

船体数学放样

回弹法

《船体数学放样》编写组

科学出版社

船体数学放样

回弹法

《船体数学放样》编写组

科学出版社

1978

内 容 简 介

《船体数学放样》是世界造船工业六十年代发展起来的一门新技术，它的目的是为了彻底改革旧的手工放样和下料以及加工工艺，实现造船生产自动化。本书介绍“船体数学放样”方法之一——“回弹法”。这是把手工放样过程进行数学模拟，用 Spline 函数代替木样条，通过两次插值计算出新的样条函数值，这样持续进行多次，直到满足曲线光顺为止。本书还介绍了用“回弹法”进行船体放样的具体实例及计算程序，便于读者参考。本书可供造船工业有关工程技术人员参考。

船 体 数 学 放 样

回 弹 法

《船体数学放样》编写组

科 学 出 版 社 出 版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

1978 年 8 月 第 一 版 开本：787×1092 1/32

1978 年 8 月 第一次印刷 印张：6

印数：0001—4,180 字数：135,000

统一书号：13031·654

本社书号：951·13—1

定价：0.92 元

序

在毛主席革命路线指引下,在无产阶级文化大革命中,批判了刘少奇“造船不如买船,买船不如租船”的爬行主义、洋奴哲学的谬论,推动了造船工业战线技术革新和技术革命运动,造船工业的面貌发生了深刻的变化,对船舶生产自动化的要求越来越迫切。船体数学放样这一环就成为造船生产流程自动化中首先必须解决的问题。

伟大领袖毛主席教导说:“我们必须打破常规,尽量采用先进技术,在一个不太长的历史时期内,把我国建设成为一个社会主义的现代化的强国。”为了早日用先进技术武装造船工业,在1970年冬由浙江省交通局、嘉兴航运公司船厂、宁波航运公司船厂、浙江大学等单位组成了数学放样组。1973年开始由上海求新造船厂与上述诸单位组成三结合科研组。在三个厂党委和学校党委的领导和关怀下,在广大工人师傅的热情支持下,开展了科研工作。我们在船舶放样的实践中吸取了放样工人丰富的实践经验,模仿手工放样的调整压铁,使样条自然弹匀的做法,总结出数学放样的“回弹法”,及基于手工放样中对于较平直的曲线用直尺平推样条来去弯向不适当的实践,而得出数学上的“直尺卡样法”。船体数学放样工作自1975年起又与上海船舶运输科学研究所自动设计组挂钩协同工作。关于自动绘制船体线型图的课题,一方面求新造船厂与浙江大学协作,研究出在小通用计算机上采用正负法数控绘图;另一方面六机部十一所与浙江大学协作,解决更广泛的线型(包括大挠度线型)拟合与绘图问题。为了总结我们

的科研工作和适应造船工艺生产发展的需要，遵照伟大领袖毛主席关于“互通情报”和“互相交流”的教导，特编写本书，希望能为早日实现“造船工业生产自动化”起一点推动作用。

本书介绍船体数学放样、线型拟合与绘图。我们在科研工作及本书编写过程中，得到了武昌造船厂、福建马尾造船厂与杭州船厂等工人师傅及复旦大学苏步青、计算数学所冯康等同志的大力支持，并提出了不少宝贵意见，一併在此表示感谢。

关于外板展开问题，属于放样下料的一部分。我们从理论与方法上对外板展开的数学处理亦作了一些探讨，待实践较多后再另编成书，作为本书续篇。

本书原理部分由浙江大学应用数学教研组董光昌同志执笔，实践与具体应用部分由浙江省嘉兴航运公司船厂林孝康同志，宁波航运公司船厂王德潮同志执笔。由于我们经验不够，水平有限，书中难免会有不少缺点和错误，殷切希望读者批评指正。

《船体数学放样》编写组

1976.2.

引 言

手工放样是按提供给放样车间的比例线型图, 以及设计人员从线型图上量得的数据型值表, 在样台上描出剖面线上的各型值点, 然后用样条沿着它们弯曲, 并在各型值点用压铁压上, 当用眼睛看样条构成一条光顺的曲线时, 就沿着样条画上曲线。

由于所提供的线型图本身就可能不光顺, 特别是 1:1 放大以后, 看来更是如此。而型值表的数据是在缩小比例的线型图上量取的, 难免有测量误差, 由于这些原因, 就使得在放样时, 通过这些型值点的样条, 不能保证构成一条光顺的曲线, 因而在实际放样时还需要人工进行调整, 称为手工光顺或手工修顺。

手工光顺的大致过程如下:

如果样条由上述方法构成的曲线用眼睛看来不够光顺, 则调整各个压铁位置直到曲线光顺为止。调整的原则一般说来是少数服从多数, 即总的看来最不光顺的点先进行调整。手工调整的基本方法, 用俗语讲就是自然放、两借借。自然放就是当某型值点看来不光顺时, 就把这点压铁拿起, 让样条自然弹匀, 然后再在新的型值点上把压铁压上。当自然放时, 样条弹动太多, 则把该型值酌量改动, 用压铁压住, 然后把左右两点自然放, 这就是两借借。有时调整到一定程度, 就在适当的位置增加一些压铁后, 将压铁轮流自然放, 让样条弹匀, 这样可使曲线更为光顺。

上面讲的只是单根曲线的手工光顺, 由于船体线型是船

体空间图形在三个投影面上的投影，所以既要做到各单根曲线光顺，又要做到它们之间没有投影上的矛盾，这就是三向光顺问题。要做到这点，放样工人不得不反复修改各个剖面的线型，烦琐费时。只有达到以下三个条件时，三向光顺才基本完成。这三个条件是：

1. 每一单根曲线要光顺，不能带有非设计意图的凹凸；
2. 三个剖面没有投影上的矛盾；
3. 新型值数据偏离原始型值尽可能少。

那么，究竟什么是数学放样呢？数学放样就是用数学函数来描述船型曲线，用数学光顺的方法来代替手工光顺的方法，并借电子计算机的快速计算使光顺过程能迅速实现。

更详细讲，那就是数学放样要解决如下问题，即选用什么函数来描述船型曲线。什么叫单根曲线光顺，选用什么样的单根曲线光顺方法，端值如何取定，怎样进行三向光顺，怎样进行外型线光顺，光顺结果除了打印数据外，如何绘图输出，要研究数学放样，这些问题都要逐一地从理论与实践结合上予以解决。

目 录

第一章 船体线型问题	1
§ 1. 样条函数的导出	1
§ 2. 怎样理解与使用样条函数及使用中的一些限制	5
§ 3. 样条函数采用不同表达式的讨论	8
§ 4. 用样条函数和用其它函数作船型曲线的比较, 样条函数的优缺点	13
§ 5. 大挠度情况的讨论	14
第二章 线型光顺问题	20
§ 1. 我们对线型光顺与不光顺的理解	20
§ 2. 我们理解的基本事实——弯势不当是否可见的问题	21
§ 3. 影响向量与基样条函数	23
§ 4. 弯向不当与弯势不当的关系, 实践中出现曲线不光顺的原因分析	28
§ 5. 关于几种对线型光顺的理解以及对线型光顺法的要求的分析、比较、讨论	31
§ 6. 弯向与弯势是否适当的判定标准	35
第三章 线型光顺法	38
§ 1. 回弹法来源于手工放样	38
§ 2. 插点回弹满足线型光顺的一般要求	40
§ 3. 回弹法的几何意义与一些特点	43
§ 4. 能量最小及其变分, 插点回弹法收敛性的证明	47
§ 5. 与最小二乘法作比较	50
§ 6. 按剪力跃度的情况进行插点回弹	56
§ 7. 其它一些光顺方法与途径的讨论	61
§ 8. 直尺卡样法	66

第四章 端值如何取定	73
§ 1. 初值条件的不稳定性	73
§ 2. 端值条件稳定性的证明	75
§ 3. 我们定端值所使用的方法及其分析	76
§ 4. 三种情况下的定端值公式	79
§ 5. 定端值的一些注意点	82
§ 6. 对其它一些定端值方法的分析	83
第五章 单根曲线光顺的具体实施	89
§ 1. 单根曲线光顺程序的职能与具体使用说明	89
§ 2. 单根曲线光顺程序所套用的过程	92
§ 3. 考验单根曲线光顺程序的实例	107
第六章 三向光顺及其他	151
§ 1. 三向光顺	151
§ 2. 三向光顺的实际例子	153
§ 3. 甲板光顺	179
§ 4. 圆弧光顺	180
参考文献	封三

第一章 船体线型问题

§ 1. 样条函数的导出

船型曲线有水线、纵剖线、肋骨线、甲板边昂、甲板边线、甲板中昂、艏柱线、艉柱线、艏(艉)圆弧中心线、圆弧切点线、圆弧剖线、船底线、边平线、底平线、折角线、舷墙线等等。这样多曲线应该用什么数学方程式来描写呢? 由于手工放样是用压有压铁的木样条(或其它样条)来定出这些曲线的, 因此, 我们首先来模仿压有压铁的木样条而作出样条函数(Spline), 我们把木样条看成是在压点处有集中荷载的等截面细梁。并在小挠度的假定下, 导出它的数学表示式。

在材料力学中, 等截面细梁受横向荷载的关系式是:

$$EI \frac{1}{\rho} = M,$$

$$\frac{dM}{dx} = N,$$

$$\frac{dN}{dx} = \tau.$$

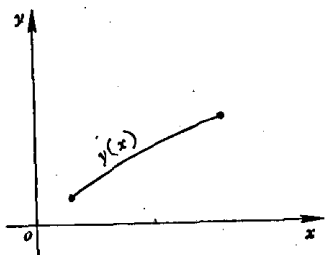


图 1.1

其中 EI 为细梁的弯曲刚度。 $\frac{1}{\rho} = y'' / (1 + y'^2)^{3/2}$ 为曲率, $y = y(x)$ 为挠曲线方程, M 、 N 、 τ 分别表示弯矩、剪力与荷载。由小挠度的假定 y'^2 与 1 相比很小, (记为 $y'^2 \ll 1$) 可以略去, 因而得到:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M,$$

$$EI \frac{d^3 y}{dx^3} = N,$$

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = \tau.$$

当仅有集中荷载时,在非荷载点 $\tau=0$,在荷载点 $x_2, x_3, \dots, x_{n-1}$ 处(设梁的端点为 x_1, x_n) 函数 y 、斜率 y' 与弯矩 M 均为连续,而剪力 $N(x)$,在 $x_i (i=2, 3, \dots, n-1)$ 处有一等于集中荷载的跃度。当 $x_i < x < x_{i+1} (i=1, 2, \dots, n-1)$ 时,

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = 0,$$

积分得:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \quad (a_0, a_1, a_2, a_3 \text{ 为常数}).$$

由于 $y(x_i) = y_i, y(x_{i+1}) = y_{i+1}$, 我们记

$$y(x) = y_i + m_{i,i+1} (x - x_i) + z(x)$$

$$\left(m_{i,i+1} = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \right).$$

则 $z(x)$ 也是 x 的三次多项式,且由上式可见,必有 $z(x_i) = z(x_{i+1}) = 0$, 因此 $z(x)$ 必然能被 $x - x_i$ 与 $x - x_{i+1}$ 所整除,被这两个因子整除的商为一次式,因而可记

$$z(x) = (x - x_i) (x_{i+1} - x) [A_{i,i+1} (x - x_i) + B_{i,i+1} (x_{i+1} - x)],$$

$$y(x) = y_i + m_{i,i+1} (x - x_i) + (x - x_i) (x_{i+1} - x) [A_{i,i+1} (x - x_i) + B_{i,i+1} (x_{i+1} - x)] \cdots, \quad (1.1)$$

$$y'(x) = m_{i,i+1} + A_{i,i+1} [2(x - x_i) (x_{i+1} - x) - (x - x_i)^2] + B_{i,i+1} [(x_{i+1} - x)^2 - 2(x - x_i) (x_{i+1} - x)],$$

$$y''(x) = A_{i,i+1} [2(x_{i+1} - x) - 4(x - x_i)] + B_{i,i+1} [2(x - x_i) - 4(x_{i+1} - x)].$$

$$\begin{cases} y'(x_i) = m_{i,i+1} + B_{i,i+1}(x_{i+1} - x_i)^2, \\ y'(x_{i+1}) = m_{i,i+1} - A_{i,i+1}(x_{i+1} - x_i)^2. \end{cases} \quad (1.2)$$

$$\begin{cases} y''(x_i) = 2(x_{i+1} - x_i)(A_{i,i+1} - 2B_{i,i+1}), \\ y''(x_{i+1}) = 2(x_{i+1} - x_i)(B_{i,i+1} - 2A_{i,i+1}), \end{cases} \quad (1.3)$$

记 $y''(x_i) = 6c_i, y''(x_{i+1}) = 6c_{i+1}. \quad (1.4)$

由(1.3)、(1.4)解出 $A_{i,i+1}, B_{i,i+1}$ 得:

$$A_{i,i+1} = -\frac{c_i + 2c_{i+1}}{x_{i+1} - x_i}, \quad B_{i,i+1} = -\frac{2c_i + c_{i+1}}{x_{i+1} - x_i}.$$

代入(1.1)得:

$$y(x) = y_i + m_{i,i+1}(x - x_i) - \frac{(x - x_i)(x_{i+1} - x)}{x_{i+1} - x_i} [c_i(2x_{i+1} - x - x_i) + c_{i+1}(x_{i+1} + x - 2x_i)] (x_i \leq x \leq x_{i+1}). \quad (1.5)$$

再代入(1.2)得:

$$y'(x_i) = m_{i,i+1} - (x_{i+1} - x_i)(2c_i + c_{i+1}) \quad (1.6)$$

$$y'(x_{i+1}) = m_{i,i+1} + (x_{i+1} - x_i)(c_i + 2c_{i+1}). \quad (1.7)$$

由(1.6)、(1.7)与一阶导数的连接条件得:

$$\begin{aligned} m_{i,i+1} - (x_{i+1} - x_i)(2c_i + c_{i+1}) &= m_{i-1,i} \\ &+ (x_i - x_{i-1})(c_{i-1} + 2c_i), \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} (x_i - x_{i-1})c_{i-1} + 2(x_{i+1} - x_{i-1})c_i + (x_{i+1} - x_i)c_{i+1} \\ = m_{i,i+1} - m_{i-1,i} \quad (i=2,3,4,\dots,n-1), \end{aligned} \quad (1.8)$$

这称为三弯矩公式。

由于未知系数 $c_1, c_2, \dots, c_n$ 共有 n 个, 而三弯矩方程仅有 $n-2$ 个, 要完全定出 $c_1, c_2, \dots, c_n$ 需添加二个端值条件. 端值条件之一是在两端点处 y'_1, y'_n 为已知, (1.6)、(1.7)中分别取 $i=1$ 与 $n-1$ 得:

$$(x_2 - x_1)(2c_1 + c_2) = m_{1,2} - y'_1, \quad (1.9)$$

$$(x_n - x_{n-1})(c_{n-1} + 2c_n) = y'_n - m_{n-1,n}. \quad (1.10)$$

由(1.8), (1.9), (1.10)构成求解 $c_1, c_2, \dots, c_n$ 的 n 个方程组, 它可以写成如下的矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} 2(x_2-x_1) & x_2-x_1 & & & \\ x_2-x_1 & 2(x_3-x_1) & x_3-x_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & x_{n-1}-x_{n-2} & 2(x_n-x_{n-2}) & x_n-x_{n-1} \\ & & & x_n-x_{n-1} & 2(x_n-x_{n-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{1,2}-y'_1 \\ m_{2,3}-m_{1,2} \\ \vdots \\ m_{n-1,n}-m_{n-2,n-1} \\ y'_n-m_{n-1,n} \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

(1.11)式是三条线的线性代数方程组, 用追赶法求解如下:

由(1.9)式得:

$$c_1 + \frac{1}{2}c_2 = \frac{m_{1,2}-y'_1}{2(x_2-x_1)}, \text{ 记为 } c_1 + a_1c_2 = b_1,$$

$$\text{即} \quad a_1 = \frac{1}{2}, \quad (1.12)$$

$$b_1 = \frac{m_{1,2}-y'_1}{2(x_2-x_1)}. \quad (1.13)$$

代入 $i=2$ 的三弯矩方程(1.8)得:

$$(x_2-x_1)(b_1-a_1c_2) + 2(x_3-x_1)c_2 + (x_3-x_2)c_3 = m_{2,3}-m_{1,2}$$

$$\text{或写成} \quad c_2 + \frac{x_2-x_1}{2(x_3-x_1)-a_1(x_2-x_1)} \times c_3 = \frac{m_{2,3}-m_{1,2}-(x_2-x_1)b_1}{2(x_3-x_1)-a_1(x_2-x_1)}.$$

记为 $c_2 + a_2c_3 = b_2$, 一般得到:

$$c_i + a_i c_{i+1} = b_i, \quad (1.14)$$

其中

$$a_i = \frac{x_{i+1} - x_i}{2(x_{i+1} - x_{i-1}) - a_{i-1}(x_i - x_{i-1})}, \quad (1.15)$$

$$b_i = \frac{m_{i,i+1} - m_{i-1,i} - (x_i - x_{i-1})b_{i-1}}{2(x_{i+1} - x_{i-1}) - a_{i-1}(x_i - x_{i-1})}. \quad (1.16)$$

$$(i=2, 3, \dots, n-1)$$

最后是 $a_n=0$,

$$b_n = \frac{y'_n - m_{n-1,n} - (x_n - x_{n-1})b_{n-1}}{2(x_n - x_{n-1}) - a_{n-1}(x_n - x_{n-1})}, \quad (1.17)$$

即

$$c_n = b_n.$$

倒推上去, 由 $c_{n-1} = b_{n-1} - a_{n-1}c_n$ 可求得 c_{n-1} , 同法由 (1.14) 可求得 $c_{n-2}, c_{n-3}, \dots, c_2, c_1$, 把求得的 $c_1, c_2, \dots, c_n$ 代入 (1.5) 式, 就完全定出了通过各型值点且具有端值条件 y'_1, y'_n 的样条函数。

§ 2. 怎样理解与使用样条函数及使用中的一些限制

有人会问, 木样条放在地板上有摩擦力, 与梁不同, 为什么可以当作细梁来分析呢? 这是因为, 一方面压铁压在样条的侧面, 通过地板的摩擦力使压点固定, 即受有约束, 这一约束等效于受一横向的集中荷载作用。另一方面在放样过程中, 放样者也是尽力排除摩擦力在非压点处的影响 (当拿掉一个压铁让它弹匀时, 常常轻轻敲打, 使摩擦力的影响尽可能地去掉)。因此木样条可以看作在压点处受一横向集中荷载的细梁。

但小挠度假定则与使用的实际情况不符。我们把 Spline 用于 -45° 到 45° (即挠度不超过 1) 的范围, 这一矛盾又如何看待呢? 我们认为, 样条函数可以不是十分精确地模仿木样条, 而是模仿木样条的最主要的性质即相邻两个压点之间

拐点不多于 1 个,同时还要求在压点处函数及一阶导数、二阶导数连续,在每一分段内函数及一、二、三、四阶导数连续。满足这些条件的函数类是很多的,其中许多是非线性函数,用来作调整很不方便,用起来最方便的就是分段三次多项式 (1.5) 构成的天然 Spline,因此,我们就用它作为样条函数。

超过 45° 的范围去用 Spline,从误差与计算稳定性的观点来看是不适宜的。因为 $m_{i,i+1} = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$ 中分子和分母都是有误差的数,分母小而分子大,则商的误差增大;另一方面我们使用样条函数 (Spline) 是用于光顺的目的,光顺指曲率 $k_1, k_2, \dots, k_n$ 的变化不要太剧烈,亦即分布要比较均匀,也就是 $k_1, k_2, \dots, k_n$ 的符号与数量都要分布比较均匀¹⁾。由于

$$k_i = \frac{y_i''}{(1 + y_i'^2)^{3/2}} = 6 c_i \cos^3 \theta_i (\theta_i = \arctg y_i'),$$

因此 k_i 的符号与 c_i 一样, $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$ 的符号分布也就是 $c_1, c_2, \dots, c_n$ 的符号分布。

至于 $k_1, k_2, \dots, k_n$ 的数量分布,虽与 $c_1, c_2, \dots, c_n$ 有所不同,但因由上式得:

$$\frac{k_{i+1}}{k_i} = \frac{c_{i+1}}{c_i} \left(\frac{\cos \theta_{i+1}}{\cos \theta_i} \right)^3,$$

当使用样条函数不超过 45° 时, $\left(\frac{\cos \theta_{i+1}}{\cos \theta_i} \right)^3$ 一般不会太大与太小,大致在 0.8 到 1.2 之间。因此 $k_1, k_2, \dots, k_n$ 之间的不均匀性 (例如 $\frac{k_{i+1}}{k_i} = 6, \frac{k_{i+1}}{k_i} = \frac{1}{6}$ 等), 由于上式也会在 $c_1, c_2, \dots, c_n$ 中反映出不均匀性来。反之,我们在第三章中所谈的光顺法是要去调整 $c_1, c_2, \dots, c_n$ 使之变到比较地均匀 (例如

1) 将在第二章详细介绍。

做到 $\frac{1}{2} < \frac{c_{i+1}}{c_i} < 2$), 则由上式得到 $k_1, k_2, \dots, k_n$ 也就比较

地均匀。当使用样条函数超过 45° 太多时 $(\frac{\cos \theta_{i+1}}{\cos \theta_i})^3$ 会成为

太大(大到 6、7 或更多)与太小,因此 $c_1, c_2, \dots, c_n$ 数量之间是否均匀与 $k_1, k_2, \dots, k_n$ 数量之间的是否均匀相互关系很少,看 $c_1, c_2, \dots, c_n$ 是否均匀与调整 $c_1, c_2, \dots, c_n$ 使之做到比较均匀就都与 $k_1, k_2, \dots, k_n$ 的均匀性(即曲线的光顺性)关系很少。因此从这点来看,超过 45° 太多去使用样条函数也是不适宜的。

当然,从上述两点看,稍许超过 45° 去使用样条函数还是可以的,但我们实际使用时都尽可能化到不超过 45° 。对站线,我们一律采用转 45° 角来用样条函数进行光顺,对纵剖线和水线斜率大的也转 45° ,对横剖面上的甲板线转 -45° 等,这要看具体情况而定。

在此,附带提一下国外文献上两个做法:国外文献[2]对站线的光顺按首末点联线转轴再使用样条函数。

如图 1.2 的站线转轴后挠度仍超过 45° 很多,亦即这样做对减少挠度的目的有时作用不大。因此,我们认为不应采用这一做法¹⁾。国外文献[4]对站线使用变换

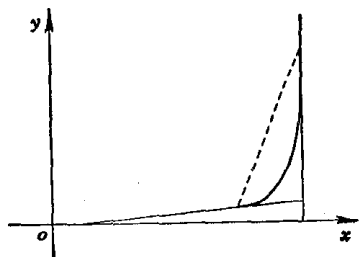


图 1.2

1) 用首末点联线作新自变量转轴不好,改用按首末点切线的分角线作为变量轴来转轴就是好的。

$$\begin{cases} \bar{x} = \sqrt{x - \frac{y-y_0}{y_1-y_0}x_0}, & (x_0, y_0, y_1 \text{ 为常数}) \\ \bar{y} = y \end{cases}$$

或
$$\begin{cases} \bar{x} = x - y, \\ \bar{y} = y. \end{cases}$$

这种变换引起光顺性质的改变,我们认为这一做法也不宜采用¹⁾.

§ 3. 样条函数采用不同表达式的讨论

前面我们所得到的(1.5)式仅是等截面木样条在小挠度假定下导出的,是样条函数的数学表示形式之一.在同一假定下这一样条还至少有两种不同的数学表示形式.在三种形式中,为什么要使用(1.5)式呢?

数学表示形式之一是泰尔海墨(Theilheimer)形式,推导如下:

按样条函数的性质,当 $x_1 < x < x_2$ 时,由 $\frac{d^4 y}{dx^4} = 0$ 积分得:

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3, (A_0, A_1, A_2, A_3 \text{ 为常数})$$

当 $x_2 < x < x_3$ 时仍有 $\frac{d^4 y}{dx^4} = 0$, 积分得:

$$y = A_0^* + A_1^* x + A_2^* x^2 + A_3^* x^3 (A_0^*, A_1^*, A_2^*, A_3^* \text{ 为常数})$$

二组常数之间有什么关系呢? 记

$$\begin{aligned} & A_0^* + A_1^* x + A_2^* x^2 + A_3^* x^3 - (A_0 + A_1 x \\ & + A_2 x^2 + A_3 x^3) = Y(x) \end{aligned}$$

则 $Y(x)$ 也是 x 的三次多项式. 由样条函数的性质 y, y', y'' 在 $x = x_2$ 处连续, 所以 $Y(x)$ 在 $x = x_2$ 处有三重根, 因而 $Y(x)$

1) 光顺性质改变了, 就要再建立一套光顺概念与光顺方法, 否则在这一坐标系下做到光顺了, 怎么能保证在另一坐标系下仍为光顺的呢?