

1

数 学 物 理 丛 书



数理地震学

李国平 郭友中 著

地震出版社

内 容 简 介

本书为作者所著数学物理丛书之一,分三册出版。书中系统阐述了数理地震学中的若干重要问题,着重给出数学讨论,包括作者近年来在生产和科研方面的一些成果。第一分册作了地震弹性波、地震微极波、地震流变波的数学解析,强调了地震波的传输线相似性。本书可供地震、地质、数学、物理工作者,水工、土建、机械 engineering 人员以及大专院校有关专业的师生参阅。

2/100/17

数 理 地 震 学

I

李国平 郭友中 著

地 震 出 版 社 出 版

北京三里河路54号

北 京 印 刷 二 厂 印 刷

新华书店北京发行所 发行

各 地 新 华 书 店 经 售

850×1168 1/32 6 3/4 印张 插页1178千字

1978年9月第一版 1978年9月第一次印刷

统一书号: 13180·39 定价: 1.10 元

目 录

第一章 引论	(1)
第二章 地震弹性波	(3)
§ 1 场方程	(3)
§ 2 传输线相似性	(6)
§ 3 相速, 群速和频散	(11)
§ 4 特征阻抗与界面影响	(16)
§ 5 阻抗转换与传输线图	(20)
§ 6 一类直反射	(26)
§ 7 一类斜反射	(30)
§ 8 一类全反射	(37)
§ 9 一类偏振	(39)
§ 10 二类直反射	(42)
§ 11 二类斜反射	(45)
§ 12 二类多层反射	(56)
§ 13 二类全反射	(63)
§ 14 三类斜反射	(65)
§ 15 三类全反射	(69)
§ 16 表面波	(71)
§ 17 能量传输	(84)
§ 18 一般平面波的反射与折射	(87)
§ 19 相似与模拟	(94)
第三章 地震微极波	(97)
§ 1 引言	(97)
§ 2 变形与微变形	(98)
§ 3 应变与微应变	(102)
§ 4 微极应变的几何意义	(109)
§ 5 应变张量的不变量	(114)

§ 6	体积改变	(115)
§ 7	相容性条件	(117)
§ 8	一些特殊变形	(119)
§ 9	张量的物质导数	(126)
§ 10	速度, 加速度, 迴转与自旋	(127)
§ 11	弧长的物质导数	(131)
§ 12	守恒定律	(137)
§ 13	微极弹性理论	(150)
§ 14	场方程	(155)
§ 15	微极波	(158)
§ 16	微极波的反射	(164)
§ 17	表面微极波	(167)
§ 18	传输线相似性	(170)
§ 19	特征阻抗	(174)
第四章 地震流变波		(176)
§ 1	引言	(176)
§ 2	流变状态方程	(178)
§ 3	一些特殊流变介质	(182)
§ 4	能量耗散	(186)
§ 5	场方程	(189)
§ 6	流变波	(191)
§ 7	表面流变波	(195)
§ 8	强迫流变波	(198)
§ 9	传输线相似性	(207)
§ 10	特征阻抗	(209)
参考文献		(210)

第一章 引 论

《数理地震学》的内容之一是强调系统揭示地震的传输线相似性,从而使得近代无线电理论中相应的结论可以直接转化为地震学中的成果,为地震测试乃至模拟与控制(减震、防震以及人工地震)提供方法。反过来,地震现象的某些独特的结果也必将在无线电理论中有某种相应的反映。

地震的过程是地球某部分能量传输、积聚和释放的过程。因而人为地减低能量积聚,例如利用受控的无害小震避免强震,是可能的控制地震的途径。

地震机理是十分复杂的,国外提出的理论也是多种多样的。1911年提出的“弹性回跳理论”虽然简单,但对地震过程的了解作出过重要的贡献;1968年提出的“板块理论”在解释海洋地区和大陆边缘地区的浅源地震的成因上取得了某些进展,有人还对板块的运动速度进行了测定;1973年美国第四届地震预报会议上提出的“扩容现象理论”解释了许多地震前兆现象,美国希望得到验证,发展成为预报手段。但在现时说来都还只是一些有益的尝试。

大家知道,地壳不是一种单一的介质,甚至在不同应力状态下,同种岩石也会有不同的变形特性,对不同的岩石自然更应有不同的介质模型。因而,对地质力学的研究和对组成地壳的土体和岩体的基本性质^[1]的研究是十分重要的,我国进行了别开生面的研究^[2]。反过来,用人工地震的方法,根据地震波的分析也已经成为研究大地构造和工程抗震^[1]的有效手段。本书侧重于数理地震学的若干问题的阐述和研究,对不同的介质模型,所得结果可作类似的推广。

在地震学中,由弹性应变能的释放造成的地震称为构造地震;地表陷落、地滑等引发的重力位能释放而产生的地震称为重力地

震;火山爆发所引起的地震称为火山地震;核爆炸和人类工程活动触发的地震属于人工地震。地震发生时,积聚到地壳岩石引起破坏的能量突然释放,或足够大的外力在很短的时间内作用和作迅速变动都有地震波产生。当地震应力波在介质弹性阶段时,产生地震弹性波;岩体是具有尺度效应的,在临界尺度范围内考虑其微结构的影响,则应有地震微极波;在非完全弹性介质中,由于内摩擦效应可有地震流变波;又如在核爆炸等情况下,大的应力脉冲可引发冲击波,使介质进入塑性状态而产生塑性波,造成岩体的巨大破坏,此时,应力应变关系不再保持线性,而服从不同的数学关系。此外,地质构造,地下水以及天然应力场等对地震波的传播都有不同程度的影响。

地震时会引起地磁和地电的改变,甚至发出地光,如在海城营口大地震中,人们就曾见到持续数十秒钟的圆弧形地光,照亮了大片夜空,因而在地震学中研究电磁场与应力场的相互作用是十分重要的,描述它们的理论书中称为电磁固体力学。

岩体看来应该作为一种统计介质用非线性振动的观点来处理,相应的研究将在另一专著中论及。

最后,将介绍我们以前在有关论著*中得到的一些变分原理和有限元法。这是解椭圆型微分方程的一类有效的数值方法,由于高度的通用性得到广泛的应用和迅速的发展。

* 郭友中, 吴学谋: 索伯列夫空间中的函数构造与误差估计, 科学技术文献出版社, 1964。

第二章 地震弹性波

本章研究地震波在各向同性均匀弹性介质中的传播, 论述与传输线理论的相似性.

§1 场 方 程

我们采用张量记法, 重复出现于同一项中的拉丁下标表示从 1 至 3 求和, 第一个下标表示应力或应变的方向, 第二个下标代表所在面的方向. 例如, σ_{ij} 代表 i 方向 j 面上的应力; ε_{ij} 代表 i 方向 j 面上的应变. 它们在坐标变换时服从张量变换的规律. 下面介绍的方程可以从任何一本弹性理论的专著中找到, 例如可以参阅参考文献 [5], [32] 或 [19]. 在坐标 $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2, x_3)$ 中, 有运动方程:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i &= \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}; \\ \sigma_{ij} &= \sigma_{ji} \quad (i, j = 1, 2, 3). \end{aligned} \right\} \quad (2.1.1)$$

式中 X_i 是 i 方向的外力, 外力矢量 $\mathbf{X} \equiv (X_1, X_2, X_3)$, ρ 是介质密度, u_i 是 i 方向的位移, 位移矢量 $\mathbf{u} \equiv (u_1, u_2, u_3)$.

几何方程:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{ij} &\equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right); \\ \varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{ji} \quad (i, j = 1, 2, 3). \end{aligned} \right\} \quad (2.1.2)$$

旋转矢量记作 $\mathbf{Q} \equiv (Q_1, Q_2, Q_3)$, 则

$$Q_k \equiv Q_{ij} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right). \quad (2.1.3)$$

i, j, k 与 1, 2, 3 的轮换次序相同. 这是将二阶张量 $\{T_{ij}\} \equiv$

$\{\partial u_i / \partial x_j\} \equiv \{u_{i,j}\}$ 作对称 $\{\varepsilon_{ij}\} \equiv \{u_{(i,j)}\}$ 与反称 $\{\varrho_{ij}\} \equiv \{u_{[i,j]}\}$ 分解的结果。有时张量的分量也简称为张量。

应力应变关系:

$$\sigma_{mn} = C_{mn}^{ij} \varepsilon_{ij}. \quad (2.1.4)$$

也称为一般 Hooke 定律, 或状态方程。在各向同性弹性均匀介质中, 简化为

$$\sigma_{ij} = \lambda \Theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}. \quad (2.1.4)^*$$

式中 δ_{ij} 是 Kroneker 记号: $i \neq j$ 时, $\delta_{ij} = 0$; $i = j$ 时, $\delta_{ij} = 1$. λ , μ 称为 Lamé 常数。工程上为了方便起见还采用弹性模量 E , Poisson 常数 ν 和体胀模量 κ , 剪切模量 G . 它们之间存在下面的关系:

$$\left. \begin{aligned} E &= \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}; \\ \nu &= \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}; \\ \kappa &= \frac{p}{\Theta} = \lambda + \frac{2\mu}{3}; \\ G &= \mu. \end{aligned} \right\} \quad (2.1.5)$$

式中 p 称为静水压力, 此时

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij} &= -p\delta_{ij}, \\ \Theta &\equiv \varepsilon_{ii}, \end{aligned} \right\} \quad (2.1.6)$$

称为体积膨胀。

由式(2.1.2)与(2.1.4)*, 当 $X_i = 0$ 时, 得

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} + \mu \nabla^2 u_i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (2.1.7)$$

式中 ∇^2 称为 Laplace 算子:

$$\nabla^2 \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right).$$

式(2.1.7)写成矢量形式, 有

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \text{grad } \Theta - 2\mu \text{rot } \boldsymbol{\Omega}. \quad (2.1.7)^*$$

方程(2.1.7)或(2.1.7)*称为波动方程或场方程。

Lamé 常数又称刚性常数,按刚性常数的大小,弹性体被分成三类:

- (1) 若 λ 与 μ 均为无限大,则物体称为刚体;
- (2) 若 $\mu = 0$,则物体称为流体;
- (3) 若 μ 取非零有限值,则物体称为固体。

由式(2.1.4)*, 刚体承受有限应力时,应变为0;流体只能承受静水压力。按 κ 值大小,流体又分为气体和液体,当 $\kappa = \infty$ 时,液体不可压缩,称为理想液体。

如果波在传播过程中保持介质的体积不变,即 $\Theta = 0$, 则由式(2.1.7)得:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \mu \nabla^2 u_i \quad (i = 1, 2, 3); \quad (2.1.8)$$

如果波在传播过程中位移是有势的,即 $u_i = \partial \phi / \partial x_i$, ϕ 称为势函数,则 $\mathcal{Q} = 0$, $\Theta = \nabla^2 \phi$, $\partial \Theta / \partial x_i = \nabla^2 u_i$, 方程(2.1.7)成为:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \nabla^2 u_i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (2.1.9)$$

在一般情况下,对 x_i 微分式(2.1.7),并求和,得

$$\rho \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \Theta; \quad (2.1.10)$$

对式(2.1.7)两端作 rot 运算,并注意

$$\text{rot} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial x_1}, \frac{\partial \Theta}{\partial x_2}, \frac{\partial \Theta}{\partial x_3} \right) = \text{rot} \cdot \text{grad} \Theta = 0,$$

即有

$$\rho \frac{\partial^2 \mathcal{Q}}{\partial t^2} = \mu \nabla^2 \mathcal{Q}. \quad (2.1.11)$$

满足波动方程(2.1.9),(2.1.10)的波一般称为膨胀波,它们是具有波速

$$\alpha \equiv \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.1.12)$$

的无旋转纵波,因而以称无旋波较为确切;满足波动方程 (2.1.8), (2.1.11)的波一般称为旋转波,它们是具有波速

$$\beta = \left(\frac{\mu}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.1.13)$$

的等体积横波,因而以称等积波较为确切。

因为 λ, μ 均为正数, $\alpha > \beta$,无旋波在介质中总是先于等积波而达到;所以前者又称为初波,简称 P 波,后者又称为次波,简称 S 波。从地震图上量得它们的走时差,可以计算测站的震中距、发震时间,由方位角、震源深度,找到震源位置。

流体 $\mu = 0$,因而 $\beta = 0$,所以等积波不能在流体中传播,这为液态矿藏的地震勘探提供了理论依据。

地球的大部分岩石 λ 与 μ 相差无几,可以忽略不计它们的区别,这时

$$\lambda = \mu, \kappa = \frac{5}{3}\mu, \nu = \frac{1}{4}, \alpha = \sqrt{3}\beta. \quad (2.1.14)$$

这些关系都叫做 Poisson 关系。

熟知的其它结果将在第三章中作为弹性波理论的推广再行详细介绍。恒等号“ $\equiv$ ”表示书中初次出现的符号的定义。

§ 2 传输线相似性

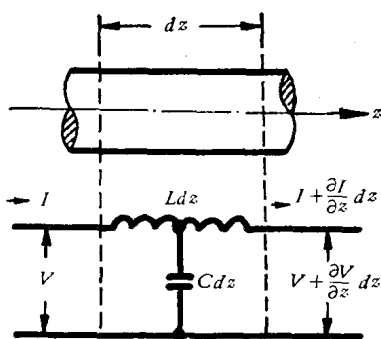


图 2.2.1 传输线

传输线可用图 2.2.1 所示的等价电路来表达。电压 V 及电流 I 满足传输线方程:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial z} &= -L \frac{\partial I}{\partial t}; \\ \frac{\partial I}{\partial z} &= -C \frac{\partial V}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (2.2.1)$$

式中 L 是分布电感, C 是分布电容。由方程(2.2.1)可得:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} &= LC \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial^2 I}{\partial z^2} &= LC \frac{\partial^2 I}{\partial t^2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.2.1)^*$$

如果传输线有串联分布电阻 R , 阻容分路电流等泄漏时, 引入泄漏系数 G , 则得有耗散的传输线方程, 即电报方程:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial z} &= -L \frac{\partial I}{\partial t} - RI; \\ \frac{\partial I}{\partial z} &= -C \frac{\partial V}{\partial t} - GV. \end{aligned} \right\} \quad (2.2.2)$$

分别消去 V 或 I 后, 得到:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} &= LC \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + (CR + GL) \frac{\partial V}{\partial t} + GRV; \\ \frac{\partial^2 I}{\partial z^2} &= LC \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} + (CR + GL) \frac{\partial I}{\partial t} + GRV. \end{aligned} \right\} \quad (2.2.2)^*$$

正是基于对传输线方程 (2.2.1) 的研究, 近代无线电理论中发展了一套较为成熟的方法. 我们将要用到的有关传输线理论的知识可以从参考文献 [36] 中找到. 为了揭示波动现象间的传输线相似性, 考虑平面矢量波的情况.

设 $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ 为平面波传播方向的单位矢量, n_i 为 x_i 方向的方向余弦:

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1.$$

波的传播速度记作 γ , 令

$$\zeta \equiv t - \frac{\mathbf{n}\mathbf{x}}{\gamma}, \quad (2.2.3)$$

则函数

$$\mathbf{U} \equiv \mathbf{U}^+ \left(t - \frac{\mathbf{n}\mathbf{x}}{\gamma} \right) + \mathbf{U}^- \left(t + \frac{\mathbf{n}\mathbf{x}}{\gamma} \right) \quad (2.2.4)$$

满足波动方程

$$\frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} = \gamma^2 \left(\frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial x_3^2} \right), \quad (2.2.5)$$

代表一个任意形状的传播波。 $\mathbf{U}^+$ 是沿 $\mathbf{n}$ 正向传播的矢量波， $\mathbf{U}^-$ 是沿 $\mathbf{n}$ 负向传播的矢量波。它们的具体形式取决于定解条件。

当波动满足一定条件时，对于 $\mathbf{U}$ 的任一分量均可写成熟知的 Fourier 积分的形式：

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{U}(\zeta) \equiv \mathbf{U}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} V(\omega) e^{i\omega\zeta} d\omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} V(\omega) e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{x})} d\omega; \\ V(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{U}(\zeta) e^{-i\omega\zeta} d\zeta \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{U}(\mathbf{x}, 0) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} d\mathbf{x}. \end{aligned} \right\} \quad (2.2.6)$$

这样，波动现象的研究就简化为对展式中相应于一定圆频率 ω 的单色谐波的复数形式

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \equiv V(\omega) e^{i\omega\zeta} \quad (2.2.7)$$

的研究，作物理解释时，可视方便取实部或虚部。而 $k \equiv \frac{\omega}{\gamma}$ 称为相位常数，波数，或波矢 $\mathbf{k} \equiv k\mathbf{n}$ 的模。 $2\pi/\omega \equiv f$ 为周期； $2\pi/k \equiv \lambda$ 为波长。

不失一般性，可将 $\mathbf{n}$ 取为 x_1 方向而将方程 (2.2.5) 的任一分量 u 分解为两个一阶方程。为此，引入函数 π 并略去原来的下标，得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\rho \frac{\partial \pi}{\partial t}; \\ \frac{\partial \pi}{\partial x} &= -\xi^{-1} \frac{\partial u}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (2.2.8)$$

式中参数 ρ, ξ 满足关系

$$\xi = \gamma^2 \rho. \quad (2.2.9)$$

我们将在下节证明：在弹性波的情况下，各向同性无限介质中，只能有两种不同的传播速度：当 $\gamma = \alpha$ 时， $\xi = \lambda + 2\mu$ ， $u = u_1$ ； $\gamma = \beta$ 时， $\xi = \mu$ ， $u = u_2$ 或 u_3 。我们把一个单色波写成

u 等形式是为了便于书写它的振幅 u 等。

比较方程 (2.2.1) 与 (2.2.8)，得到如下的变量和参数相似关系：

$$V \sim u; I \sim \pi; L \sim \rho; C \sim \xi^{-1}. \quad (2.2.10)$$

显然，方程组 (2.2.8) 是一组狭义双曲型方程，通过每一点有两条特征线。特征方程为

$$\begin{vmatrix} \lambda & -\xi \\ -\rho^{-1} & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{\xi}{\rho} = \lambda^2 - \gamma^2 = 0. \quad (2.2.11)$$

它们的特征方向是

$$\frac{dx}{dt} = \pm \gamma. \quad (2.2.12)$$

特征方向是解的弱间断传播的方向。

通过变换

$$\left. \begin{aligned} u^* &= \xi^{-\frac{1}{2}} u + \rho^{\frac{1}{2}} \pi, \\ \pi^* &= \xi^{-\frac{1}{2}} u - \rho^{\frac{1}{2}} \pi, \end{aligned} \right\} \quad (2.2.13)$$

方程组 (2.2.8) 即化为对角型：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u^*}{\partial x} &= -\gamma^{-1} \frac{\partial u^*}{\partial t}; \\ \frac{\partial \pi^*}{\partial x} &= +\gamma^{-1} \frac{\partial \pi^*}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (2.2.8)^*$$

对角型方程说明，沿特征线 $\gamma t \pm x = \text{const}$ ，函数 u^* ， π^* 的方向导数为 0，因而函数自身分别取常数值。因此，给出 $t = 0$ 时 u 与 π （亦即 u^* 与 π^* ）的值后，方程组 (2.2.8) 在 $t > 0$ 时的解也就立即确定了。事实上，沿特征线 $\gamma t - x = C^+$ （常数），有

$$du^* = \left(\frac{\partial u^*}{\partial x} + \gamma^{-1} \frac{\partial u^*}{\partial t} \right) dx = 0,$$

而

$$u^* = u^* \left(t - \frac{x}{\gamma} \right) = u^* \left(\frac{C^+}{\gamma} \right); \quad (2.2.14)$$

沿特征线 $\gamma t + x = C^-$ （常数），有

$$d\pi^* = \left(\frac{\partial \pi^*}{\partial x} - \gamma^{-1} \frac{\partial \pi^*}{\partial t} \right) dx = 0,$$

而

$$\pi^* = \pi^* \left(t + \frac{x}{\gamma} \right) = \pi^* \left(\frac{C^-}{\gamma} \right). \quad (2.2.15)$$

过任一点 (x, t) 存在两条特征线 $\gamma t \pm x = C^\mp$, 因此, 由式(2.2.13), 解之得

$$\left. \begin{aligned} u(x, t) &= \frac{\xi^{\frac{1}{2}}}{2} \left[u^* \left(t - \frac{x}{\gamma} \right) + \pi^* \left(t + \frac{x}{\gamma} \right) \right], \\ \pi(x, t) &= \frac{\rho^{-\frac{1}{2}}}{2} \left[u^* \left(t - \frac{x}{\gamma} \right) - \pi^* \left(t + \frac{x}{\gamma} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (2.2.16)$$

解(2.2.16)写成正传波与反传波的形式, 得

$$\left. \begin{aligned} u(x, t) &\equiv u^+ \left(t - \frac{x}{\gamma} \right) + u^- \left(t + \frac{x}{\gamma} \right), \\ \pi(x, t) &\equiv \pi^+ \left(t - \frac{x}{\gamma} \right) + \pi^- \left(t + \frac{x}{\gamma} \right). \end{aligned} \right\} \quad (2.2.16)^*$$

式中

$$\begin{aligned} u^+ \left(t - \frac{x}{\gamma} \right) &\equiv \frac{\xi^{\frac{1}{2}}}{2} u^* \left(t - \frac{x}{\gamma} \right), \\ u^- \left(t + \frac{x}{\gamma} \right) &\equiv \frac{\xi^{\frac{1}{2}}}{2} \pi^* \left(t + \frac{x}{\gamma} \right), \\ \pi^+ \left(t - \frac{x}{\gamma} \right) &\equiv \frac{\rho^{-\frac{1}{2}}}{2} u^* \left(t - \frac{x}{\gamma} \right), \\ \pi^- \left(t + \frac{x}{\gamma} \right) &\equiv -\frac{\rho^{-\frac{1}{2}}}{2} \pi^* \left(t + \frac{x}{\gamma} \right). \end{aligned}$$

根据前面与传输线理论的相似性, 我们定义介质的特征阻抗为

$$Z_0 \equiv \frac{u^+}{\pi^+} = (\rho \xi)^{\frac{1}{2}} = \rho \gamma. \quad (2.2.17)$$

特征阻抗的倒数称为特征导纳。由于特征阻抗概念的重要性, 下面我们还要从不同角度专门加以讨论。

特征阻抗是对正传波定义的,它对所有的 x 都不变,对反传波,特征阻抗取负值.对于正反两向传播波的组成波,特征阻抗不是常数.

在物理学中,形为

$$X(\mathbf{x}) \cdot T(t) \quad (2.2.18)$$

的扰动称为驻波.平面波可作为这种驻波的叠加:

$$U(\mathbf{x}, t) = \Sigma X(\mathbf{x}) \cdot T(t). \quad (2.2.19)$$

这就是分离变量法的物理来源.

利用人工激发 P 波和 S 波,测定它们在介质中的传播速度 α , β 和介质密度 ρ ,可以由式(2.2.17)方便地计算介质的特征阻抗 Z_0^P 和 Z_0^S ,如表 2.2.1 所示.

表 2.21. 波速和特征阻抗

岩 性	ρ (10^3 公 斤/米 ³)	α (10^3 米/秒)		β (10^3 米/秒)		Z_0^P (10^3 公斤/ 米 ² 秒)		Z_0^S (10^3 公斤/ 米 ² 秒)	
		室内	野外	室内	野外	室内	野外	室内	野外
石 灰 岩	2.42	3.43	2.75	1.86	0.89	8.3	6.7	4.5	2.2
页 岩	2.71	5.75	2.35	3.32	0.87	15.6	6.4	9.0	2.4
花 岗 岩	2.60	5.20	4.96	3.10	2.48	13.5	12.9	8.1	6.5
片 麻 岩	2.85	6.08	5.60	3.37	2.80	17.3	15.9	9.6	8.0
辉 绿 岩	2.87	6.34	6.00	3.56	3.24	18.2	17.2	10.2	9.3

必须注意,由于岩体本身的复杂性以及试验和测量方法的差异,岩石的各种物理和力学数据目前相差很大,对此可以参看文献[43]和[6].

由表列数据,根据式(2.1.12)及(2.1.13)可以计算介质的 Lamé 常数 λ 和 μ ; 由 λ 和 μ 可以根据式(2.1.5)计算介质的弹性模量 E , Poisson 常数 ν 和体胀模量 κ . 波速的改变反映介质力学性质的改变,例如 κ 值的改变,是利用扩容现象预报地震的重要参数.

§ 3 相速,群速和频散

相速,群速和频散这些概念是研究波动问题经常遇到的,我们

将结合存在内摩擦的介质,讨论相应于方程(2.2.2)*的波动方程:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} = \gamma_0^{-2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \tau \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \kappa^2 \mathbf{u}, \quad (2.3.1)$$

式中

$$\gamma_0^2 = \frac{\xi}{\rho}, \quad \tau = \mathcal{S}\rho + \frac{R}{\xi}, \quad \kappa^2 = \mathcal{S}R.$$

考虑形式为(2.2.7)的解:

$$\mathbf{u} = u(\omega)e^{j\xi\omega} = u(\omega)e^{j(\omega t - kx)} = u(\omega)e^{j(\omega t - \dot{k}x)}. \quad (2.3.2)$$

以此代入式(2.3.1),得

$$k^2 + \kappa^2 + \frac{\omega^2}{\gamma_0^2} - j\omega\tau = 0. \quad (2.3.3)$$

显然 k 必须是复数,称为传播常数:

$$k \equiv \dot{k} + j\hat{k}, \quad \gamma \equiv \frac{\omega}{\dot{k}}. \quad (2.3.4)$$

式(2.3.3)成为:

$$\left. \begin{aligned} \dot{k}^2 - \hat{k}^2 + \kappa^2 - \frac{\omega^2}{\gamma_0^2} &= 0; \\ 2\dot{k}\hat{k} - \omega\tau &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.3.5)$$

因此,式(2.3.2)可以写成:

$$\mathbf{u} = [u(\omega)e^{-\hat{k}x}]e^{j(\omega t - \dot{k}x)}. \quad (2.3.2)^*$$

由此可见,这是一种以指数 $e^{-\hat{k}x}$ 形式衰减的阻尼波,耗散波,不均匀波或流变波. 传播速度 $\gamma = \omega/\dot{k}$ 由式(2.3.5)的第一式可见与频率有关. 因此, $\hat{k}$ 称为衰减常数, $\dot{k}$ 仍称相位常数.

当 $R = \mathcal{S} = 0$ 时,方程(2.3.1)就是(2.2.1)*, $\kappa = \tau = 0$, $\hat{k} = 0$, $\gamma = \gamma_0$ 与频率无关,式(2.3.2)是一个单色谐波.

保持瞬时相位 $(\omega t - kx)$ 不变的传播速度称为相速,记作 v_p . 因此

$$v_p \equiv \frac{\partial x}{\partial r} \Big|_{(\omega t - kx) = \text{const}} = \frac{\omega}{\dot{k}} = \gamma. \quad (2.3.6)$$

我们看到,对于单色谐波,相速与波速一致. 我们说的波速系指垂直于波阵面的传播速度. 以后将会遇到,当研究单色谐波倾斜于

波阵面法线方向传播时,相速大于波速。这样,相速可以大于光速,因为这不是粒子运动的速度,所以并不违背相对论。

一个任意扰动用 Fourier 积分展开成单色谐波之和的时候,如果每一频率分量,或 Fourier 分量,具有相同的相速,并且没有衰减,则扰动在传播过程中形状不会改变,只是在传播时间上滞后 x/v_p 。这就是 Huygens 原则。

在方程 (2.3.1) 的情况,如上所述,相速与频率有关:相速大的 Fourier 分量将跑到相速小的分量前面,从而发生所谓相移。因此,传播到某点上的波的各分量的叠加将产生与输入时完全不同的波形,称为频散。这样,对扰动作出单独的传播速度的定义就失去了意义。

当频散很小时,试考察下面的谐波组合扰动:

$$\sin(\omega - d\omega)t + \sin(\omega + d\omega)t. \quad (2.3.7)$$

如果在传播过程中振幅保持不变(或具有相同的衰减),则传播途径上任一点的波形将为:

$$\begin{aligned} \sin[(\omega - d\omega)t - (\dot{k} - d\dot{k})x] + \sin[(\omega + d\omega)t \\ - (\dot{k} + d\dot{k})x] = 2 \cos[(d\omega)t \\ - (d\dot{k})x] \sin(\omega t - \dot{k}x). \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

上式表明,合成波是一个振幅随一低频波起伏的高频波,把它的包络

$$2 \cos[(d\omega)t - (d\dot{k})x] \quad (2.3.9)$$

看作行波,则相速

$$\gamma_g \equiv \frac{d\omega}{d\dot{k}} \quad (2.3.10)$$

称为波 (2.3.8) 的群速,这个定义对于频散程度不大时是一个良好的近似。

关系

$$k = k(\omega) \quad (2.3.11)$$

称为频散方程或色散关系,其图象称为频散曲线或色散曲线。此时式 (2.2.6) 代表一个一般的波包: