geqslant A$ 的 X' 与 X，

$$\left|\int_X^{X'} f(x)\sin tx\,dx\right|<\varepsilon. \tag{2.7}$$

因为 $f(x)$ 当 $x\geqslant A$ 时单調减少，所以可設

$$0<|f(x)|<\frac{\varepsilon t}{2}.$$

根据积分学的第二中値定理，有

$$\int_X^{X'} f(x)\sin tx\,dx=f(X)\int_X^{\xi}\sin tx\,dx$$

$$=f(X)\frac{\cos tX-\cos t\xi}{t}.$$

所以 $$\left|\int_X^{X'} f(x)\sin tx\,dx\right|\leqslant\frac{2|f(X)|}{t}<\varepsilon,$$

这样就証明了

$$\int_0^{\to\infty} f(x)\ \sin tx\,dx$$

是存在的。同样地能够証明

$$\int_0^{\to\infty} f(x)\ \cos tx\,dx$$

是存在的。于是

$$\int_0^{\to\infty} f(x)e^{-itx}dx \quad (t\neq 0)$$

是存在的。完全同样能够証明

$$\int_{\to-\infty} f(x)e^{-itx}\,dx$$

也是存在的。 **証毕**

注意 用完全同样的証法,能夠得到下列的事实。設

$$f(x)=g(x)\sin(px+q), \qquad p,q \text{ 均为常数},$$

$g(x)$ 当 $x\to\infty$ 及 $x\to-\infty$ 时单調地收斂于零。对于这样的 $f(x)$,

$$\int_{\to-\infty}^{\to\infty} f(x)e^{itx}dx \quad (t\neq p)$$

存在。

定理 2.4 設 $f(x)\in L_1$, $g(x)\in L_1$, 并設它們的 Fourier 变换分别是 $F(t)$ 与 $G(t)$, 則

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)G(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty} F(x)g(x)dx. \tag{2.8}$$

这个等式称为 **Parseval 等式**。

証明

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)G(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(u)e^{-ixu}\,du$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} g(u)du\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixu}dx=\int_{-\infty}^{\infty} g(u)F(u)du.$$

証毕

由公式(2,8)能够得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)G(-x)e^{-iyx}dx=\int_{-\infty}^{\infty} F(x)g(y-x)dx. \qquad (2.9)$$

事实上，对于固定的 y，代替 $g(x)$ 考虑 $g(y-x)$，则由

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(y-x)e^{-itx}dx=e^{-iyt}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(u)e^{iut}du$$
$$=e^{-iyt}G(-t),$$

就能得到(2.9)式。

§3 几个定积分

1．由于定理 2.3，积分

$$\int_0^{\to\infty} \frac{\sin tx}{x}\,dx \qquad (3.1)$$

存在。[因为如果令

$$f(x)=0 \quad (x<\varepsilon), \quad f(x)=\frac{1}{x} \quad (x>\varepsilon),$$

则由定理 2.3 中积分的虚数部分，知道积分

$$\int_\varepsilon^{\to\infty} \frac{\sin tx}{x}\,dx$$

是存在的($t\neq0$)。另外，积分

$$\int_0^\varepsilon \frac{\sin tx}{x}\,dx$$

存在，所以(3.1)存在。如 $t=0$，则(3.1)明显地等于零]。

我們現在試求(3.1)的值。为了这个目的，設 $k>0$，則

$$\int_0^\infty e^{-kx}\cos tx\,dx=\frac{k}{k^2+t^2}.$$

对变数 t 由 0 到 u 积分，就有

$$\int_0^\infty e^{-kx}dx\int_0^u \cos tx\,dt=\tan^{-1}\frac{t}{k}, \quad k>0,$$

$$\int_0^\infty e^{-kx}\frac{\sin ux}{x}\,dx=\tan^{-1}\frac{t}{k}.$$

此外，

$$\left|\int_A^\infty \frac{e^{-kx}}{x}\sin ux\,dx\right| = \lim_{B\to\infty}\left|\int_A^B \frac{e^{-kx}}{x}\sin ux\,dx\right|$$

$$= \lim_{B\to\infty}\left|\frac{e^{-kA}}{A}\int_A^\xi \sin ux\,dx\right| \quad (\text{积分第二中值定理})$$

$$= \lim_{B\to\infty}\left|\frac{e^{-kA}}{A}\,\frac{\cos u\xi-\cos uA}{u}\right| \leqslant \frac{2}{u}\,\frac{e^{-kA}}{A} \leqslant \frac{2}{Au}.$$

所以积分

$$\int_0^{\to\infty} \frac{e^{-kx}}{x}\sin ux\,dx$$

对于 k 一致收敛($0\leqslant k<\infty$, u 固定)。因此，当 $u>0$ 时，有

$$\int_0^{\to\infty} \frac{\sin ux}{x}\,dx = \lim_{k\to 0}\int_0^\infty e^{-kx}\,\frac{\sin ux}{x}\,dx = \lim_{k\to 0}\tan^{-1}\frac{u}{k} = \frac{\pi}{2}.$$

就是説

$$\int_0^{\to\infty} \frac{\sin ux}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}. \tag{3.2}$$

因为被积函数是偶函数，所以

$$\int_{\to-\infty}^{\to\infty} \frac{\sin ux}{x}\,dx = \pi \quad (u>0). \tag{3.3}$$

同样有

$$\int_{\to-\infty}^{\to\infty} \frac{\sin ux}{x}\,dx = -\pi \quad (u<0).$$

因此

$$\begin{aligned}\int_{\to-\infty}^{\to\infty} \frac{\sin ux}{x}\,dx &= \pi, & u>0;\\ &= 0, & u=0;\\ &= -\pi, & u<0.\end{aligned} \tag{3.4}$$

2. 同样，当 $t>0$, $0<\mu<1$ 时，有

$$\int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-itx}\,dx = \frac{\Gamma(\mu)}{t^\mu}e^{-i\mu\frac{\pi}{2}}. \tag{3.5}$$

这里 $\Gamma(\mu)=\int_0^{\infty} e^{-x}x^{\mu-1}dx$. 上面的公式显然是由于在

$$\int_0^{\infty} e^{-kx}x^{\mu-1}e^{-itx}dx=\frac{\Gamma(\mu)}{(k+it)^{\mu}} \tag{3.6}$$

中取 $k\to 0$ 而得到的。[(3.6) 自身，当 $k>0$, $0<\mu<\infty$, $-\infty<t<\infty$ 时成立]。

特别有下面的結果:

$$\int_0^{\to\infty}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx=\int_0^{\to\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}. \tag{3.7}$$

下面我們討論一下当 $x\to\infty$ 时,积分

$$J_1=\int_0^1 (1-t)^{-\frac{1}{2}}\cos\left(xt-\frac{n\pi}{2}\right)dt$$

的样子。

令 $1-t=u$, 則

$$J_1=\int_0^1 u^{-\frac{1}{2}}\cos\left(ux-x+\frac{n\pi}{2}\right)du=\cos\left(x-\frac{n\pi}{2}\right)\int_0^1 u^{-\frac{1}{2}}\cos ux\,du$$
$$+\sin\left(x-\frac{n\pi}{2}\right)\int_0^1 u^{-\frac{1}{2}}\sin ux\,du.$$

$$\int_0^1 u^{-\frac{1}{2}}\cos ux\,du=\frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^x v^{-\frac{1}{2}}\cos v\,dv$$
$$=\frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{\to\infty}v^{-\frac{1}{2}}\cos v\,dv-\frac{1}{\sqrt{x}}\int_x^{\to\infty}v^{-\frac{1}{2}}\cos v\,dv,$$

$$\int_x^A v^{-\frac{1}{2}}\cos v\,dv=x^{-\frac{1}{2}}\int_x^{\xi}\cos v\,dv \quad \text{(第二中值定理)}$$
$$=x^{-\frac{1}{2}}(\sin\xi-\cos x)=O(x^{-\frac{1}{2}}),$$

因此有

$$\int_0^1 u^{-\frac{1}{2}}\cos ux\,du=\frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{\to\infty}v^{-\frac{1}{2}}\cos v\,dv+O\left(\frac{1}{x}\right).$$

由(3.7)式,

$$=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}+O\left(\frac{1}{x}\right).$$

同样有

$$\int_0^1 u^{-\frac{1}{2}}\sin ux\,du=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}+O\left(\frac{1}{x}\right).$$

因此

$$\begin{aligned}J_1&=\left\{\cos\left(x-\frac{n\pi}{2}\right)+\sin\left(x-\frac{n\pi}{2}\right)\right\}\left\{\sqrt{\frac{\pi}{2x}}+O\left(\frac{1}{x}\right)\right\}\\&=\sqrt{\frac{\pi}{x}}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}-\frac{n\pi}{2}\right)+O\left(\frac{1}{x}\right).\end{aligned}\tag{3.8}$$

下面再研究一下积分

$$J_2=\int_0^1(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\cos\left(xt-\frac{n\pi}{2}\right)dt.$$

把 J_2 写成

$$\begin{aligned}J_2&=\int_0^1(1-t)^{-\frac{1}{2}}(1+t)^{-\frac{1}{2}}\cos\left(xt-\frac{n\pi}{2}\right)dt\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1(1-t)^{-\frac{1}{2}}\cos\left(xt-\frac{n\pi}{2}\right)dt\\&\quad+\int_0^1(1-t)^{-\frac{1}{2}}\{(1+t)^{-\frac{1}{2}}-2^{-\frac{1}{2}}\}\cos\left(xt-\frac{n\pi}{2}\right)dt\\&=J_{21}+J_{22}.\end{aligned}$$

令 $(1-t)^{-\frac{1}{2}}\{(1+t)^{-\frac{1}{2}}-2^{-\frac{1}{2}}\}=\varphi(t)$，则

$$\varphi(t)=\frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{2}\sqrt{1+t}\,(\sqrt{2}+\sqrt{1+t})},$$

并且立刻晓得

$$\varphi(1)=0,\quad \varphi(0)=\frac{1}{2+\sqrt{2}},\quad \int_0^1|\varphi'(t)|\,dt<\infty.$$

于是由分部积分法，有

$$\begin{aligned}J_{22}&=\left[\varphi(t)\frac{\sin\left(xt-\frac{n\pi}{2}\right)}{x}\right]_0^1+\frac{1}{x}\int_0^1\varphi'(t)\sin\left(xt-\frac{nx}{2}\right)dt\\&=O\left(\frac{1}{x}\right)+O\left(\frac{1}{x}\int_0^1|\varphi'(t)|\,dt\right)=O\left(\frac{1}{x}\right).\end{aligned}$$

对于 J_{21}，利用(3.8)，有

$$J_2=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}-\frac{n\pi}{2}\right)+O\left(\frac{1}{x}\right). \tag{3.9}$$

现在如果令

$$J_0(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^1 (1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\cos xt\,dt,$$

则

$$J_0(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{x}\right). \tag{3.10}$$

3．现在研究一下 e^{-x^2} 的 Fourier 变换。

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{3.11}$$

是大家熟知的公式。由这个公式就有

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x^2}dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}},\qquad \lambda>0. \tag{3.12}$$

設 z 是复变数，而来考虑 e^{-z^2}，它是到处正则的函数。如果沿着图 3.1 中的 $ABCDA$ 把 e^{-z^2} 积分，则积分的結果等于零。由于 A, B, C, D 各点分别是 $-T$, T, $T+it$, $-T+it$，所以

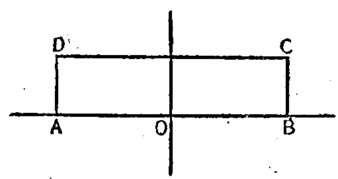

图 3.1

$$\int_{-T}^{T} e^{-z^2}dz+\int_{T}^{T+it} e^{-z^2}dz+\int_{T+it}^{-T+it} e^{-z^2}dz+\int_{-T+it}^{-T} e^{-z^2}dz=0. \tag{3.13}$$

把 t 固定住，则

$$\left|\int_T^{T+it} e^{-z^2}dz\right|=\left|\int_0^t e^{-(T+iu)^2}du\right|\leqslant e^{-T^2}\int_0^t e^{u^2}du\to 0\quad (T\to\infty).$$

同样有

$$\int_{-T+it}^{-T} e^{-z^2}dz\to 0.$$

因此当 $T\to\infty$ 时，根据(3.13)，有