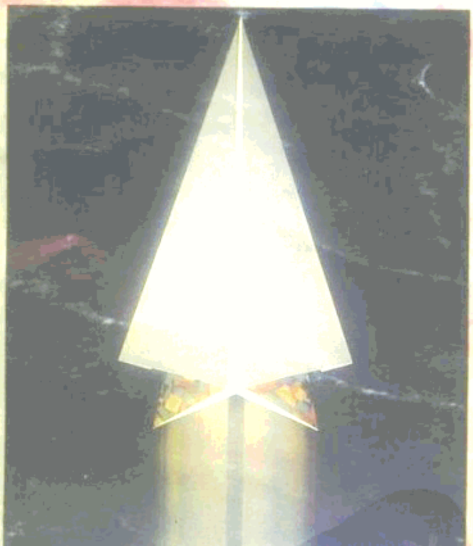
高等学校教材

理论力学

下册

第二版



谭广泉 罗龙开 范长锋 谢广达 编

华南理工大学出版社

高等学校教材

理论力学

下册

（[illegible]版）

谭广泉 罗[illegible] 范长锋 谢广达 编

华南理工大学出版社
·广州·

图书在版编目(CIP)数据

理论力学(下册)(第二版)/谭广泉等编. —2版. —广州:华南理工大学出版社,1995.11

ISBN 7-5623-0005-4

Ⅰ.理…

Ⅱ.谭…

Ⅲ.理论力学-高等学校-教材

Ⅳ.O31

责任编辑:周绍华　罗月花

华南理工大学出版社出版发行

(广州五山·邮编 510641)

各地新华书店经销

广东省封开印刷厂印刷

开本 850×1168　1/32　印张 10.875　字数 272 千

1987 年 12 月第 1 版　1995 年 11 月第 2 版第 2 次印刷

印数:10001—15000

定价:11.00 元

目　录

第三篇　动　力　学

第四篇 分析力学初步

第三篇 动 力 学

在静力学中，研究了作用于物体上的力系的简化和平衡问题，而没有研究物体在不平衡力系作用下将如何运动。在运动学中，研究了物体运动的几何性质，而没有涉及物体所受的力。在动力学中，将把上述未研究的两方面问题联系起来，即研究物体的机械运动与作用在物体上的力之间的关系，从而建立物体机械运动的普遍规律。

动力学采用的力学模型是质点和质点系（包括刚体）。质点是具有质量而几何形状和尺寸大小可忽略不计的物体。当忽略物体的几何形状和尺寸大小而不影响所研究问题的结果时，可将该物体抽象为质点。例如研究地球环绕太阳的运行规律时，可将地球看为质点。如果物体的大小在所研究的问题中不能忽略，则应抽象为质点系。例如研究地球自转时，则应把它看为一刚体（质点系），而不能再看作质点。质点系是有限或无限个质点的集合。任何物体（包括固体、液体、气体）都可看为质点系。刚体是各质点间距离保持不变的质点系。

动力学的理论基础是牛顿（Isaac Newton，1642—1727）运动定律（即通称的牛顿三定律）。在牛顿以前，伽利略（Galileo Galilei）等人已经建立了许多动力学的基本概念和定律。牛顿集前人之大成，于 1687 年在他的名著《自然哲学的数学原理》中，系统地提出并论述了物体运动的基本定律，从而确立了古典力学的理论体系。

牛顿运动定律可通俗地表述为：

第一定律(惯性定律)

任何物体都保持静止或匀速直线运动状态，除非其它物体有力作用迫使它改变这种状态。

第二定律(力与加速度关系定律)

物体受到外力作用时，其获得的加速度的大小与合外力的大小成正比，并与物体的质量成反比；加速度的方向与合外力的方向相同。

第三定律(作用与反作用定律)

两物体之间的作用力与反作用力总是同时存在，大小相等，方向相反，并沿同一作用线分别作用在该两物体上。

牛顿运动定律是在实验的基础上建立起来的，它只对某些参考系成立。牛顿定律适用的参考系，称为惯性参考系。实践表明，在一般的工程问题中，把固连于地球的参考系作为惯性参考系，具有足够的精确度。必须指出，以牛顿运动定律为基础建立起来的古典力学，把质量看为是不变的量，把时间和空间看为与物体的运动无关。但近代物理的研究成果表明，质量、时间和空间都与物体运动的速度有关。可见，这里存在着矛盾。不过在物体的速度远小于光速的宏观力学中，运动速度对质量、时间和空间的影响甚微，完全可以忽略。因此，应用古典力学解决一般工程问题是合适的。

动力学的形成和发展与社会生产力的发展密切相联，特别在工业和科技迅速发展的今天，对动力学提出的课题更是复[illegible]，例如高速旋转机械的均衡、振动和稳定，控制系统的动态特性和稳定性，人造地球卫星及宇宙火箭的发射和运行等等问题。虽然我们不可能在理论力学中讨论这些专门问题，但是理论力学中的动力学基本理论和分析方法，却是研究上述问题的必要基础。

本书采用国际单位制(SI)，以长度、时间和质量为基本量，单位分别为米(m)、秒(s)和千克(kg)，称为基本单位，其它量为导出

量，相应称为导出单位。

第十四章　质点运动微分方程

本章将应用牛顿运动定律和有关的基本概念，建立质点的运动微分方程。

§14-1　质点运动微分方程

将牛顿运动第二定律表达式$\left(\text{即 } m\boldsymbol{a}=\sum \boldsymbol{F}\right)$中质点的加速度表示为质点的矢径或坐标对时间的二阶导数形式的方程，称为质点的运动微分方程。

一、质点运动微分方程的矢量形式

设质量为m的质点M在力系$\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{F}_n$的作用下运动，它在惯性参考系$Oxyz$中的位置用矢径$\boldsymbol{r}$表示，根据牛顿运动第二定律，有

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i \tag{14-1}$$

这便是矢量形式的质点运动微分方程。

在计算工程问题时，往往应用它的投影形式。

二、质点运动微分方程的直角坐标形式

将矢量方程式(14-1)投影到直角坐标系$Oxyz$的坐标轴上，可得

$$
\left.\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} &= \sum_{i=1}^{n}F_{ix}\\
m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} &= \sum_{i=1}^{n}F_{iy}\\
m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} &= \sum_{i=1}^{n}F_{iz}
\end{aligned}\right\}
\qquad (14\text{-}2)
$$

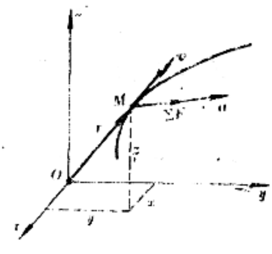


图 14-1

式中 x、y、z 为质点的坐标；$\sum_{i=1}^{n}F_{ix}$、$\sum_{i=1}^{n}F_{iy}$、$\sum_{i=1}^{n}F_{iz}$ 分别是作用在质点上的诸力在 x、y、z 轴上投影的代数和。式(14-2)便是直角坐标形式的质点运动微分方程。

三、质点运动微分方程的自然轴形式

将矢量方程式(14-1)投影到自然轴上(图 14-2)，可得

$$
\left.\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= \sum_{i=1}^{n}F_{i\tau}\\
m\frac{v^2}{\rho} &= \sum_{i=1}^{n}F_{in}\\
0 &= \sum_{i=1}^{n}F_{ib}
\end{aligned}\right\}
\qquad (14\text{-}3)
$$

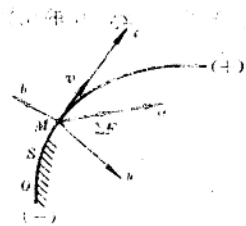


图 14-2

式中 $\sum_{i=1}^{n}F_{i\tau}$、$\sum_{i=1}^{n}F_{in}$、$\sum_{i=1}^{n}F_{ib}$ 分别是作用在质点上的诸力在切线、主法线和副法线上投影的代数和；ρ 为轨迹在 M 点处的曲率半径；v 是质点的速度。式(14-3)便是自然轴形式的质点运动微分方程。其中第三式说明，作

用于质点上的诸力在副法线方向成平衡，可见，该力系的合力总是在 τ、n 所确定的平面（密切面）内的。

式(14-2)、(14-3)是两种常用的质点运动微分方程。在质点运动轨迹已知的情况下，采用自然轴形式的方程，往往会来得方便。

§14-2 质点运动微分方程的应用举例

应用质点运动微分方程可求解质点动力学的两类基本问题：一是已知质点的运动规律，求作用于质点上的力，这归结为微分问题；二是已知作用于质点的力，求质点的运动规律，这归结为解微分方程，即积分问题，积分时出现的积分常数，由质点运动的初始条件（即初始位置和初始速度）决定。作用于质点上的力可能是常力或变力，变力可能是时间的函数、质点位置的函数、质点运动速度的函数或同时是上述三种变量的函数；只有当函数关系较简单时，才能求得微分方程的精确解，当函数关系复杂时，求解将非常困难，有时只能求出近似解。

下面举例应用质点运动微分方程解质点动力学两类问题。

例 14-1 电梯以匀加速度 a 上升，求置于电梯底板上重为 G 的物块 M 对底板的压力，如图 14-3 所示。

解 物块 M 随电梯一起作平动，可视为质点，它的加速度等于电梯的加速度。这是已知质点的运动，求作用于质点上的力的问题。

研究对象：质点 M。

分析受力：质点 M 受主动力 G 和底板的约束反力 N 的作用。

分析运动：质点 M 作匀加速直线运动。取 y 轴铅直向上为正。

建立方程并求解：根据直角坐标形

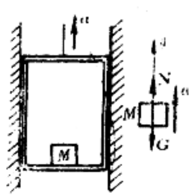


图 14-3

式的质点运动微分方程

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=\sum_{i=1}^{n}F_{iy}$$

有

$$\frac{G}{g}a=N-G$$

由此解得

$$N=G(1+\frac{a}{g})$$

物块 M 对底板的压力 N' 与 N 等值反向，即

$$N'=G(1+\frac{a}{g})$$

该式表明，压力 N' 由两部分组成，一部分等于 G，纯是物块的重量引起的，称为静压力；另一部分等于 $G\times\frac{a}{g}$，是由电梯加速运动引起的，称为附加动压力。全部压力 N' 称为动压力。本例中动压力大于静压力，此时如果电梯里站着人，他将会感到很沉重，这种现象称为超重或过载。

如果加速度 $\boldsymbol{a}$ 向下，动压力将为

$$N'=G\left(1-\frac{a}{g}\right)$$

这时压力小于静压力。此时站在电梯里的人将会感到轻飘飘的，这种现象称为失重。特别是当 $a=g$ 时，$N'=0$，达到完全失重状态，此时人将脱离电梯底板，人、电梯各自自由降落，互不影响。

例 14-2 曲柄连杆机构中，滑块 B 的运动方程近似为：

$$x=r\left(1+\frac{\lambda}{4}-\cos\omega t-\frac{\lambda}{4}\cos2\omega t\right)$$

式中 $\lambda=\frac{r}{l}$，$\varphi=\omega t$，r 为曲柄的长度，l 为连杆的长度，ω 为曲柄的角速度，设为一常量，坐标原点 O 设在滑块离 O_1 轴最远的点上，如图 14-4a 所示。设滑块的重量为 G，略去连杆的质量及各处的摩擦，求当 $\varphi=\frac{\pi}{2}$ 时，连杆 AB 所受的力。

解 滑块 B 作平动，可视为质点。这是已知运动求力的问题。

取质点 B 为研究对象。它所受的力有：主动力 $\boldsymbol{G}$，滑道的约束力 $\boldsymbol{N}$，连杆

(二力杆)的约束反力 S，如图 14-4b 所示。

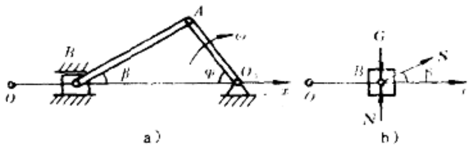


图 14-4

质点 B 作变速直线运动。取 x 轴水平向右为正。根据直角坐标形式的质点运动微分方程

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=\sum_{i=1}^{n}F_{ix}$$

有

$$\frac{G}{g}r\omega^2(\cos\omega t+\lambda\cos2\omega t)=S\cos\beta$$

当 $\varphi=\omega t=\frac{\pi}{2}$ 时，$\cos\beta=\frac{\sqrt{l^2-r^2}}{l}$，代入上式得

$$-\frac{G}{g}r\omega^2\lambda=S\frac{\sqrt{l^2-r^2}}{l}$$

故

$$S=-\frac{Gr\omega^2\lambda}{g\sqrt{1-\lambda^2}}$$

连杆 AB 所受的力 S' 与 S 等值反向，即

$$S'=-\frac{Gr\omega^2\lambda}{g\sqrt{1-\lambda^2}}$$

S' 为负值，表示连杆 AB 受压。

例 14-3 质量为 $m=10\text{kg}$ 的质点 M，在变力 $F=F_0(1-Ct)\text{N}$ 作用下，沿直线轨迹运动，其中 $F_0=98\text{N}$，$C=1\ 1/\text{s}$，t 以 s 计。设 M 的初速 $v_0=0.2\ \text{m/s}$，且力的方向与初速的方向一致。试求 M 的运动规律。

解　这是已知力求运动的问题，变力是时间的函数。

取质点 M 为研究对象。它在运动过程中，仅受力 $F=F_0(1-Ct)$ 的作用。

质点 M 作变速直线运动。取直线轨迹为 x 轴，原点设在质点 M 的初始位置上。其运动的微分方程为

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F_0(1-Ct) \tag{a}$$

将该式对 t 连续积分两次，即可求得质点 M 的运动规律。积分时可采用定积分，而把初始条件作为积分限引入。已知运动的初始条件是：$t=0$ 时，$x_0=0$，$v_0=0.2$ m/s。

将式(a)对 t 积分一次：

$$\int_{v_0}^{v}dv=\int_0^t\frac{F_0}{m}(1-Ct)dt$$

得

$$v=\frac{dx}{dt}=v_0+\frac{F_0}{m}\left(t-\frac{1}{2}Ct^2\right) \tag{b}$$

将式(b)对 t 又积分一次：

$$\int_0^x dx=\int_0^t\left[v_0+\frac{F_0}{m}\left(t-\frac{1}{2}Ct^2\right)\right]dt$$

得

$$x=v_0t+\frac{F_0}{2m}\left(t^2-\frac{C}{3}t^3\right)$$

将已知数值代入，解得

$$x=0.2t+4.9t^2-\frac{4.9}{3}t^3\ \text{m}$$

这就是要求的质点 M 的 的运动规律。

例 14-4　质量为 m 的物体 M，在下沉力 P（重力和浮力之差）和水的阻力 $R=-\mu v$（μ 为阻力系数，v 为下沉速度）①作用下向静止的水中缓慢下沉，如图 14-5 所示。设物体由液面从静止开始下沉，试求物体的速度和运动规律。

---

① 由实验知，当物体的运动速度不大时，液体阻力 R 的大小与物体速度的一次方成正比。

解 物体 M 作平动，可视为质点。这是已知力求运动的问题，变力是速度的函数。

取物体 M 为研究对象。它所受的力有：下沉力 $\boldsymbol{P}$，水的阻力 $\boldsymbol{R}$。

物体 M 作变速直线运动。取 x 轴向下为正，并以运动的起始点为坐标原点 O。物体 M 的运动微分方程为

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=P-R$$

即

$$m\frac{dv}{dt}=P-\mu v$$

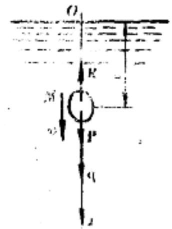


图 14-5

分离变量，并取定积分，v 从零到 v，t 从零到 t，有

$$\int_0^v \frac{m dv}{P-\mu v}=\int_0^t dt$$

积分得

$$\frac{m}{\mu}\ln\frac{P}{P-\mu v}=t$$

于是得

$$v=\frac{P}{\mu}\left(1-e^{-\frac{\mu}{m}t}\right) \tag{a}$$

这就是物体 M 下沉速度的变化规律。随着时间 t 的增加，$e^{-\frac{\mu}{m}t}$ 将逐渐减小，当 $t\to\infty$ 时，速度 v 趋近于一极限值 $v_m=\frac{P}{\mu}$，称为极限速度，此时加速度等于零，物体将匀速下沉。

为了求出物体 M 的运动规律，只需将式(a)再积分一次：

$$\int_0^x dx=\frac{P}{\mu}\int_0^t\left(1-e^{-\frac{\mu}{m}t}\right)dt$$

解得

$$x=\frac{P}{\mu}t-\frac{mP}{\mu^2}\left(1-e^{-\frac{\mu}{m}t}\right)$$

这就是物体 M 的运动规律。

例 14-5 球磨机转筒的直径 $D=3.2\text{m}$,绕通过中心的水平轴匀速转动,筒内铁球由筒内壁上的凸棱带着上升,如图 14-6a 所示。已知铁球转动到 $\alpha_0=54°20'$ 时脱离转筒,可得到最大的打击力。求转筒应有的转速 n 。

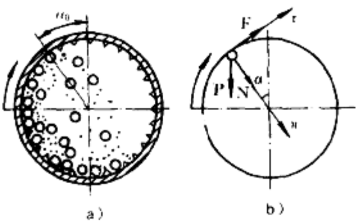


图 14-6

解 铁球可视为质点。这是两类问题综合在一块的质点动力学问题。

取一铁球为研究对象。它被转筒带着上升过程中,受到重力 $\boldsymbol{P}$,筒壁的法向反力 $\boldsymbol{N}$ 和切向反力 $\boldsymbol{F}$ 的作用。

铁球被转筒带着沿圆弧向上运动,当其运动到 $\alpha=\alpha_0$ 角时,便脱离筒壁而沿抛物线下落。取自然轴如图 14-6b 所示。列出铁球的运动微分方程在主法线方向的投影式

$$\frac{P}{g}\frac{v^2}{\frac{D}{2}}=N+P\cos\alpha \tag{a}$$

铁球未脱离筒壁前的速度等于筒壁上那点的速度,即

$$v=\frac{D}{2}\omega=\frac{D}{2}\frac{\pi n}{30}$$

代入式(a),解得

$$n=\frac{30}{\pi}\left[\frac{2g}{PD}(N+P\cos\alpha)\right]^{\frac{1}{2}}$$

依题意,当 $\alpha=\alpha_0$ 时,铁球下落,这时 $N=0$,于是得

$$n = \frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{2g\cos\alpha_0}{D}} \tag{b}$$

将已知数值代入，解得

$$n = 18\ \mathrm{r/min}$$

从式(b)可知，α_0 越小，要求 n 越大，当 $n = \frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{2g}{D}}$ 时，$\alpha_0 = 0$，这说明铁球将紧贴筒壁运动过最高点而不下落，起不到粉碎矿石的作用。

综合以上各例可见，不论是已知质点的运动求作用于质点的力，或已知作用于质点的力求质点的运动，或其综合问题，都必须分析质点的受力情况，正确地作出受力图；分析质点的运动情况，选定适当的坐标系；建立相应的运动微分方程，然后求解。对于已知作用于质点的力求质点的运动的问题，求解过程一般需要积分，积分时常采用两种分离变量积分法，即 $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ 与 $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}v$；要注意利用运动的初始条件确定积分常数（或积分限），以使问题得到确定的解。

习　题

14-1　三个质量相同的质点，在某瞬时的速度如图所示。此后，如果对它们作用大小、方向相同的力 $\boldsymbol{F}$，问质点的运动情况是否相同？为什么？

14-2　如果说质点的速度越大，所受的力就越大，对吗？为什么？

14-3　设质量为 m 的小球 M 在坐标平面 Oxy 内运动，如图所示，其运动方程为

$$x = a\cos\omega t$$

$$y = b\sin\omega t$$

其中 a、b、ω 皆为常量，求作用于小球的力。

答：$\boldsymbol{F} = -m\omega^2\boldsymbol{r}$。

14-4　用绞车沿斜面提升质量为 m 的重物 M，斜面的仰角 α，如图所示。斜面与重物间的动滑动摩擦系数为 f'，绞车的鼓轮按 $\varphi = \frac{1}{2}\varepsilon t^2$ 的规律转动，