大学基础数学自学丛书

级数

董延闿

大学基础数学自学丛书

级　　数

董延闿

上海科学技术出版社

大学基础数学自学丛书

级　数

董延闿

上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路 450 号）

新华书店上海发行所发行　无锡县人民印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32　印张 8.25　字数 179,000
1982 年 11 月第 1 版　1984 年 2 月第 2 次印刷
印数 42,301—65,300

统一书号：13119·1042　　定价：(科三) 0.67 元

序　言

我们伟大的祖国，为了尽早实现四个现代化的宏伟大业，需要造就大批又红又专的、具有高度文化修养和现代科学知识的工业大军、农业大军、科技大军、文化大军和国防大军。这是一项摆在全体人民面前的极为艰巨的任务。人才的培养，基础在教育。然而，目前我国每年只可能吸收很小一部分中学毕业生进入高等院校深造，大批已经走上或将要走上各种工作岗位的千千万万青年人，都迫切要求学习现代科学基础知识，以适应新时期的需要。所以，在办好高等院校的同时，还应尽量为那些不能升入大学或无法离职进入大学的青年提供良好的业余学习条件。为此，上海科学技术出版社编辑出版《大学基础数学自学丛书》、《大学基础物理自学丛书》和《大学基础化学自学丛书》。

《大学基础数学自学丛书》由我们负责主编，由北京大学、北京师范大学和复旦大学数学系有关教师执笔编写。包括《一元函数微分学》、《一元函数积分学》、《多元函数微积分》、《级数》、《空间解析几何》、《高等代数》、《复变函数论基础》、《常微分方程基础》、《概率论与数理统计基础》、《微分几何基础》、《有限数学引论》等共十一种，可供具有相当于高中文化程度、有志于自学大学数学课程的广大读者使用。

本《丛书》是一套大学基础课的自学读物，与中学程度的《数理化自学丛书》相衔接。为了使自学读者在没有教师讲课的条件下读懂、学好，其内容选取和编排不同于一般的大学课

本，文字叙述用讲课的形式书写；概念引入尽量从具体的、通俗的地方入手，逐步深入；内容安排抓住重点，讲深讲透。为了对读者解题有所启发，巩固所学的基础知识等，文中举有较多的例题；凡估计读者容易发生困难的地方，尽量给予必要的分析。习题、例题均按章分节安排，书后附有习题答案或提示。每册之首都有编者的话，指导读者自学全书。总之，想尽可能减少自学中的困难。

自学，时间总比在校学习紧得多。要自学有成就，没什么“诀窍”，如果有的话，那就是“多思考，多练习，熟能生巧”。

学习必须从自己的实际水平出发，学每本书要有一定的基础。选读顺序可根据编者的话的指导进行。有志者，事竟成。希望广大读者循序渐进、持之以恒、锲而不舍地学习。愿大家努力学好。

《丛书》编审过程中得到了北京大学数学系、北京师范大学数学系和北京师范学院数学系领导的大力支持；许多同志参加了提纲、样稿的讨论，并提供了宝贵的意见；编撰者和审稿人为《丛书》付出了辛勤的劳动，谨此一并致谢。

由于《丛书》编写和出版的时间仓促，难免有缺点和错误，希望读者不吝赐教！

江泽涵　　　　赵慈庚

于北京大学燕南园　于北京师范大学工五楼

1980年1月

编 者 的 话

本书讲的是《微积分》(数学分析)课本中的“级数”部分. 凡读过本丛书《一元函数微分学》和《一元函数积分学》的读者，都可阅读本书. 本书中只有第四章的第五节需要多元函数微分学的一些知识，没有学过多元函数微分学的读者可暂时不读这一节.

本书编者认为：已经学过一些高等数学(例如学过一元函数微积分)的读者，应该进一步重视数学的严密性，如果不具备基本的数学严密性的训练，学习深一步的数学书籍(即使为了应用的目的)是困难的. 鉴于此，本书是按照一定严密性的要求编写的. 但是，又考虑到本书要符合自学的特点，所以：

1) 在内容和训练方面，比大学数学专业的要求略低一些；

2) 论证推理尽可能写得详细易懂，叙述较难接受的概念时，尽可能辅以直观的描述.

考虑到阅读本书的读者的基础可能是参差不齐的，不能强求一律，所以本书的部分内容(如某一节，某一段或某一定理的证明)标以“*”号，如果读者阅读这些内容时感到困难太大，则可以不读它们. 对标以“*”号的定理的证明，则可以只看定理的条文，而不读它的证明. 在编写本书过程中，我们有一个通盘的考虑：不带“*”号的部分是最基本的部分(相当于一般工科院校所需的水平)，它们自成系统，具有一定的严密性. 略去带“*”号的部分，不会影响本书的系统性. 当然，经过

一定努力，能够读懂带“*”号内容的读者，最好能继续坚持读下去，这会使读者得到更大的收益。

学习本书和学习其他数学教材一样，不但要掌握基本理论，而且要掌握基本的作题方法。本书的习题是经过选择安排的，数量不很多，除了标“*”号者外，需要读者全做。

限于编写者的水平，本书中的缺点和错误在所难免。殷切希望读者提出宝贵意见。

本书经过北京大学沈燮昌教授审阅，提出了重要的修改意见，编者表示衷心感谢。

董延闿

于北京师范大学数学系

1982 年 2 月

目　录

序言

编者的话

预　篇

第一节　数列 ……1

1.1　数列的极限 ……1

1.2　数列极限的性质 ……2

1.3　无穷极限及有关性质 ……5

第二节　数列的收敛准则 ……7

2.1　数集的确界 ……8

习题一 ……13

2.2　单调数列的收敛准则 ……13

习题二 ……18

2.3　实数轴上的闭区间套 ……19

2.4　一般数列的收敛准则 ……21

*习题三 ……25

第三节　一些备查阅的极限 ……25

3.1　几个常见的数列 ……25

3.2　几个无穷大数列的比较 ……26

预篇小结 ……28

第一章　数 项 级 数

第一节　基本概念与简单性质 …30

1.1　级数的收敛与发散 ……30

1.2　欧拉常数、ln 2 的级数…34

1.3　收敛的一个必要条件 …37

习题一 ……39

1.4　简单性质 ……40

习题二 ……42

第二节　正项级数的判敛法 ……43

2.1　收敛准则 ……43

2.2　比较判敛法 ……44

习题三 ……46

2.3　柯西根值判敛法 ……47

习题四 ……49

2.4　达朗贝尔比值判敛法 …50

习题五 ……………………53
2.5 积分判敛法 ……………53
习题六 ……………………58
*2.6 对达朗贝尔比值判敛法的评论 ……………58
*2.7 拉阿贝比值判敛法 ……60
*习题七 ……………………64
第三节 任意项级数的判敛法 ……………………64
3.1 级数的正部与负部 ……65
3.2 绝对收敛与条件收敛 ……………………66
习题八 ……………………70
3.3 交错级数、莱布尼兹判敛法 ……………………70
习题九 ……………………73
*3.4 柯西准则 ………………73
*习题十 ……………………75
*3.5 狄利克雷判敛法 ………75
3.6 两个三角公式 …………78
*3.7 狄利克雷判敛法的例子 ……………………80
*习题十一 ………………81
第四节 基本运算律对级数的适用性 ………………82
4.1 关于分配律 ……………82
4.2 关于结合律 ……………83
4.3 关于交换律的讨论 ……84
4.4 正项级数的重排 ………88
4.5 绝对收敛级数的重排 ……………………90
4.6 关于条件收敛级数重排的说明 ……………91
习题十二 ……………………91
第一章小结 ……………………92

第二章 函数项级数

第一节 收敛域 ……………………94
习题一 ……………………96
第二节 一致收敛 ……………97
2.1 一致收敛的概念 ………97
2.2 收敛级数一致收敛的条件 ……………………101
2.3 优级数判敛法 ………103
习题二 ……………………106
*2.4 狄利克雷判敛法 ……106
*习题三 ……………………109
第三节 极限函数与和函数的连续性 ……………109
3.1 极限函数的连续性 …109
3.2 和函数的连续性 ……111
习题四 ……………………113
第四节 积分号下取极限、逐项积分与逐项微分 ……113
4.1 积分号下取极限 ……113
4.2 逐项积分 ……………115
4.3 逐项微分 ……………118
习题五 ……………………121
第二章小结 ……………………122

第三章 幂级数

第一节 收敛域 ……124
1.1 收敛半径 ……125
1.2 收敛半径的求法 ……129
习题一 ……132
第二节 一致收敛性及有关的性质 ……133
2.1 一致收敛性 ……133
2.2 和函数的连续性 ……134
2.3 逐项微分与逐项积分 134
习题二 ……141
*第三节 幂级数的乘法 ……142
*习题三 ……146
第四节 泰勒级数 ……146
4.1 将函数展成幂级数 ……146
4.2 一些初等函数的泰勒级数 ……151
习题四 ……160
4.3 一般的泰勒级数 ……161
习题五 ……162
第五节 一些数值的计算 ……162
5.1 一般原理 ……162
5.2 π 的计算 ……163
5.3 三角函数值的计算 ……164
5.4 对数的计算 ……165
习题六 ……168
第六节 解微分方程(举例) ……169
习题七 ……176
第三章小结 ……176

第四章 傅里叶级数

第一节 傅里叶系数 ……179
1.1 周期函数 ……179
1.2 基本三角函数系 ……182
1.3 傅里叶系数 ……183
习题一 ……190
第二节 傅里叶级数的收敛性 ……190
2.1 均方误差、贝塞耳不等式 ……190
2.2 分段连续与分段可微函数 ……196
习题二 ……202
2.3 狄利克雷积分 ……202
2.4 收敛定理 ……205
2.5 例题 ……210
习题三 ……215
*2.6 傅里叶级数的一致收敛性 ……216
*习题四 ……218
第三节 只含正弦与只含余弦的级数 ……219
3.1 偶函数与奇函数 ……219
3.2 只含余弦与只含正弦的傅里叶级数 ……221
习题五 ……223
第四节 任意区间的情形 ……223
4.1 在区间[$-l$, l]上的

傅里叶级数 ………223
4.2 一般的说明 …………226
习题六 ………………………228
第五节 弦的自由振动 …………229
5.1 弦的自由振动问题 …229
5.2 用傅里叶方法求解 …230
习题七 ………………………236
*第六节 傅里叶积分与傅里叶变换简介 …………237
6.1 傅里叶积分 …………237
6.2 偶函数和奇函数的傅里叶积分 …………239
6.3 傅里叶变换 …………240
6.4 例题 ……………………241
*习题八 ……………………243
第四章小结 …………………243

习 题 答 案

预 篇

级数是一种重要的数学工具，在表示函数、计算数值、求解微分方程等方面都可以看到它的应用. 在本书中，我们向读者介绍级数的基本理论和一些应用. 为了使读者阅读方便，我们在本篇中先帮助读者复习一下与级数理论密切相关的有关数列的知识. 并且给些补充.

第一节 数 列

1.1 数列的极限

数列就是一串无穷无尽的数*)：

$$s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_n,\ \cdots.$$

更确切地说，对于每个自然数 n，有唯一确定的实数 s_n 和它对应. 我们用 $\{s_n\}$ 表示一个数列. 每个 $s_n(n=1,\ 2,\ \cdots)$ 叫做数列 $\{s_n\}$ 的项，自然数 n 叫做项 s_n 的号码.

数列极限的定义)** 设给定一个数列 $\{s_n\}$，如果存在一个实数 s，它与 $\{s_n\}$ 有以下关系：

"对于任意给定的正数 ε（不论多么小），总存在自然数 N（充分大），使当号码 $n>N$ 时，就有

$$|s-s_n|<\varepsilon."$$

这时就说数列 $\{s_n\}$ 收敛，以数 s 为极限，或简单地说：$\{s_n\}$ 收敛

---

*) 与中学课本不同，这里不考虑"有穷数列".

**) 参看本丛书《一元函数微分学》105 页定义 1.

于 s，或说 s_n 趋向 s，记作

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s.$$

在不致发生误解的情况下，我们也写作

$$\lim s_n = s \quad 或 \quad s_n \to s.$$

以上定义叙述的数列 $\{s_n\}$ 与其极限 s 之间的关系可以说成："只要号码 n 充分大，就可以使 s_n 与 s 任意接近．"这描写了人们以下的直观想法："当号码 n 无限制地变大时，s_n 就无限制地接近 s．"例如

$$\lim\left(1-\frac{1}{n}\right)=1, \qquad \lim\frac{1}{2^n}=0.$$

（读者可用定义验证这两个等式．）

有一类最简单的数列叫*常数列*，这就是数列 $\{s_n\}$ 的一切项都等于同一个数的情况：

$$s_n = k \quad (n=1,\ 2,\ \cdots).$$

这时，数列 $\{s_n\}$ 必以 k 为极限，通常写作

$$\lim k = k,$$

并称：常数列以自己的值为极限．这一事实是极易用定义证明的．

最后，我们指出：如果一个数列没有极限，即它不收敛，就称它*发散*．

1.2 数列极限的性质

我们把数列极限的重要性质分别列举于下，但大部分性质不再证明，读者可以查阅本丛书《一元函数微分学》第二章第三节的内容．不过，我们建议读者最好自己先试证一下，这会有助于对极限概念的加深理解与巩固．

1) 唯一性 在数列极限的定义中，我们给出了数列$\{s_n\}$与数 s 之间的关系，只要二者之间存在这样的关系，就说$\{s_n\}$以 s 为极限．问题是：对于一个给定的数列$\{s_n\}$，满足定义条件的数 s（如果存在）是否只有一个？ 从直观上看，这是显然的．但按数学的严格要求来说，还需要根据定义进行证明．

如果数列$\{s_n\}$有极限，这极限是唯一的．

【证】 设$\{s_n\}$有极限 s：$\lim s_n = s$．假定$\{s_n\}$还有另外的极限 t：$\lim s_n = t$，且 $t \neq s$．由此假定会导致矛盾．事实上，既然 s 与 t 都是 $\{s_n\}$ 的极限，则根据定义：对于任意给定的 $\varepsilon > 0$（不论多么小），必存在两个自然数 N_1 和 N_2，使得

当 $n > N_1$ 时，$|s - s_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ *)；

当 $n > N_2$ 时，$|t - s_n| < \frac{\varepsilon}{2}$．

设 N 是 N_1 与 N_2 两自然数中最大的一个：

$$N = \max\{N_1,\ N_2\}^{**)},$$

那么，当 n 大于 N 时，必然同时大于 N_1 及 N_2．故当 $n > N$ 时，同时有

$$|s - s_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |t - s_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

这样一来，我们就得到，当 $n > N$ 时，

$$\begin{aligned} |s - t| &= |s - s_n + s_n - t| \leqslant |s - s_n| + |s_n - t| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

根据假定：s 与 t 是两个确定的、不相等的实数，从而$|s - t|$

---

*) ε 表任意小的正数，$\frac{\varepsilon}{2}$ 也表任意小的正数．

**) max 是英文 maximum（最大）的简写．

是一个确定的正数，它不可能小于任意小的正数 ε. 由这矛盾就证明了数列$\{s_n\}$的极限 s 是唯一的. 】

2）有界性　收敛数列是有界的，就是说，如果$\{s_n\}$收敛，那么存在一个正数 M，使对于一切号码 n，都有

$$|s_n|<M.$$

3）保号性

(a_1) 如果 $\lim s_n=s>0$，则在某一号码以后，$s_n>\frac{s}{2}>0$；

(a_2) 如果 $\lim s_n=s<0$，则在某一号码以后，$s_n<\frac{s}{2}<0$.

(b_1) 如果$\{s_n\}$收敛，且在某一号码以后，$s_n\geqslant 0$，则$\{s_n\}$的极限 $s\geqslant 0$；

(b_2) 如果$\{s_n\}$收敛，且在某一号码以后，$s_n\leqslant 0$，则$\{s_n\}$的极限 $s\leqslant 0$.

请读者注意，在性质(b_1)中，即使题设条件的不等式中不带等号，即 $s_n>0$，我们也不能一般地推断 $s>0$，也就是说，只能判断 $s\geqslant 0$. 这只要看数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$就可以了. 关于性质($b_2$)也有类似的情况.

4）四则运算性质

(a) 如果 $\lim s_n=s$，$\lim t_n=t$，则 $\lim(s_n\pm t_n)=s\pm t$.

(b) 如果 $\lim s_n=s$，且 k 是常数，则 $\lim(ks_n)=ks$.

(c) 如果$\{s_n\}$有界，且 $\lim t_n=0$，则 $\lim(s_nt_n)=0$.

(d) 如果 $\lim s_n=s$，$\lim t_n=t$，则 $\lim(s_nt_n)=st$.

(e) 如果 $\lim s_n=s$，$\lim t_n=t\neq 0$，则 $\lim\frac{s_n}{t_n}=\frac{s}{t}$.

5）有关不等式的性质

(a_1) 设 $\lim s_n=s$，$\lim t_n=t$. 如果 $s>t$，则在某一号码以

后，$s_n>t_n$;

(a_2) 设 $\lim s_n=s$, $\lim t_n=t$. 若在某一号码以后，$s_n\geqslant t_n$，则 $s\geqslant t$ *⁾.

(b) 如果在某一号码以后，s_n 总夹在 t_n 与 p_n 之间：$t_n\leqslant s_n\leqslant p_n$，并且 $\{t_n\}$ 与 $\{p_n\}$ 有共同极限：$\lim t_n=\lim p_n=s$，则 $\{s_n\}$ 也收敛于同一极限：$\lim s_n=s$.

1.3 无穷极限及有关性质

无穷极限的定义：

(1) 设给定一个数列 $\{s_n\}$. 如果它具有以下性质：

"对于任意给定的正数 M（不论多么大），总存在自然数 N（充分大），使当 $n>N$ 时，就有

$$s_n>M."$$

这时就称数列 $\{s_n\}$ *发散到正无穷*，或称 s_n *趋向正无穷*，记作

$$\lim_{n\to\infty} s_n=+\infty,\ \text{或}\quad \lim s_n=+\infty,\ \text{或}\quad s_n\to+\infty.$$

以上叙述的数列 $\{s_n\}$ 发散到正无穷的定义可以说成："只要号码 n 充分大，就可以使 s_n 的值任意大."这描述了人们以下的直观想象："当号码 n 无限制地变大时，s_n 的值就保持为正且随之无限制地变大."

(2) 设给定一个数列 $\{s_n\}$. 如果它具有以下性质：

"对于任意给定的正数 M（不论多么大），总存在自然数 N（充分大），使当 $n>N$ 时，就有

$$s_n<-M."$$

这时就称数列 $\{s_n\}$ *发散到负无穷*，或说 s_n *趋向负无穷*，记作

$$\lim_{n\to\infty} s_n=-\infty,\ \text{或}\quad \lim s_n=-\infty,\quad \text{或}\quad s_n\to-\infty.$$

---

*⁾ 参看性质 3)后面的注意.

读者自己可体会一下这个定义的直观意义.

例如：$\lim 2^n=+\infty$, $\lim(-2n)=-\infty$.

这里我们要做几点注解：

i) 尽管在定义(1)或(2)中，我们采用了极限的记号'lim'，读者还应明确这里说的是发散数列的特殊情况，因为这里不存在象1.1段的极限定义中那个确定的数 s.

ii) 在这每种情况里，数列$\{s_n\}$虽然发散，但它却具有一种确定的趋势：在情形(1)中，表示 s_n 的点在数轴上向右无限制地离去；在情形(2)中，表示 s_n 的点在数轴上向左无限制地离去. 在这样的理解下，有时我们也称情形(1)与(2)中的数列$\{s_n\}$具有"无穷极限"$+\infty$和$-\infty$. 当然，这不同于原来意义下的极限. 对于无穷极限，决不可随意引用1.2段中有关极限的性质.

iii) 如果一个数列既不收敛，又不具有无穷极限，我们就称它振动发散. 以下是振动发散数列的例子：

$$a_n=1+(-1)^n,\ b_n=n+(-1)^n n,\ c_n=(-1)^n n.$$

注意 这里数列$\{c_n\}$虽然振动发散，但它的绝对值数列却有无穷极限 $\lim|c_n|=+\infty$.

以下列出一些与无穷极限有关的重要性质：

1) 如果 $\lim|s_n|=+\infty$，则 $\lim\dfrac{1}{s_n}=0$.

2) 如果 $s_n\neq 0\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$，但 $\lim s_n=0$，则 $\lim\dfrac{1}{|s_n|}=+\infty$.

3) 如果 $\lim|s_n|=+\infty$，且$\{t_n\}$有界，则 $\lim|s_n\pm t_n|=+\infty$.

4) 如果 $\lim|s_n|=+\infty$，且 $|t_n|\geqslant\alpha>0\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$，其中 α 是固定的正数，则 $\lim|s_n t_n|=+\infty$.