

无綫电电子学译丛

参 量 放 大 器

—— II ——

科学出版社

无綫电电子学譯丛

参量放大器

(II)

南 微 編 譯

科 学 出 版 社

1962

內 容 簡 介

本书搜集了 1958 年以来 在国外期刊中所发表的有关参量放大器的研究論文 10 篇, 其中包括参量放大的一般介紹 1 篇, 参量放大的基本理論 3 篇, 半导体二极管諧振腔式参量放大器的論文 2 篇, 行波式参量放大器論文 1 篇, 电子束式参量放大器論文 3 篇。

本书可供无綫电电子学和固体电子学研究者参考。

无綫电电子学譯丛 参 量 放 大 器 (II)

南 微 編 譯

*

科学出版社出版 (北京朝陽門大街 117 号)

北京市书刊出版业营业許可証出字第 061 号

中国科学院印刷厂印刷 新华书店总經售

*

1962 年 8 月第 一 版

书号: 2561 字数: 131,000

1962 年 8 月第一次印刷

开本: 850 × 1168 1/32

(京) 0001—7,020

印张: 5 1/8

定价: 0.80 元

編譯者的話

近年來，由於指出了可变电抗可能作為低噪音微波放大器的前景，人們對它發生了極大的興趣並予以密切的注意。電子束式、諧振腔式以及行波式參量放大器的理論都已經建立，實驗結果亦都証實了這類器件的低噪音的性質。國外期刊上不斷涌現了大量的有關論文；這套譯叢就是為介紹這些研究成果而出版的。

本書是參量放大器譯文集的第二集，一共搜羅了英、俄文有關論文 10 篇。其中包括一般的介紹論文 1 篇，參量放大的基本理論 3 篇，二極管諧振腔式論文 2 篇，行波式論文 1 篇，電子束式論文 3 篇。

在第一篇論文中，Danielson 用簡單的低頻電路以及與它相似的機械模型，對於參量放大器的工作原理進行了描述。他並且定性地把這些原理推廣到低噪音微波放大，着重地指出了其中所包含的物理過程；只有當能量從微波振蕩器（簡稱注入源）傳遞給訊號頻率時，才能產生放大。同時他着重地指出了這種傳遞的過程只能在可变电抗的電路中才能發生，而在可变电阻的電路中不可能有這種傳遞。他還討論了這種器件的主要噪音源，並指出象頻（或無功頻率）所起的作用。最後他給出了四種不同的參量放大器（三種是用半導體二極管，一種則用鐵氧體）的實驗數據。

第二篇論文是 Rowe 用小訊號理論對非綫性元件的一些性質所進行的分析。他指出，在只有兩個訊號頻率出現的情況下，非綫性電容調制器、解調器和負電導放大器的理論分析結果與第一部分（能量的普遍關係）中所獲得的結果完全一致（論文的第一部分已收入參量放大器譯文集第 1 集）。此外，這篇文章還給出了這些器件的增益、帶寬、終端導納以及對終端導納或本地振蕩器激勵的變化的靈敏度，與它們對非綫性程度的依賴關係。一般說來，當非

綫性程度減小到零時,這些器件的帶寬亦趨近於零。

在第三篇論文里, Valdes 証明了假如無源電路中含有非綫性或時變電容的話,就可以用這種電路來放大訊號。他建立了放大時所必須滿足的電路條件,並且對參量放大器和混頻器或調制器之間的區別進行了討論。

第四篇論文是蘇聯科學家 В. И. Зубков 和 Я. А. Моиссов 所寫的。他們研究了參量耦合迴路的諧振曲綫和固有頻率,計算耦合迴路之一頻率失諧時固有頻率曲綫變化的情形,確定可以引起參量激發的失諧區域。此外還討論了引入到注入迴路內的阻抗問題。

在第五篇簡報中, Brand, Matthei 和 Saad 報告了他們把兩個具有非綫性電容的 $p-n$ 結微波二極管放在一平衡混合系統中所製成的低噪音放大器的一些實驗結果。當訊號頻率為 2900 兆赫,而注入頻率為其兩倍時,所觀察到的功率增益在 30 分貝以上,噪音係數為 2.7 分貝,頻寬約為 0.5 兆赫。

在第六篇論文中, Uenohara 提出了一個簡單的模型,用以計算可變電容參量放大器的噪音性質。對許多種半導體二極管來說,計算的結果與實驗相當符合;對另一些二極管則有一定的歧離。作者討論了產生歧離的原因,並指出补救的理論方法。

在第七篇論文中, Cassedy 建議,把一塊鐵電材料放在兩塊金屬導板之間,當高功率注入到鐵電材料時,就形成一種表面波參量放大器。他指出,在 X 波段內,即使使用現有的鐵電材料,就可以獲得相當的有用增益。用了改進的鐵電材料,這種放大器可以應用到毫米波波段。

第八篇論文是 Bridges 提出的。他指出:利用電子束代替 Suhl 所建議的放大器中的鐵氧體,就可以製出電子束式參量放大器。由於通常微波放大器所受到的噪音限制並不適用於這種情況,所以它具有很低的噪音係數。文中給出了初步的實驗結果。

在第九篇論文中, Louisell 和 Quate 指出:利用可變電抗以獲得增益的原理,可以應用到電子束上。當電子束受到頻率為訊

号频率的两倍的调制时，正常的空间电荷波就分裂成二部分——一个增长波和一个衰减波。“快”波和“慢”波都能获得放大。电子束可和一个慢波电路耦合，以使其中传播的快波获得放大。过去的微波放大器的噪音理论是对慢波而言的，因此这里并不适用。原则上，这种放大器可以具有较低的噪音系数。

最后，第十篇是 Ashkin 对 Louisell 和 Quate 的理论所进行的实验验证。理论指出，当用一高频波（频率为讯号频率的两倍）强烈地调制电子束时，加在其上的讯号（以“快”或“慢”的空间电荷波形式出现）可以按指数律增长。在 10 吋长的电子束上观察到 41 分贝的增益。在另一实验中，注入频率低于讯号频率，在 9.2 吋长的电子束上观察到讯号增加了 30 分贝。

必须指出，由于参量放大器是一门新兴的学科，有许多新名词出现，目前国内尚无统一译法。例如“Pump Frequency”在第一集中译作“泵浦频率”，而本集则译作“注入频率”。在这里，我们没有追求一致。为使读者免致混淆起见，本集末附有中英名词对照表，可供参考。

由于水平有限，本书内容难免有许多缺点和错误，希望读者予以指正。

目 录

編譯者的話	v
I. 一般介紹	
在微波頻率下固态参量放大器中的低噪音	1
W. E. Danielson	
II. 参量放大的基本理論	
非綫性元件的一些普遍性質——第二部分 小訊号理論	16
H. E. Rowe	
参量放大的电路条件	43
L. B. Valdes	
参量放大器理論的几个問題	58
B. И. Зубков 和 Я. А. Моносов	
III. 半导体二极管諧振腔式参量放大器	
电抗器——低噪音半导体二极管微波放大器	77
F. A. Brand, W. G. Matthei 和 T. Saad	
可变电容参量放大器的噪音研究	83
M. Uenohara	
IV. 行波式参量放大器	
表面波参量放大器	106
E. S. Cassedy, Jr.	
V. 电子束式参量放大器	
电子束参量放大器	112
T. J. Bridges	
空間电荷波的参量放大作用	118
W. H. Louisell 和 C. F. Quate	
空間电荷波的参量放大	142
A. Ashkin	
中英名詞对照表	155

在微波頻率下固态参量放大器 中的低噪音*

W. E. Danielson

提 要

参量放大的原理可以用简单的低频电路和与其机械相似的系统来描述。用强调其中所包含的物理过程的定性方法,可把这些原理推广到微波波段的低噪音放大。仅仅当能量从微波振荡器或注入源传递给讯号频率时,才能产生放大作用。本文并且指出:为什么这种传递只能在具有可变电容或电感的电路中发生,而在只有可变电阻的电路中不能发生。我们讨论了主要的噪音源,并且指出了象频或无功频率所起的具体作用。最后,列出了四种不同类型的参量放大器(三个利用半导体二极管,一个利用铁氧体)的实验数据。

I. 引 言

最近,人们对可变电容放大器或参量放大器的原理,发生了很大的兴趣。这并不因为这些原理是新的,而是因为把它应用到微波技术上去,看来能够开辟很低噪音的新型放大器^[1-12]。事实上,如同过去经常发生的那样,至少是在 Rayleigh 时候,由于他对音叉的某些谐振的奇异激励的研究,他已经成功地对这个问题进行探讨,并发表了第一篇数学的分析。然而,我们对放大器原理发生兴趣主要是在电的方面,因此,在介绍相似的机械系统之前,首先,讨论一下简单电路是有益的。在探讨了简单低频电路中的能量转换原理之后,再来讨论,把这原理应用到微波波段中的半导体二极管和

* 原载 Jour. Appl. Phys., Vol. 30, No. 1, pp. 8-15; Jan. 1959.

鉄氧体。其次,对理想电路的能量关系进行討論,并且对主要的噪声来源略作阐述。最后,給出了几种形式的电抗放大器的实验数据¹⁾。

II. 低頻的描述

A. 电 的 方 法

用图 1 所示的简单的 LC 迴路,可以說明其中含有的放大过程。試設想組成电容器的两块平行板之間的距离是可以改变的,同时,我們来探討这种变化对 LC 諧振迴路的影响。在距离固定时,假設起始时两板上的电荷分別为 $\pm q$, 則我們所得到的当然是电荷随時間作正弦变化。假如我們的目的仅在于产生振蕩,則改变两板之間的距离 d 是唯一的方法。显然,要使振蕩能够实现,必須尽可能地多做机械功。当两板完全充电时,我們將增加其距离(注意:哪一块板为正,是无关紧要的),当两板不带电时,我們能够不做任何功而把它們恢复到原来的位置。因此,我們能够使电容量按如图所示的方形波的形式而变化,同时,可以无限地增大振蕩振幅。引起这种电容量变化的交变能源称为注入源。注意:电容量随時間而变化的基頻,恰好是 LC 迴路的諧振頻率的两倍。同时,还应该指出另外两点,它們与我們將要討論的更普遍情形有关:第一,对使“ d ”改变的注入作用的相位的选择,是重要的,第二,有效諧振頻率或多或少地和 δ 有关。因为常用的放大器需要有輸入和輸出端,而我們的 LC 迴路在不与外界电耦合的情况下,就会显示出随時間的增长,所以我們必須要求这一随時間的增长,对于放大器問題,是合适的。在这关系中,很显然地可以用一电阻負載来表示迴路中所必須克服的发散損耗和传递到負載的能量,例如传递给波导的能量。而且这个負載对图 1 的討論仅作微小的修正。因此,虽然数学上或多或少有不同的形式,但在物理上的要求

1) 所提到的实验,都是在 Bell 电话公司实验室里做出的。另一些有关固体参量放大器的实验,可参看文献[4]和[5]。

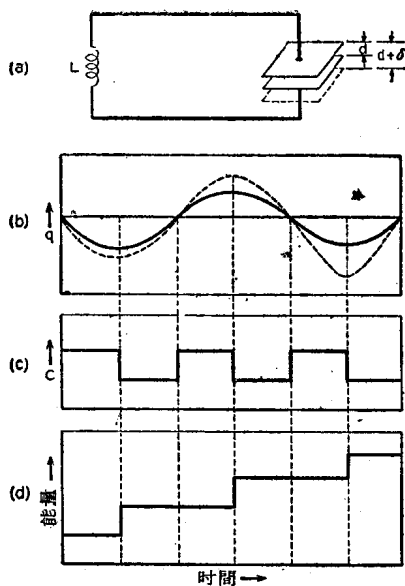


图 1 (a) 电容量可由平行板間距离来改变的简单 LC 迴路。(b) 实线表示当距离固定时板上的电荷和时间的关系; 虚线表示当电容量如(c)所示的那样变化时电荷和时间的关系。(d) 在振荡器中能量和时间的函数关系

和原理方面, 不管是否考虑特定的输入和输出电路, 却是很相同的。

直到现在为止, 我們似乎对这电路所发生的兴趣更甚于对它能用作低噪音放大器的基本原理。一个困难是注入波和訊号波之間的相位要求。結果发现使用由图 2 (a) 所表示的略微复杂的电路, 相位的要求就可以自动地满足。这电路的附加特点是具有一谐振频率为 f_2 的第二个迴路, 这里 f_2 是与 f_1 不同的。在这个情况中, 我們发现, 无论是注入波的基頻, 或是它的諧波之一, 应该等于 $f_1 + f_2$ 。为了明确起见, 令 $f_1 + f_2 = f_p$ 。这一关系的意义可由下面看出。

設由頻率 1 所产生的电荷 q_p 为 $\sin \omega_1 t$, 而頻率 2 所产生的为 $\sin \omega_2 t$, 則总电荷为:

$$q_p = \sin \omega_1 t + \sin \omega_2 t =$$

$$= \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} + \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right)t + \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right)t = 2 \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right),$$

同时我们发现, 每当 $\sin 2\pi \times \frac{1}{2} (f_1 + f_2) t$ 等于零时, q_v 亦等于零。因而, 这样比前面的情况更可能产生振荡。然而, 这时能量的增量随着拍频的相位而有很大的变化, 如图 2 (e) 所示。但是, 净能量的传递总是正的。如果我们把相位 $\omega_2 t$ 加上 180° , 显然, 为了得到所希望的能量传递, 必须把注入波的相位改变 180° 。因此, 相位将显得很重要。但是, 事实是这样的: 我们默默地假定了 f_1 和

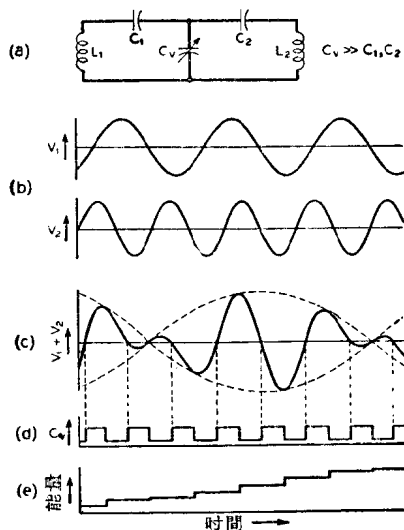


图 2 (a)由一只公共的电容耦合起来的两个 LC 回路。(b)当除去两个 LC 回路之一时, 在 C_v 的两端出现的各个电压。(c) C_v 两端的总电压, 即(b)图中所示的两个电压之和。(d)在 LC 回路中, 使能量单值增加的电容变化。(e)在 LC 回路中能量和时间的关系

f_2 都受到了初始激励, 而实际上, 我们对只有讯号(设 f_1)受到初始激励的情况发生兴趣, 而 f_2 的激励只是由于注入作用而产生的。对于这种情况, 很容易证明, f_2 将自动地建立起适当的相位(因为

相反的相位相当于把功率从諧振腔传递給注入波，故任何建立起相反相位的趋向都将受到阻尼）。由于它是自动地建立起振蕩，因而給出适当的相位， f_2 通常被称作无功頻率，不过亦有时称作“象頻”。

直到現在为止，所討論的問題只限于与时变电容有关的能量轉換。因为正象电容器一样，电感器同样能够把能量儲存起来，所以利用时变电感器可以获得同样形式的能量轉換。这是无需再加証明的。然而对于电阻器，則不是这种情况。因为它不能儲存能量，所以电阻的改变不能引起系統能态的改变。

B. 机械的方法

刚才所探討的这些原理，亦可以在相似的机械系統中看出。对于如图 1 所示的单个的諧振腔的情况，普通的摆毫无疑问是最簡單和最古老的相似机械系統。每周作功两次（到达每个摆动的頂点計为一次），使物体的重心比不对它作功时要高些，因此注入作用的頻率是摆的簡諧振动頻率的二倍。因为它相当于更普遍情况中的 $f_1 = f_2$ ，故在注入頻率恰好是振蕩器（或諧振器）頻率的二倍的場合，我們称它为簡并的情况。簡并情况的另一个簡單的机械相似系統是小孩常作的游戏，把繩环上所系的鈕扣〔約約（yo-yo）一种玩具〕迅速旋轉。要去寻求相应于 $f_1 \neq f_2$ 情况的适当的簡單相似系統，看来似乎是相当困难的。事实上，对于 $f_1 \neq f_2$ 的情况，制造一个现实的微波放大器，要比建立一个好的机械模型容易得多。不过，我們已經成功地建立了一个 2 頻率的机械模型，它是单根繩上所系鈕扣的情况的推广。两个机械的旋轉系統是沿着图 3 上所画的路綫运动的。这里，在 $\tan \bar{\psi} \approx \bar{\psi}$ 的情形下，由双綫支架所产生的恢复力矩是綫性地正比于 θ 。带状支架必須这样地选择，以使发散損耗为最小，而且連接环必須提供一种梯形結構，以防止在扭轉时双引綫扭到一起（这将产生严重的非綫性效应）。連接环也使我們可以采用与双引綫共軸而不与之接触的支架。在 2 頻率的模型中，我們顛倒旋轉系統中的一个（图 4 中較低的一个），

并且利用挂下的耦合梯,把它架在摩擦很小的支点上。除了平衡锤和滑轮可使耦合梯的顶端在铅垂平面内自由移动外,其他的旋轉机件都象图3中所画的那样悬挂着。最后,用第三个耦合梯把两个旋轉机件耦合起来。通过调制注入弦中的张力(注入弦是和上面的耦合梯同轴的),可使耦合梯中的张力按方形波的形式而变化。上面的旋轉机件被平衡时,耦合梯中的张力将只依赖于注入弦中的张力,而和上梯的相对扭转无关。如果 θ_1 和 θ_2 表示两旋轉机械的角位移,则耦合梯的扭转将为 $\theta_1 - \theta_2$ 。这个量完全和图2中的 q_0 相当。当耦合张力增大时,如果耦合梯内有一扭转,则有能量传递给旋轉系統。我們选定注入频率,使它满足:当耦合梯

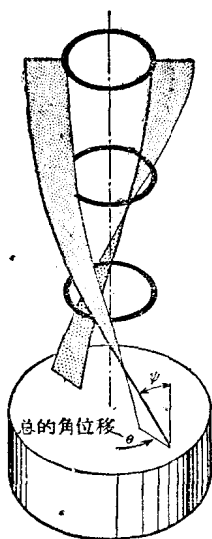


图3 用于2频率参量放大器的机械相似系统中的机械谐振器。支架带中的张力是通过重力在悬挂质量上的作用而产生的

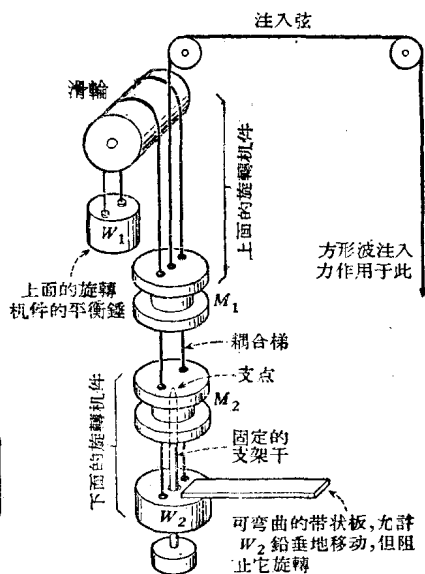


图4 2频率参量放大器的机械相似系統。能量是由注入弦中张力的方形波调制所供給的。调制是由一只物理摆(图上没有画出)产生的

内沒有扭转时,耦合张力就等于零。这相当于图2(c)中电容量的变化。因此,这里从注入源有一定的正的能量传递给旋轉系統,如图2(d)所示。而且旋轉的振幅逐渐增大,直到发散损耗等于所

供給的注入能量为止。由于能量是按一定的量供給的，而此一定的量是随两旋轉体之間的拍頻而变更的，因此在这个頻率上，疊加有忽大忽小的旋轉振幅。

III. 在微波頻率下的可变电抗

其次，我們要把在上面用低頻的电系統和机械系統所描述的原理应用到微波波段中。具体地說，我們要探討利用微波半导体二极管以獲得可变电容和利用鉄氧体以獲得可变电感的方法。

現在，我們來討論如图 5 所示的平面緩变結，其中施主原子是在結的右边占优势，而受主是在左边占优势。假如在結的两端有一反向偏压(包含接触电位)存在，則在受主区域內的空穴将移向左边，而在施主区域內的电子将移向右边。这种移动将一直繼續到在一边有足够的带負电的受主离子，而在另一边有足够的带正电的施主离子，使它們所建立起来的等量而相反的空間电荷电位达到平衡为止。显然，在这种情况下，能量儲存在电場內，因而可以用电容来对它进行描述。然而，容易証明，这种儲存的能量并不是綫性地正比于 V^2 ，因此，在 CV^2 中的 C 值不能認为是一常量。只要改变結的两端的电压，就有可能使 C 发生变化。在微波頻率下，要想达到上述的目的，可以把一只半导体二极管放在波导式諧振腔中，以使其中的微波能量在結的两端感应出适当的电压。現在我們再回到图 2。加入一強烈的微波注入訊号，其頻率為 $f_p = f_1 + f_2$ ，就可使 C 按照与方形波相对应的基頻而变化。为了提供調諧到 f_1 和 f_2 的微波迴路元件，我們必須設計諧振腔，使它能同时对 f_1 和 f_2 响应。实际上，我們还需要把訊号引入含有可变电抗的諧振腔中以及把放大的訊号引出。初看起来，似乎是困难的，因为訊号电压增长的終端就是原来訊号加入的两端。也就是說，我們不会得到象三极管这类的增益，例如，在三极管中，放大訊号出現在和柵路隔离的板路內，而我們所得到的的是負阻型或負导型放大，它具有不稳定和临界調节等特征。然而，幸运的是，鉄氧体不可逆器件，例如环旋器，能使輸入波和輸出波隔离，因此，利用負阻型的

放大作用是不困难的。

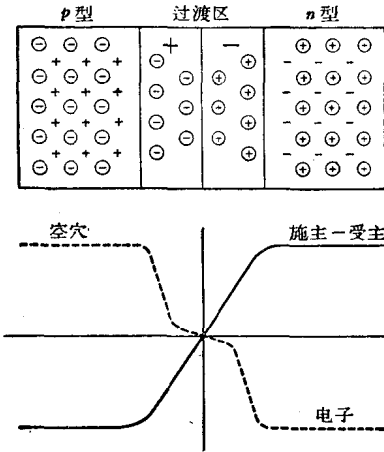


图 5 解释电容随二极管两端电压而变化的 $p-n$ 渐变结模型

考虑到利用铁氧体的可变电感放大器的可能性, 就会发现, 直到目前为止, 所有适用于可变电容的放大原理, 同样能够应用于可变电感的情况¹⁾。所以我們只需要指出, 在铁氧体中的磁自旋矢量可以用来改变两个频率之间的电感耦合, 这两个频率是在含有铁氧体材料的微波谐振腔中同时出现的。

为了使在沒有注入訊

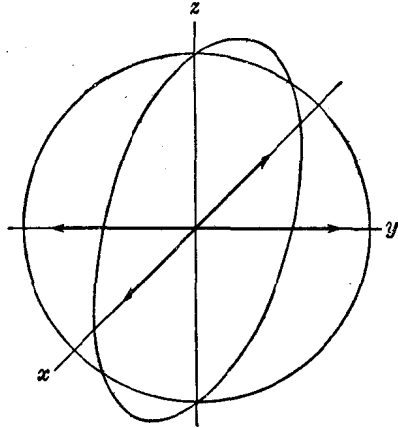


图 6 当铁氧体中的射频和直流磁场之间的关系是正确时, 在铁氧体中获得的可变电抗的放大。设铁氧体的中心位于 $(0,0,0)$, 而在 xz 和 yz 平面内的电流圆形回路分别用来表示沿 y 和 x 方向产生磁通量的两个射频回路。沿着 z 方向的直流磁场将产生第三个射频讯号。由于铁氧体内的自旋电子围绕直流场进动, 因而在另外的两个射频回路之间产生可变的电感耦合, 因此这第三个射频讯号可以当作注入源

1) 铁磁体放大器的详细理论, 请参看文献[7]。

号时电感耦合为零，我們选取两类波型，其磁場在鉄氧体中是彼此相互垂直的。我們用两个导綫环(图6)来表示产生上述的两个磁場的电流路径。假如我們沿着与两个射頻磁場垂直方向引入一个強烈的直流磁場，由于鉄氧体内的自旋电子圍繞着直流磁場进动，直流磁場的引入将产生作为注入源的第三个射頻場。在这些条件下，如果初始时只有 f_1 和注入頻率， f_2 可用与我們上面討論过的可变电容的情形极为类似的方法建立起来。結果就产生一个磁場 $\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$ ，它的相位是使每周内由注入源供給的功率是正的，而且是一定量的。矢量的出現使得詳細的数学分析要比可变电容情况复杂一些，但是我們已經看出，它們的物理情况却有許多共同之处。

IV. 噪音的討論

我們將着重通过可变电容二极管放大器的討論，來說明可变电抗放大器的噪音性質。我們已經看到，放大的能量是来自射頻注入源。由于它是一只高度稳定的振蕩器，我們可以忽略由它所产生的任何噪音。可以产生噪音的其它地方是：(1)在 f_1 和 f_2 的輸入迴路，(2)在 f_1 和 f_2 的諧振腔迴路，(3)在 f_1 和 f_2 上，二极管本身。

我們已經看到，在放大 f_1 时，就产生出 f_2 ，因此， f_2 所发生的噪音将引起 f_1 的噪音。这就是为什么我們必須考虑这两个頻率的噪音源的原因。噪音源(1)和(2)都是我們經常要遇到的热噪音，而且經驗指出，只要噪音源(3)并不发生过大的噪音的話，噪音源(1)、(2)并不妨碍我們获得低噪音放大。这里，晶体管具有很大的噪音的这一事实，初看起来是十分惊人的。然而，在晶体管放大器中，少数載流子的运动起着主要的作用，虽然我們仅依赖于大多数載流子的运动，这些載流子能交替地“显出”或“隱蔽”，或者中和一些固定的离子电荷，而不需要很多載流子通过結移动。对于結二极管的情形，A. Uhlir^[13]已在理論上証实了，在这些情况下散粒效应是可以忽略不計的。不过，离子点陣对在某一边的空穴流和

在另一边的电子流的流动,有一定的阻碍,而且它可以很合理地用二极管等效电路中一个串联的电阻(通常称为分布电阻)来表示

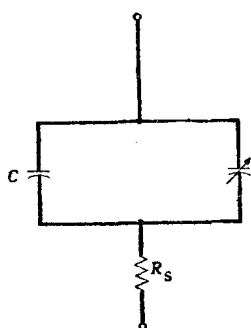


图7 为了解释在二极管中与多数载流子运动有关的噪音,把一个串联电阻加到一个无耗可变电容二极管的等效电路中

(图7)。当然,它将引起另外的热噪音或 Johnson 噪音源。但是,基本的问题是必须获得适当低的 R_s 值,同时,为了能在微波波段内工作,必须使 C 值低。在第 VI 节中将给出实验结果,表明目前已经达到如何程度。

关于可变电抗放大器的最低噪音问题,应当注意到,即使可变电抗放大器的所有元件都处于室温下,这种器件的有效噪音温度还可能远比室温为低。用具有与实际放大器相同的增益的理想无噪音放大器可以确定放大器的有效噪音温度。假如在室温(290°)下,当实际放大器和理想放大器的输入负载均匹配时,从实际放大器输出的噪音为理想放大器的 $(1 + f)$ 倍,那么实际放大器的有效噪音温度为 $f \times 290^\circ$ 。 f 量是统一的有效噪音温度,它和通常的噪音因子 F 的关系是 $f = F - 1$ 。这个超噪音温度可以比电路的温度低的理由是在频率 f_1 和 f_2 的输入不一定和谐振腔损耗或二极管的串联电阻匹配,因此,显然,低温并非产生很低噪音放大的必要条件。

V. 功率、增益和带宽的讨论

在第 II 节中,我们已经给出了参量或可变电抗放大的物理图象,不过,还需要有定量的数学分析来指导实验。Manley 和 Rowe^[1] 通过对无耗可变电抗元件的分析,获得了一些特别有用的结果。他们证明,在上面已经讨论过的 2 频率情况中,假如没有发散损耗,则

$$\frac{P_1}{f_1} = \frac{P_2}{f_2},$$