

现代应用数学丛书

# 富里哀变换与拉普拉斯变换

[日] 河田龙夫 著

上海科学技术出版社

现代应用数学丛书

# 富里哀变换与拉普拉斯变换

〔日〕河田龙夫 著  
錢端壯譯  
林堅冰等校

上海科学技术出版社

## 内 容 提 要

本书是日本岩波书店出版的现代应用数学丛书之一的中译本。全书共分八章，前四章介绍 Fourier 变换以及与其有关的 Stieltjes 积分、Mellin 变换和 Hankel 变换等，第五章介绍 Laplace 变换，最后三章介绍这些变换的主要应用、表现问题、复函数和其他各种变换。适合于各高等学校数理系作为教学参考书，并可供工程技术人员、科学工作者参考。

现代应用数学丛书

### 富里哀变换与拉普拉斯变换

原书名 Fourier 变换与 Laplace 变换  
原著者 (日) 河田龙夫  
原出版者 岩波书店  
译者 錢端壯等  
校者 林坚冰等

\*

上海科学技术出版社出版

(上海 珍金二路 450 号)

上海市书刊出版业营业登记证 093 号

新华书店上海发行所发行 各地新华书店经售

上海市印刷五厂印刷

\*

开本 850×1168 1/32 印张 6 10/32 字数 149,000

1961 年 11 月第 1 版 1961 年 11 月第 1 次印刷

印数 1—16,000

## 出版說明

这一套书是根据日本岩波书店出版的“现代应用数学讲座”翻译而成。日文原书共15卷60册，分成A、B两组，各编有序号。现在把原来同一题目分成两册或三册的加以合并，整理成42种，不另分组编号，陆续翻译出版。

这套书涉及的面很广，其内容都和现代科学技术密切有关，有一定参考价值。每一本书收集的资料都比较丰富，而叙述扼要，篇幅不多，有利于读者以较短时间掌握有关学科的主要内容。虽然，这套书的某些观点不尽适合于我国的情况，但其方法可供参考。因此，翻译出版这一套书，对我国学术界是有所助益的。

由于日文原书是1957年起以讲座形式陆续出版的，写作时间和篇幅的限制不可避免地会影响原作者对内容的处理，为了尽可能地减少这种影响，我们在每一译本中，特请译者或校阅者撰写序或后记，以介绍有关学科的最近发展状况，并对全书内容作一些评价，提出一些看法，结合我国情况补充一些资料文献，在文内过于简略或不足的地方添加了必要的注释和改正原书中存在的一些错误。希望这些工作能对读者有所帮助。

承担翻译和校阅的同志，为提高书籍的质量付出了巨大劳动，在此特致以诚挚的谢意。

欢迎读者对本书提出批评和意见。

上海科学技术出版社

# 目 录

## 出版說明

第1章 Fourier 变換 .....	1
§ 1 記号 .....	1
§ 2 Fourier 变換的定义 .....	1
§ 3 几个定积分 .....	7
§ 4 Fourier 积分定理 .....	12
§ 5 反演公式,唯一性 .....	16
§ 6 結合函数 .....	19
§ 7 Dirichlet 型积分 .....	22
§ 8 收斂定理 .....	27
§ 9 漸近公式 .....	33
§ 10 总和定理 .....	36
§ 11 反演公式及 $(C, \alpha)$ 总和法 .....	39
§ 12 平均收斂 .....	42
第2章 $L_2$ 的 Fourier 变換 .....	45
§ 13 $L_2$ 的 Fourier 变換 .....	45
§ 14 $L_2$ 的 Fourier 变換的反演公式 .....	50
第3章 Fourier-Stieltjes 积分 .....	54
§ 15 单調函数 .....	54
§ 16 Fourier-Stieltjes 积分 .....	59
§ 17 Fourier-Stieltjes 变換的反演公式 .....	62
§ 18 Parseval 等式 .....	66
§ 19 单調函数列的收斂 .....	67
第4章 Mellin 变換与 Hankel 变換 .....	73
§ 20 Mellin 变換 .....	73
§ 21 Hankel 变換 .....	76
§ 22 Hankel 变換与多变数函数的 Fourier 变換 .....	81
第5章 Laplace 变換 .....	86

§ 23 Laplace 变換.....	86
§ 24 收斂坐标 .....	89
§ 25 Laplace 变換的正則性.....	96
§ 26 Laplace-Stieltjes 变換的反演公式.....	98
§ 27 結合函数的 Laplace-Stieltjes 变換 .....	101
§ 28 Laplace 变換的例題 .....	108
<b>第6章 Fourier 变換和 Laplace 变換的性质和几个应用 .....</b>	<b>113</b>
§ 29 导函数与 Fourier 变換.....	113
§ 30 有限 Fourier 变換的漸近級數 .....	115
§ 31 函数变換和 Fourier 积分及 Laplace 积分 .....	121
§ 32 Laplace 方法 .....	125
§ 33 駐点的方法 .....	127
§ 34 定积分 .....	130
§ 35 数值积分 .....	134
<b>第7章 表現問題与調和分析 .....</b>	<b>139</b>
§ 36 使用 Fourier 积分的表現.....	139
§ 37 使用 Fourier-Stieltjes 积分的表現.....	145
§ 38 一般調和分析 .....	151
<b>第8章 結合函数及各种变換 .....</b>	<b>155</b>
§ 39 符号解法与結合函数 .....	155
§ 40 双边 Laplace 变換 .....	158
§ 41 无穷乘积 .....	160
§ 42 Laguerre-Pólya 函数族 .....	163
§ 43 反演公式 .....	170
§ 44 Laplace 变換的反演公式 .....	173
§ 45 Weierstrass 变換 .....	176
§ 46 Stieltjes 变換 .....	178
§ 47 Stieltjes 变換与結合函数 .....	181
§ 48 Meijer 变換.....	185
<b>校后記 .....</b>	<b>188</b>

# 第1章 Fourier 变換

## §1 記號

区间  $a < x < b$  記作  $(a, b)$ ,  $a \leq x \leq b$  記作  $[a, b]$ . 同样把  $a < x \leq b$ ,  $a \leq x < b$  分別記作  $(a, b]$ ,  $[a, b)$ .  $-\infty < x < +\infty$  記作  $(-\infty, +\infty)$ . 滿足下列条件

$$\int_a^b |f(x)|^p dx < \infty$$

的所有函数  $f(x)$  的全体記作  $L_p(a, b)$ .  $f(x)$  是具有复数值的函数。

在沒有特別指出所考慮的区間的必要, 以及沒有誤解的顧慮时, 也简单地用  $L_p$  来表示。

如果  $f(x)$  是  $(a, \infty)$  中任意的有限区間內属于  $L_1$  的函数, 并且极限值

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x f(x) dx$$

存在的时候, 就把极限值記作

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx.$$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  的意义就是  $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ x' \rightarrow -\infty}} \int_{x'}^x f(x) dx$ . 同样地  $\int_{-\infty}^b f(x) dx$  的

意义就是  $\lim_{x \rightarrow a} \int_a^b f(x) dx$ .

## §2 Fourier 变換的定义

設  $f(x) \in L_1(-\infty, +\infty)$ , 就是說

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < \infty.$$

这时

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(x) dx \quad (2.1)$$

叫做  $f(x)$  的 Fourier 变换。

**定理 2.1**  $F(t)$  在区间  $-\infty < t < +\infty$  内有界，并且一致連續。

**证明** 由于  $|F(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$ ，所以很明显它是有界的。現在对任意的  $\varepsilon > 0$ ，取这样的  $A$ ，使得

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|x|>A} |f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{4}.$$

当  $|t_1 - t_2| \left( \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx \right) < \frac{\varepsilon \sqrt{\pi}}{\sqrt{2} A}$  ① 时，由于

$$\begin{aligned} |F(t_1) - F(t_2)| &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|x|>A} |e^{it_1 x} - e^{it_2 x}| \cdot |f(x)| dx \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{+A} |e^{i(t_1-t_2)x} - 1| |f(x)| dx, \end{aligned}$$

又由于  $|e^{i(t_1-t_2)x} - 1| \leq |t_1 - t_2| |x|$ ，所以

$$\begin{aligned} &\leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{|x|>A} |f(x)| dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} A \cdot |t_1 - t_2| \int_{-A}^{+A} |f(x)| dx \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} A \cdot |t_1 - t_2| \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

如果  $f(x) \in L_1(0, \infty)$  的时候，就分別地把

$$F(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos xt dx, \quad (2.2)$$

① 原文誤为  $|t_1 - t_2| < \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{2} A} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$ ，——譯者注

$$G(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \sin xt \, dx \quad (2.3)$$

叫做  $f(x)$  的余弦变换以及  $f(x)$  的正弦变换。它们也是有界，并且一致連續的。

此外，如果  $f(x) \in L_1(-\infty, +\infty)$ ，并且是偶函数，那么

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(x) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-ixt} f(x) dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-ixt} f(x) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-ixt} f(x) dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{ixt} f(x) dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \cos xt f(x) dx. \end{aligned}$$

这就是說，它的 Fourier 变换和它的余弦变换相等。同样，如果  $f(x) \in L_1(-\infty, +\infty)$ ，而且是奇函数，那么， $f(x)$  的 Fourier 变换等于区间  $(0, \infty)$  中的正弦变换。

**定理 2.2** (Riemann-Lebesgue) (i) 如果  $f(x) \in L_1(-\infty, +\infty)$ ，則

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixt} dx = 0. \quad (2.4)$$

(ii) 一般，如果  $f(x) \in L_1(-\infty, +\infty)$ ， $K(x)$  为有界函数，并且当  $(A \rightarrow \infty, B \rightarrow \infty)$  时，有

$$\int_0^A K(x) dx = o(A), \quad \int_{-B}^0 K(x) dx = o(B),$$

則

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) K(tx) dx = 0. \quad (2.5)$$

**證明** 現在證明 (ii)。事實上，

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) K(tx) dx = \int_0^\infty f(x) K(tx) dx + \int_{-\infty}^0 f(x) K(tx) dx,$$

所以只需証明右边各項當  $t \rightarrow \infty$  時的极限值為零，就是証明

$$\int_0^\infty f(x) K(tx) dx \rightarrow 0 \quad (|t| \rightarrow \infty) \quad (2.6)$$

即可。現在先假設  $f(x)$  在  $[a, \beta]$  中等於定數  $c$ ，而對其他的  $x$  則等於零，這樣，就有

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(x) K(tx) dx &= c \int_a^\beta K(tx) dx = \frac{c}{t} \int_{at}^{\beta t} K(u) du \\ &= \frac{c}{t} \int_0^{\beta t} K(u) du - \frac{c}{t} \int_0^{at} K(u) du \\ &= o(1) \quad (|t| \rightarrow \infty). \quad (\text{根據假設。}) \end{aligned}$$

其次，設  $f_i(x)$  在  $[\alpha_i, \beta_i]$  的各區間中分別等於定數  $c_i$ ，而對其他的  $x$  等於零。這裡  $[\alpha_i, \beta_i] (i=1, 2, \dots, n)$  是都在區間  $(0, \infty)$  中但沒有公共點的區間。這樣，公式(2.6)對於  $\sum_{i=1}^n c_i f_i(x)$  也是成立的。對於一般的  $f(x) \in L_1(0, \infty)$ ，取形如  $\sum c_i f_i(x)$  的函數  $g(x)$ ，使得

$$\int_0^\infty |f(x) - g(x)| dx < \varepsilon,$$

$\varepsilon$  是任意給定的正數。所以有

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\infty f(x) K(tx) dx \right| &\leq \left| \int_0^\infty \{f(x) - g(x)\} K(tx) dx \right| \\ &\quad + \left| \int_0^\infty K(tx) g(x) dx \right| \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

因為  $K(x)$  有界，所以有定數  $M$ ，使得  $|K(x)| \leq M$ ，而有

$$|I_1| \leq M \int_0^\infty |f(x) - g(x)| dx < \varepsilon M.$$

另外，由於上面証實的理由，有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^\infty g(x) K(tx) dx = 0.$$

所以如果  $T$  是相當大的數，當  $|t| > T$  時，就能使  $|I_2| < \varepsilon$ 。

因此

$$\left| \int_0^\infty f(x) K(tx) dx \right| < \varepsilon M + \varepsilon = (M+1) \varepsilon,$$

而(ii)証毕。(i)就是(ii)当  $K(x) = e^{ix}$  时的特殊情况。証毕

注意 当  $a, b$  是有限的数,  $f(x) \in L_1(a, b)$  时, 有

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) e^{-ixt} dx = 0.$$

这是定理 2.2 的特殊情况。因为可以令  $f(x) = 0$  ( $-\infty < x < a, b < x < \infty$ ), 而把  $f(x)$  当作定义在  $(-\infty, \infty)$  内, 于是  $f \in L_1(-\infty, \infty)$ .

**定理 2.3** 設对于任意的有限区间  $(a, b)$ ,  $f(x)$  属于  $L_1(a, b)$ , 并且在  $x > A, x < -B$  内,  $f(x)$  分别單調地趋于零 ( $|x| \rightarrow \infty$ ); 于是, 若  $t \neq 0$ , 則积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-itx} dx$$

存在。

**証明** 現在証明  $\int_0^{\infty} f(x) e^{-itx} dx$  存在。我們先証明下面这个事实, 即对于已給的  $\varepsilon$ , 如果  $A$  相当大的話, 对于任意的滿足不等式  $X' > X \geq A$  的  $X'$  与  $X$ ,

$$\left| \int_X^{X'} f(x) \sin tx dx \right| < \varepsilon. \quad (2.7)$$

因为  $f(x)$  当  $x \geq A$  时單調減少, 所以可設

$$0 < |f(x)| < \frac{\varepsilon t}{2}.$$

根据积分学的第二中值定理, 有

$$\begin{aligned} \int_X^{X'} f(x) \sin tx dx &= f(X) \int_X^t \sin tx dx \\ &= f(X) \frac{\cos tX - \cos tX'}{t}. \end{aligned}$$

所以

$$\left| \int_X^{X'} f(x) \sin tx dx \right| \leq \frac{2|f(X)|}{t} < \varepsilon.$$

这样就証明了

$$\int_0^{+\infty} f(x) \sin tx dx$$

是存在的。同样地能够証明

$$\int_0^{+\infty} f(x) \cos tx dx$$

是存在的。于是

$$\int_0^{+\infty} f(x) e^{-itx} dx \quad (t \neq 0)$$

是存在的。完全同样能够証明

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-itx} dx$$

也是存在的。

証毕

注意 用完全同样的証法,能夠得到下列的事实。設

$$f(x) = g(x) \sin(px + q), \quad p, q \text{ 均为常数},$$

$g(x)$  当  $x \rightarrow \infty$  及  $x \rightarrow -\infty$  时单调地收敛于零。对于这样的  $f(x)$ ,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{itx} dx \quad (t \neq p)$$

存在。

**定理 2.4** 設  $f(x) \in L_1$ ,  $g(x) \in L_1$ , 并設它們的 Fourier 变换分別是  $F(t)$  与  $G(t)$ , 則

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) G(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) g(x) dx. \quad (2.8)$$

这个等式称为 Parseval 等式。

証明

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) G(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{-txu} du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(u) du \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-txu} dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(u) F(u) du.$$

証毕

由公式(2.8)能够得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)G(-x)e^{-iyx}dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)g(y-x)dx. \quad (2.9)$$

事实上,对于固定的  $y$ ,代替  $g(x)$ 考虑  $g(y-x)$ , 则由

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(y-x)e^{-itx}dx &= e^{-iyt} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(u)e^{iut}du \\ &= e^{-iyt}G(-t), \end{aligned}$$

就能得到(2.9)式。

### §3 几个定积分

#### 1. 由于定理 2.3, 积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin tx}{x} dx \quad (3.1)$$

存在。[因为如果令

$$f(x)=0 \quad (x<\varepsilon), \quad f(x)=\frac{1}{x} \quad (x>\varepsilon),$$

则由定理 2.3 中积分的虚数部分, 知道积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin tx}{x} dx$$

是存在的( $t \neq 0$ )。另外, 积分

$$\int_0^s \frac{\sin tx}{x} dx$$

存在, 所以(3.1)存在。如  $t=0$ , 则(3.1)明显地等于零]。

我們現在試求(3.1)的值。为了这个目的, 設  $k>0$ , 则

$$\int_0^{\infty} e^{-kx} \cos tx dx = \frac{k}{k^2+t^2}.$$

对变数  $t$  由 0 到  $u$  积分, 就有

$$\int_0^{\infty} e^{-kx} dx \int_0^u \cos tx dt = \tan^{-1} \frac{t}{k}, \quad k>0,$$

$$\int_0^{\infty} e^{-kx} \frac{\sin ux}{x} dx = \tan^{-1} \frac{t}{k}.$$

此外,

$$\begin{aligned} \left| \int_A^\infty \frac{e^{-kx}}{x} \sin ux dx \right| &= \lim_{B \rightarrow \infty} \left| \int_A^B \frac{e^{-kx}}{x} \sin ux dx \right| \\ &= \lim_{B \rightarrow \infty} \left| \frac{e^{-kA}}{A} \int_A^B \sin ux dx \right| \quad (\text{积分第二中值定理}) \\ &= \lim_{B \rightarrow \infty} \left| \frac{e^{-kA}}{A} \frac{\cos u\xi - \cos uA}{u} \right| \leq \frac{2}{u} \frac{e^{-kA}}{A} \leq \frac{2}{Au}. \end{aligned}$$

所以积分

$$\int_0^\infty \frac{e^{-kx}}{x} \sin ux dx$$

对于  $k$  一致收敛 ( $0 \leq k < \infty, u$  固定)。因此, 当  $u > 0$  时, 有

$$\int_0^\infty \frac{\sin ux}{x} dx = \lim_{k \rightarrow 0} \int_0^\infty e^{-kx} \frac{\sin ux}{x} dx = \lim_{k \rightarrow 0} \tan^{-1} \frac{u}{k} = \frac{\pi}{2}.$$

就是說

$$\int_0^\infty \frac{\sin ux}{x} dx = \frac{\pi}{2}. \quad (3.2)$$

因为被积函数是偶函数, 所以

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin ux}{x} dx = \pi \quad (u > 0). \quad (3.3)$$

同样有

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin ux}{x} dx = -\pi \quad (u < 0).$$

因此

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin ux}{x} dx &= \pi, & u > 0; \\ &= 0, & u = 0; \\ &= -\pi, & u < 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

2. 同样, 当  $t > 0, 0 < \mu < 1$  时, 有

$$\int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-tx} dx = \frac{\Gamma(\mu)}{t^\mu} e^{-t\frac{\mu\pi}{2}}. \quad (3.5)$$

这里  $\Gamma(\mu) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\mu-1} dx$ , 上面的公式显然是由于在

$$\int_0^\infty e^{-kx} x^{\mu-1} e^{-itx} dx = \frac{\Gamma(\mu)}{(k+it)^\mu} \quad (3.6)$$

中取  $k \rightarrow 0$  而得到的。[(3.6) 自身, 当  $k > 0$ ,  $0 < \mu < \infty$ ,  $-\infty < t < \infty$  时成立]。

特别有下面的结果:

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx = \int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (3.7)$$

下面我们讨论一下当  $x \rightarrow \infty$  时, 积分

$$J_1 = \int_0^1 (1-t)^{-\frac{1}{2}} \cos\left(xt - \frac{n\pi}{2}\right) dt$$

的样子。

令  $1-t=u$ , 则

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_0^1 u^{-\frac{1}{2}} \cos\left(ux - x + \frac{n\pi}{2}\right) du = \cos\left(x - \frac{n\pi}{2}\right) \int_0^1 u^{-\frac{1}{2}} \cos ux du \\ &\quad + \sin\left(x - \frac{n\pi}{2}\right) \int_0^1 u^{-\frac{1}{2}} \sin ux du. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 u^{-\frac{1}{2}} \cos ux du &= \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x v^{-\frac{1}{2}} \cos v dv \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^\infty v^{-\frac{1}{2}} \cos v dv - \frac{1}{\sqrt{x}} \int_x^\infty v^{-\frac{1}{2}} \cos v dv, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_x^\infty v^{-\frac{1}{2}} \cos v dv &= x^{-\frac{1}{2}} \int_x^t \cos v dv \quad (\text{第二中值定理}) \\ &= x^{-\frac{1}{2}} (\sin \xi - \cos x) = O(x^{-\frac{1}{2}}), \end{aligned}$$

因此有

$$\int_0^1 u^{-\frac{1}{2}} \cos ux du = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^\infty v^{-\frac{1}{2}} \cos v dv + O\left(\frac{1}{x}\right).$$

由(3.7)式,

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2x}} + O\left(\frac{1}{x}\right).$$

同样有

$$\int_0^1 u^{-\frac{1}{2}} \sin ux du = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} + O\left(\frac{1}{x}\right).$$

因此

$$\begin{aligned} J_1 &= \left\{ \cos\left(x - \frac{n\pi}{2}\right) + \sin\left(x - \frac{n\pi}{2}\right) \right\} \left\{ \sqrt{\frac{\pi}{2x}} + O\left(\frac{1}{x}\right) \right\} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2}\right) + O\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

下面再研究一下积分

$$J_2 = \int_0^1 (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} \cos\left( xt - \frac{n\pi}{2} \right) dt.$$

把  $J_2$  写成

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_0^1 (1-t)^{-\frac{1}{2}} (1+t)^{-\frac{1}{2}} \cos\left( xt - \frac{n\pi}{2} \right) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 (1-t)^{-\frac{1}{2}} \cos\left( xt - \frac{n\pi}{2} \right) dt \\ &\quad + \int_0^1 (1-t)^{-\frac{1}{2}} \{(1+t)^{-\frac{1}{2}} - 2^{-\frac{1}{2}}\} \cos\left( xt - \frac{n\pi}{2} \right) dt \\ &= J_{21} + J_{22}. \end{aligned}$$

令  $(1-t)^{-\frac{1}{2}} \{(1+t)^{-\frac{1}{2}} - 2^{-\frac{1}{2}}\} = \varphi(t)$ , 则

$$\varphi(t) = \frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{2} \sqrt{1+t} (\sqrt{2} + \sqrt{1+t})},$$

并且立刻晓得

$$\varphi(1) = 0, \quad \varphi(0) = \frac{1}{2+\sqrt{2}}, \quad \int_0^1 |\varphi'(t)| dt < \infty.$$

于是由分部积分法, 有

$$\begin{aligned} J_{22} &= \left[ \varphi(t) \frac{\sin\left( xt - \frac{n\pi}{2} \right)}{x} \right]_0^1 + \frac{1}{x} \int_0^1 \varphi'(t) \sin\left( xt - \frac{n\pi}{2} \right) dt \\ &= O\left(\frac{1}{x}\right) + O\left(\frac{1}{x} \int_0^1 |\varphi'(t)| dt\right) = O\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

对于  $J_{21}$ , 利用(3.8), 有

$$J_2 = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2}\right) + O\left(\frac{1}{x}\right). \quad (3.9)$$

現在如果令

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} \cos xt dt,$$

則

$$J_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x}\right). \quad (3.10)$$

3. 現在研究一下  $e^{-z^2}$  的 Fourier 变換。

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (3.11)$$

是大家熟知的公式。由这个公式就有

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}, \quad \lambda > 0. \quad (3.12)$$

設  $z$  是复变数, 而來考慮  $e^{-z^2}$ ,  
它是到处正則的函数。如果沿着  
图 3.1 中的  $ABCDA$  把  $e^{-z^2}$  积分,  
則积分的結果等于零。由于  $A, B, C, D$  各点分別是  $-T, T, T+it, -T+it$ ,  
 $-T+it$ , 所以

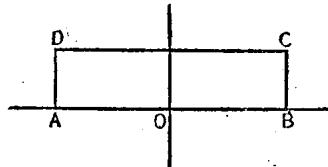


图 3.1

$$\int_{-T}^T e^{-z^2} dz + \int_T^{T+it} e^{-z^2} dz + \int_{T+it}^{-T+it} e^{-z^2} dz + \int_{-T+it}^{-T} e^{-z^2} dz = 0. \quad (3.13)$$

把  $t$  固定住, 則

$$\left| \int_T^{T+it} e^{-z^2} dz \right| = \left| \int_0^t e^{-(T+iu)^2} du \right| \leqslant e^{-T^2} \int_0^t e^{u^2} du \rightarrow 0 \quad (T \rightarrow \infty).$$

同样有

$$\int_{-T+it}^{-T} e^{-z^2} dz \rightarrow 0.$$

因此当  $T \rightarrow \infty$  时, 根据(3.13), 有