应用数学丛书

渐近分析方法及应用

徐利治　陈文忠　编著

国防工业出版社

出版说明

近二十年来电子工程、控制工程、系统工程及其它领域都获得巨大发展。众所周知，这些科学技术研究的发展是与现代逐渐形成的应用数学学科紧密相联，相辅相成。尤其近年发展起来的边缘学科，更是与数学紧密结合。但一般数学专著比较偏重于论证严谨，全面系统，篇幅较大，理论较深。广大科技工作者学习此类著作，往往需时较多，与工作结合不紧，收效不大。本丛书将为目前在电子工程、控制工程、系统工程等领域工作的同志在数学基础的提高上，提供适合其工作特点的数学参考书。

本丛书是一种介于现代应用数学专著与工程专业理论书籍之间的桥梁参考著作，更着重于科技工作中应用较多的数学概念，分析和解题的基本技巧，也包括一部分适合于实际工作者为学习更高深的现代应用数学专著所需之基础知识。

本丛书选材包括三个方面：基础数学；应用数学有关领域的基础介绍；应用于科技中的典型基础专业理论。出版采用分册形式．各册内容独立，自成系统，但仍有少量交叉，分期分批出版。

丛书可供大专院校有关专业研究生、教师、从事科研生产的工程师参考。

序　言

渐近分析是数学分析中的一个重要分支，而大参数积分的渐近方法，则是渐近分析理论中的重要内容和工具，因此，对它的研究有着理论上和实用上的意义。虽然关于大参数积分的渐近方法，早在一百六十年前Laplace就提出一个经典性定理和方法，但直到最近几年，由于应用数学的发展和刺激，关于大参数积分渐近方法的研究，尤其是对大参数多重积分以及激烈振荡函数积分的研究论文，仍然不断涌现。

本书的主要目的是试图对渐近分析的基本理论及应用作比较重点的论述，特别是对大参数积分的渐近理论和方法作比较系统地讨论，其中许多重要命题是作者之一早年的研究成果。

为方便读者，本书附有关于渐近分析理论的重要研究文献，其中包括一些对应用数学和数值积分特别有用的文献。

最后，著者谨向本书编辑、审稿以及稿件校订同志付出的细致而负责的劳动表示深切敬意和感谢，同时对为本书誊写而付出巨大劳动的吴自力、周密和陈宇红等同志表示感谢。

徐利治　陈文忠

1987.6.

应用数学丛书目录

*1. Z变换与拉普拉斯变换……………………关肇直、王恩平 编著
*2. 常微分方程及其应用………………………秦化淑、林正国 编著
*3. 实变函数论基础……………………………胡钦训 编著
*4. 正交函数及其应用…………………………柳重堪 编著
*5. 沃尔什函数与沃尔什变换…………………关肇直、陈文德 编著
*6. 圆柱函数……………………………………刘颖 编著
*7. 集合论………………………………………程极泰 编著
*8. 图 论………………………………………王朝瑞 编著
*9. 概率论………………………………………狄昂照 编著
*10. 矩阵理论…………………………………王耕禄、史荣昌 编著
*11. 复变函数论………………………………杨维奇 编著
*12. 逼近论…………………………徐利治、周蕴时、孙玉柏 编著
*13. 矢量与张量分析………………冯潮清、赵愉深、何浩法 编著
*14. 模糊数学………………………李洪兴、刘锡荟、汪培庄 编著
*15. 编码理论…………………………………肖国镇、卿斯汉 编著
*16. 应用泛函分析……………………………柳重堪 编著
17. 偏微分方程…………………………………丁夏畦 编著
18. 球函数及其应用……………………………楼仁海 编著
*19. 椭圆函数及其应用………………………高本庆 编著
*20. 应用离散数学……………………………陈文德 编著
*21. 拓扑理论及其应用………………………王则柯、凌志英 编著
*22. 网络理论…………………………………张正寅 编著
*23. 广义函数及其解析表示…………………李邦河、李雅卿 编著
*24. 群论………………………………………刘木兰 编著
*25. 数理逻辑…………………………………沈百英 编著

*26. 线性系统与多变量控制……………………叶庆凯 编著
27. 最优化计算方法…………马仲蕃、应玫茜、陈光亚 编著
28. 实用数理统计………………………李国英、吴启光 编著
*29. 多项式与多项式矩阵……………王恩平、王朝珠 编著
30. 索伯列夫空间……………………………丁夏畦 编著
31. 旋转群与四元素方法……………………毕大川 编著
*32. 信息论与最优编码………………………章照止 编著
33. 场的数学理论及物理应用……………杜 珣 编著
34. 系统的动态辨识…………………………张永光 编著
*35. 非线性系统分析与应用…………………司徒荣 编著
36. 数学物理数值方法 应隆安、韩厚德 编著
滕震环、黄禄平
*37. 误差理论与数据处理……………………贾沛璋 编著
38. 可计算性与计算复杂性…………………李 未 编著
*39. 随机过程理论及应用……………………熊大国 编著
40. 估计理论与随机控制……………………卢伯英 编著
*41. 应用组合数学……………………………刘振宏 编著
*42. 渐近分析方法及应用…………徐利治、陈文忠 编著
43. 有限元方法………………………………应隆安 编著
44. 经济数学……………………………苑凤歧、林 寅 编著
*45. 预测的数学方法…………………………张有为 编著
46. 粘性流体理论……………………吴望一、韩厚德 编著
47. 塑性理论…………………………………黄筑平 编著
48. 变分法及其应用………………叶庆凯、郑应平 编著

* 为已出版或即将出版的书目。

目　录

第一章　阶的计算法

§1.1　阶 的 概 念

§1.1.1　O 关系和记号

设 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 是实数集合 X 上的函数，c 是 X 的极限点（c 可以是 $+\infty$ 或 $-\infty$）。若 $x\in X$ 且 $x\to c$ 时，$\left|\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}\right|$ 是有界的，则记

$$f(x)=O(\phi(x))\qquad (x\to c,\quad x\in X)$$

特别当 $\left|\dfrac{f(x)}{\phi(x)}\right|$ 在 X 上有上界时，则记

$$f(x)=O(\phi(x))\qquad (x\in X)$$

例 1　设 $X=(-\infty,+\infty)$，有

$$x^2=O(x)\qquad (x\to 0,\quad x\in X)$$

$$e^{-x}=O(1)\qquad (x\to+\infty,\quad x\in X)$$

$$1-\cos x=O(x^2)\qquad (x\to 0,\quad x\in X)$$

$$\sin x=O(1)\qquad (x\in X)$$

例 2　设 $X=(0,+\infty)$，则有

$$\frac{1}{\ln x}=O(1)\qquad (x\to+\infty,\quad x\in X)$$

$$\ln^b x=O(x^{1/2})\qquad (x\to+\infty,\quad x\in X)$$

$$x=O(x^2)\qquad (x\to+\infty,\quad x\in X)$$

$$e^{-x}=O(1)\qquad (x\in X)$$

下文中用 $f=O(\phi)$ $(x\to c,\ x\in X)$ 表示 $f(x)=O(\phi(x))$ O 关系有如下运算性质：

（1）若 $f=O(\phi)$ $(x\to c,\ x\in X)$ 且 $\alpha>0$，则有

$$|f|^{\alpha}=O(|\phi|^{\alpha}) \qquad (x\to c, x\in X)$$

（2）若 $f_i=O(\phi_i)$ $(x\to c, x\in X)$ 且 a_i 是常数，则有

$$\sum_{i=1}^{n} a_i f_i=O\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i||\phi_i|\right) \quad (x\to c, x\in X)$$

（3）若 $f_i=O(\phi_i)$ $(x\to c, x\in X)$，则有

$$\prod_{i=1}^{n} f_i=O\left(\prod_{i=1}^{n}\phi_i\right) \quad (x\to c, x\in X)$$

（4）若 $f=O(\psi)$，$\psi=O(\phi)$ $(x\to c, x\in X)$，则有

$$f=O(\phi) \qquad (x\to c, x\in X)$$

例 3 设 $X=(0,\infty)$，则有

$$O(x)+O(x^2)=O(x) \qquad (x\to 0, x\in X)$$

$$O(x)+O(x^3)=O(x^3) \qquad (x\to+\infty, x\in X)$$

$$e^{O(x)}=e^{O(x^2)} \qquad (x\to+\infty, x\in X)$$

若存在正常数 M，m 使得当 $x\in X$ 且 $x\to c$ 时有

$$0<m\leqslant\left|\frac{f(x)}{\phi(x)}\right|\leqslant M<+\infty$$

则说 O 关系 $f(x)=O(\phi(x))$ $(x\to c, x\in X)$ 是最佳的。有时说当 $x\to c$ 时 $f(x)$ 与 $\phi(x)$ 是弱等价的，记作

$$f(x)\asymp\phi(x) \quad (x\to c, x\in X)$$

特别记，当 $x\in X$ 且 $x\to c$ 时有

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{\phi(x)}=l\neq 0$$

则记 $f(x)=\overline{O}(\phi(x))$ $(x\to c, x\in X)$，明显地，若 $f(x)=\overline{O}(\phi(x))$ $(x\to c, x\in X)$，则有 $f(x)\asymp\phi(x)$ $(x\to c, x\in X)$。

例 4 设 $X=(0,+\infty)$，则有

$$2x+x\sin x\asymp x \qquad (x\to+\infty, x\in X)$$

$$\ln(e^{2x\cos x}+e^{x})\asymp x \qquad (x\to+\infty, x\in X)$$

$$1-\cos x=\overline{O}(x^2) \qquad (x\to 0, x\in X)$$

§1.1.2 o关系和记号

设$f(x)$和$\phi(x)$是实数集合X上的函数，若$x\in X$且$x\to c$时，有

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{\phi(x)}=0$$

则记

$$f(x)=o(\phi(x)) \qquad (x\to c,\ x\in X)$$

明显地o关系是一种特殊的O关系。

例 1 设$0<\theta<1$，则$\theta^x=o(1)$ $(x\to+\infty)$

解 令$\theta=\dfrac{1}{1+d}$ $(d>0)$ 则

$$0<\theta^x=\left(\frac{1}{1+d}\right)^x<\frac{1}{1+xd}\to 0 \qquad (x\to+\infty)$$

例 2 设$X=(0,\infty)$，$\delta>0$是确定的，则有

$$x=o((1+\delta)^x) \qquad (x\to+\infty,\ x\in X)$$

$$\ln x=o(x^\delta) \qquad (x\to+\infty,\ x\in X)$$

解 不妨设$0<\delta<1$，于是

$$0<\frac{x}{(1+\delta)^x}<\frac{x}{1+x\delta+\frac{1}{2}x(x-1)\delta^2}\to 0$$

$$(x\to+\infty)$$

又令$\ln x=t$，$e^\delta=1+d$ $(d>0)$，则有

$$0<\frac{\ln x}{x^\delta}=\frac{t}{e^{\delta t}}=\frac{t}{(1+d)^t}\to 0 \qquad (x\to+\infty)$$

例 3 设$X=(-\infty,+\infty)$，则有

$$1-\cos x=o(x) \qquad (x\to 0,\ x\in X)$$

$$e^x-1=o(x) \qquad (x\to 0,\ x\in X)$$

$$\sin^2 x=o(x) \qquad (x\to 0,\ x\in X)$$

若X是复数集合，则在$f(x)=o(\phi(x))$的定义中要求$\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{\phi(x)}=0$关于$\arg x$ $(x\in X)$一致成立。

例 4　设$X=\left\{x\,\middle|\,|\arg x|\leqslant\frac{\pi}{2}-\delta,\ 0<\delta<\frac{\pi}{2}\right\}$，则有

$$e^{-x}=o(1)\qquad(x\to\infty,\ x\in X)$$

应当指出，若取$X=\left\{x\,\middle|\,|\arg x|<\frac{\pi}{2}\right\}$，则上述$o$关系并不成立，因为此极限关系对$\arg x$在$X$内不一致成立。

由于o关系是一种特殊的O关系，因此o关系除了具有类似于O关系所罗列的运算性质外，它与O关系间还有如下运算性质：

$$O(o(\phi))=o(O(\phi))=o(\phi)\quad(x\to c,\ x\in X)$$

$$O(\phi)+o(\phi)=O(\phi)\qquad(x\to c,\ x\in X)$$

$$O(\phi)o(\psi)=o(\phi\psi)\qquad(x\to c,\ x\in X)$$

§1.1.3　渐近等价关系和记号

设$f(x)$和$\phi(x)$是实数集合X上的函数，c是X的极限点。若$x\in X$且$x\to c$时，有

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{\phi(x)}=1$$

则说当$x\to c$时，$f(x)$和$\phi(x)$是渐近等价的，记作

$$f(x)\sim\phi(x)\qquad(x\to c\quad x\in X)$$

明显地渐近等价关系也是一种特殊的$\overline{o}$关系。

例 1　设X是实数集合，$x=0$是它的极限点，则有

$$\sin x\sim x\qquad(x\to 0,\ x\in X)$$

$$\ln(1+x)\sim x\qquad(x\to 0,\ x\in X)$$

$$e^x-1\sim x\qquad(x\to 0,\ x\in X)$$

$$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2\qquad(x\to 0,\ x\in X)$$

例 2　设$X=(0,\infty)$，则有

$$x+1\sim x\qquad(x\to+\infty,\ x\in X)$$

$$\operatorname{sh}x\sim\frac{1}{2}e^x\qquad(x\to+\infty,\ x\in X)$$

$$n!\sim e^{-n}n^n\sqrt{2n\pi}\qquad(n\to+\infty,\ n\in X)$$

渐近等价关系 $f(x)\sim\phi(x)\quad(x\to c,\ x\in X)$可以写作如下形式：

$$f(x)=\phi(x)+o(\phi(x))\qquad(x\to c,\ x\in X)$$

最后指出，若X是复数集合，则渐近等价关系的定义中，同样要求其极限关于 $\arg x\ (x\in X)$一致成立。

§1.2 阶的估计方法

§1.2.1 阶关系的积分

渐近等价关系和阶(大O阶和小o阶)关系在积分收敛的条件下，可以分别积分而得到新的渐近等价关系和阶关系。

定理1.1 设$f(x)$，$\phi(x)$在$[a,c]$上可积，若$f(x)=O(\phi(x))\quad(x\to c)$，则有

$$\int_x^c f(t)dt=O\left(\int_x^c|\phi(t)|dt\right)\qquad(x\to c)$$

若$f(x)\sim\phi(x)\quad(x\to c)$，则有

$$\int_x^c f(t)dt\sim\int_x^c\phi(t)dt\qquad(x\to c)$$

和

$$\int_a^x f(t)dt\sim\int_a^x\phi(t)dt\qquad(x\to c)$$

证明 由于$f(x)=O(\phi(x))\quad(x\to c)$，所以对于充分近于$c$的$x$有

$$|f(x)|\leqslant M|\phi(x)|$$

于是

$$\int_x^c|f(t)|dt\leqslant M\int_x^c|\phi(t)|dt$$

从而有

$$\left|\int_x^c f(t)dt\right|\leqslant M\int_x^c|\phi(t)|dt$$

即得

$$\int_x^c f(t)dt=O\left(\int_x^c|\phi(t)|dt\right)\qquad(x\to c)\quad \text{证毕}$$

其余关系可类似证明。

例 1　设 $f(x)$在$[a,+\infty)$内可积且 $f(x)\sim x^{\nu}(x\to+\infty)$ 其中 ν 是实数，则有

$$\int_{x}^{+\infty} f(t)dt\sim\frac{x^{\nu+1}}{\nu+1}\quad(x\to+\infty,\ \nu<-1)$$

和 $x\to+\infty$

$$\int_{a}^{x} f(t)dt\sim\begin{cases}\text{常数} & (\nu<-1)\\ \ln x & (\nu=-1)\\ \dfrac{x^{\nu+1}}{\nu+1} & (\nu>-1)\end{cases}$$

这些渐近等价关系可以推广到复积分。

注意，定理1.1中O记号改为o记号仍然成立。

§1.2.2　阶估计的若干定理

一般地讨论阶估计方法是困难的，这里我们介绍一些常用的阶估计定理。

定理1.2　设 $f(n)$为实函数且有

$$f(n)=1+\frac{\alpha}{n}+O\left(\frac{1}{n^{1+\lambda}}\right)\qquad(n\to+\infty)$$

其中 $\lambda>0$，则对任何实数 r 有

$$(f(n))^r=1+\frac{r\alpha}{n}+O\left(\frac{1}{n^{1+\mu}}\right)\qquad(n\to+\infty)$$

其中 $\mu>0$。

证明　由于

$$\ln\left(1+\frac{\alpha}{n}+O\left(\frac{1}{n^{1+\lambda}}\right)\right)=\frac{\alpha}{n}+O\left(\frac{1}{n^{1+\nu}}\right)\quad(\nu>0)$$

$$\exp\left(\frac{\alpha}{n}+O\left(\frac{1}{n^{1+\nu}}\right)\right)=1+\frac{\alpha}{n}+O\left(\frac{1}{n^{1+\mu}}\right)\quad(\mu>0)$$

所以

$$\begin{aligned}(f(n))^r&=\exp(r\ln f(n))=\exp\left\{r\left(\frac{\alpha}{n}+O\left(\frac{1}{n^{1+\nu}}\right)\right)\right\}\\&=\exp\left(\frac{r\alpha}{n}+O\left(\frac{1}{n^{1+\nu}}\right)\right)=1+\frac{r\alpha}{n}+O\left(\frac{1}{n^{1+\mu}}\right)\end{aligned}$$

证毕

定理1.3 设$u_n\neq 0$，且

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=1+\frac{\rho}{n}+O\left(\frac{1}{n^{1+\alpha}}\right) \qquad (n\to+\infty)$$

其中$\alpha>0$是常数，ρ是实常数，则有

$$u_n=\overline{O}(n^{\rho}) \qquad (n\to+\infty)$$

证明 由于

$$\ln\frac{u_{n+1}}{u_n}=\ln\left(1+\frac{\rho}{n}+O\left(\frac{1}{n^{1+\alpha}}\right)\right)=\frac{\rho}{n}+O\left(\frac{1}{n^{1+\lambda}}\right) \quad (\lambda>0)$$

所以

$$\ln u_n-\ln u_1=\rho\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}+O\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^{1+\lambda}}\right)$$

注意到$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{1+\lambda}}=P(\lambda>0)$和$\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}=\ln n+r+o(1)$，这里$r$是Euler常数，则有

$$\ln u_n-\ln u_1=\rho(\ln n+r)+P+o(1)$$

从而得到

$$u_n=\overline{O}(n^{\rho}) \qquad (n\to+\infty)$$

证毕

定理1.4 （Kronecker） 设$\varphi(n)\downarrow O(n\to+\infty)$，且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\varphi(n)$收敛，则有

$$\varphi(n)\sum_{k=1}^{n}a_n=o(1) \qquad (n\to+\infty)$$

证明 由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\varphi(n)$收敛，所以对$\forall\varepsilon>0$，存在自然数$N$，使得当$n>N$时有

$$-\frac{\varepsilon}{2}<\sum_{k=N}^{n}a_k\varphi(k)<\frac{\varepsilon}{2}$$

又$\varphi(k)^{-1}\uparrow$，因此利用Abel引理得到

$$-\frac{\varepsilon}{2}\varphi(n)^{-1}<\sum_{k=N}^{n}a_k<\frac{\varepsilon}{2}\varphi(n)^{-1}$$

即

$$\left|\varphi(n)\sum_{k=N}^{n}a_k\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

又因为$\varphi(n)\to 0\ (n\to+\infty)$，所以对$\forall\varepsilon>0$，存在自然数$N'$，使得当$n>N'$时，有

$$\left|\varphi(n)\sum_{k=1}^{N-1}a_k\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

于是当$n>\max(N,N')$时，有

$$\left|\varphi(n)\sum_{k=1}^{n}a_k\right|<\varepsilon$$

证毕

特别地，若取$a_k\equiv 1\quad(k=1,2,\cdots)$则有

推论1.1 设$\varphi(n)\downarrow O(n\to+\infty)$，若$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(n)$收敛，则有

$$n\varphi(n)=o(1)\qquad(n\to+\infty)$$

又若取$a_k(k=1,2,\cdots)$使得$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，则有

推论1.2 设$\phi(n)>0$且$\phi(n)\uparrow+\infty(n\to+\infty)$，若$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，则有

$$\sum_{k=1}^{n}a_k\phi(k)=o(\phi(n))\qquad(n\to+\infty)$$

定理1.5 （Euler） 设$f(x)\in c[0,+\infty)$且$f(x)\downarrow O(x\to+\infty)$，则有