高等学校试用教材

复变函数论

钟玉泉 编

人民教育出版社

本书是编者根据1977年理科数学教材会议上制订的复变函数教材编写大纲，在历年主讲该课使用的自编讲义基础上改编而成。全书系统地介绍了单复变函数的基本理论和基本方法。对于教学中的难点，一般写的较详细，对于多值解析函数这个教学难点，采取分散讲授的办法；各章、节配备了大量的例题和习题，习题大都附有答案或提示，便于读者自学。本书可作综合大学、师范院校学生同名课程的教材或教学参考书。

高等学校试用教材

复 变 函 数 论

钟玉泉 编

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32 印张 9.875 字数 237.000

1979年8月第1版 1980年3月第1次印刷

印数 00,001—40,000

书号 13012·0380 定价 0.72 元

序

本书根据 1977 年理科数学教材会议上制订的复变函数教材编写大纲，在历年主讲该课使用的自编讲义基础上改编成的. 全书系统地介绍了单复变函数的基本理论和基本方法.

考虑到复变函数论是数学专业的一门重要基础课，又是数学分析的后继课，在编写本书时，注意了下列几点:

1. 对与数学分析中平行的概念，如极限、连续、微分等，既指出其相似之处，更强调其不同之点，以免初学者疏忽.

2. 对复变函数论中的基本定理和重要定理，如柯西积分定理和关于本性奇点的维尔斯特拉斯定理等，从叙述、证明到推广，均注意了科学性和严密性. 这不仅反映了复变函数理论本身的系统性和谨严性，同时也可藉以锻炼读者思考问题和逻辑推理的能力.

3. 对多值解析函数这个教学上的难点，为使读者较易接受，本书把它分散在第二章、第六章及第七章内. 并在第二章内，把求根式函数$\sqrt[n]{z}$的单值解析分支的方法写得较细，这样做或许能使读者举一反三.

4. 对解析函数在流体力学、机翼理论及电学等方面的应用，本书作了简明的介绍，藉以使读者了解复变函数论方法在解决实际问题上的重要性.

5. 配备了大量的例题和习题，习题大都附有答案或提示，以供教师选用，也便于读者自学.

6. 因限于篇幅或工具知识而不能给出证明的定理，大都指出参考资料. 用小字排印的部分，对初学者可不作要求.

附录中简单介绍了我国青年数学家杨乐、张广厚的出色工作，

以适应有些缺乏这方面资料的读者的要求.

使用本书作教材,大体可按6、10、8、8、8、10、6、12、4的顺序来分配各章讲授学时. 如讲授学时少于72学时,教师可斟酌删去一些次要及较深部分的内容. 例如,可删去克利斯脱弗-席瓦尔兹公式及最末一章等.

本书由武汉大学路见可教授主审. 武汉大学、北京大学、南开大学、吉林大学、南京大学、上海师范大学、西南师范学院、四川师范学院、四川大学的同志参加了审查. 他们提出了许多宝贵的意见,在此表示衷心感谢. 特别是路见可教授不惮其烦,为编者复审修改了全部稿件,使原稿得到了很大改进,编者对他的这种负责精神表示敬佩和学习.

本书初稿曾经四川大学蒲保明教授和周纪溥、张茂孝两同志审阅,也在此一并致谢.

但限于编者水平,谬误之处仍然难免,敬请读者提出来批评指正.

编者于四川大学数学系

1978. 9.

目　　录

引 言

十六世纪中叶，意大利卡尔丹(H. Cardan, 1545)在解三次方程时，首先产生了负数开平方的思想. 他把 40 看作 $5+\sqrt{-15}$与$5-\sqrt{-15}$的乘积，然而这只不过是一种纯形式的表示而已. 当时，谁也说不上这样表示究竟有什么好处，加之由于对复数的有关概念及性质了解得不清楚，用它们进行计算又得到一些矛盾，因而，长期以来人们就把复数看作不能接受的"虚数". 直到十七世纪和十八世纪，随着微积分的发明与发展，情况才逐渐有了改变. 另外的原因，是由于这个时期复数有了几何的解释，并把它与平面向量对应起来解决实际问题的缘故.

关于复数理论最系统的叙述，是由瑞士数学家欧拉(L. Euler)作出的. 他在 1777 年系统地建立了复数理论，发现了复指数函数和三角函数间的关系，创立了复变函数论的一些基本定理，并开始把它们用到水力学和地图制图学上. 用符号"i"作为虚数的单位，也是他首创的. 此后，复数才被人们广泛承认和使用.

在十九世纪，复变函数的理论经过法国数学家柯西(A. Cauchy)、德国数学家黎曼(B. Riemann)和维尔斯特拉斯(K. Weierstrass)的巨大努力，已经形成了非常系统的理论，并且深刻地渗入到代数学、数论、微分方程、积分方程等数学分支；同时，它在热力学、流体力学、电学等方面也有很多的应用.

二十世纪以来，复变函数已被广泛地应用在理论物理、弹性理论、天体力学等方面. 与数学中其它分支的联系也日益密切. 致使经典的复变函数理论，如整函数与亚纯函数理论、解析函数的边值问题等有了新的发展和应用. 并且，还开辟了一些新的方向，如

多元复变函数论、广义解析函数论和拟保形变换等. 另外, 在种种抽象空间的理论中, 复变函数还常常为我们提供新思想的模型.

复变函数研究的中心对象是所谓解析函数, 因此, 复变函数论又称为解析函数论.

复变函数是我国数学工作者从事研究最早也最有成效的数学分支之一. 我国老一辈的数学家在单复变函数及多复变函数方面做过许多重要的工作, 不少成果均已达到当时的国际水平. 在党的培养教育下, 在老一辈数学家的热忱帮助下, 我国许多中青年数学工作者, 正在健康地成长, 不少人已在数学的各个领域中做出了许多优异的成绩. 青年数学家杨乐、张广厚就是出色的代表, 他们在单复变函数的值分布理论中作出了具有世界先进水平的出色成果, 得到了国内外数学界的好评, 为伟大的社会主义祖国争了光. 这些事实充分证明, 中国人民有志气有能力, 一定能继承伟大领袖毛主席的遗志, 在以华国锋同志为首的党中央领导下进行新的长征, 在本世纪内实现四个现代化, 并在数学的各个领域赶上和超过世界先进水平.

第一章　复数与复变函数

§1. 复　　数

1. 复数域　形如

$$z=x+iy \quad 或 \quad z=x+yi$$

的数，称为复数，其中 x 和 y 是任意的实数，i 合于 $i^2=-1$，称为虚单位．实数 x 和 y 分别称为复数 z 的实部和虚部，常记为：

$$x=\mathrm{Re}z$$

$$y=\mathrm{Im}z$$

复数 $z_1=x_1+iy_1$ 及 $z_2=x_2+iy_2$ 相等，是指它们的实部与实部相等，虚部与虚部相等，即

$$x_1+iy_1=x_2+iy_2$$

必须且只须

$$x_1=x_2, \qquad y_1=y_2$$

虚部为零的复数就可看作实数，即 $x+i\cdot 0=x$；因此，全体实数是全体复数的一部分．

特别，$0+i\cdot 0=0$．

实部为零的复数称为纯虚数．

复数 $x+iy$ 和 $x-iy$ 称为互为共轭复数，即 $x+iy$ 是 $x-iy$ 的共轭复数，或 $x-iy$ 是 $x+iy$ 的共轭复数．复数 z 的共轭复数常记为 $\bar{z}$．于是

$$x-iy=\overline{x+iy}$$

对于这样定义的复数，我们必须规定其运算方法．由于实数是复数的特例，规定复数算术运算的一个基本要求是：复数运算

的法则施行于实数特例时，能够和实数运算的结果相符合，同时也要求复数算术运算能够满足实数算术运算的一般定律.

复数的加(减)法可按实部与实部相加(减)，虚部与虚部相加(减). 即复数 $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$ 相加(减)的法则是:

$$z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2)$$

结果仍是复数. 我们称复数 z_1+z_2 是复数 z_1 与 z_2 的和，称复数 z_1-z_2 是复数 z_1 与 z_2 的差.

复数的加法遵守交换律与结合律，而且减法是加法的逆运算，这些都很容易验证.

两个复数 $z_1=x_1+iy_1$ 及 $z_2=x_2+iy_2$ 相乘，可按多项式乘法法则来进行，只须将结果中的 i^2 换成 -1，即

$$z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+y_1x_2)$$

结果仍是复数，我们称它为 z_1 与 z_2 的积.

也易验证，复数的乘法遵守交换律与结合律，且遵守乘法对于加法的分配律.

两个复数 $z_1=x_1+iy_1$ 及 $z_2=x_2+iy_2$ 相除(除数$\neq 0$)时，可先把它写成分式的形式，然后分子分母同乘以分母的共轭复数，再进行简化，即

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2},\quad (z_2\neq 0)$$

结果仍是复数，我们称它为 z_1 与 z_2 的商. 这里除法是乘法的逆运算.

全体复数并引进上述算术运算后就称为复数域. 实数域和复数域都是代数学中所研究的“域”的实例. 和实数域不同的是，在复数域中不能规定复数的大小.

2. 复平面 一个复数 $z=x+iy$ 本质上由一对有序实数(x, y)唯一确定. 于是，能够建立平面上全部的点和全体复数间一一

对应的关系．换句话说，我们可以借助于横坐标为 x、纵坐标为 y 的点来表示复数 $z=x+iy$(图 1.1)．

由于 x 轴上的点对应着实数，故 x 轴称为实轴；y 轴上的点对应着纯虚数，故 y 轴称为虚轴．这样表示复数的平面称为复平面或 z 平面．

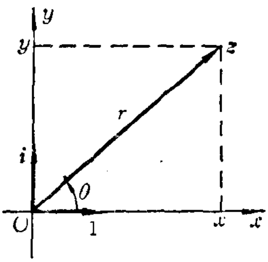

图 1.1

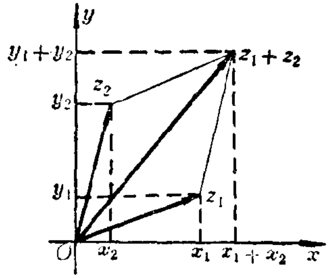

图 1.2

引进了复平面之后，我们在“数”和“点”之间建立了联系．以后在研究复变函数时，常可借助于几何直观，还可采用几何术语．这也为复变函数应用于实际提供了条件，丰富了复变函数论的内容．为了方便起见，今后我们不再区分“数”和“点”，说到“点”可以指它所代表的“数”，说到“数”也可以指这个数的代表“点”．例如，我们常说“点 $1+i$”，“顶点为 z_1, z_2, z_3 的三角形”等等．

在复平面上，从原点到点 $z=x+iy$ 所引的向量与这个数 z 也构成一一对应关系(复数 0 对应着零向量)，这种对应关系使复数的加(减)法与向量的加(减)法之间保持一致．

例如，让 $$z_1=x_1+iy_1,\quad z_2=x_2+iy_2$$

则 $$z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$$

由图 1.2 可以看出，z_1+z_2 所对应的向量，就是 z_1 所对应的向量与 z_2 所对应的向量的和向量．

又如，将 z_1-z_2 表成 $z_1+(-z_2)$，就可看出 z_1-z_2 所对应的

向量就是 z_1 所对应的向量减 z_2(即加 $-z_2$)所对应的向量(图1.3).

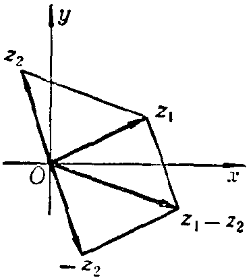

图 1.3

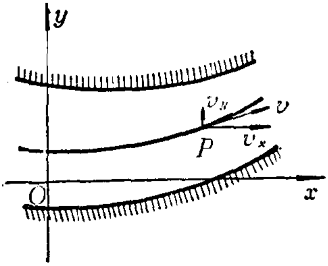

图 1.4

例 1.1 考虑一条江面上水在某时刻的流动. 假定在江面上取好一坐标系 xOy, 我们把江面上任意一点 P 的速度 v 的两个分量记为 v_x 与 v_y, 则我们可以把速度向量 v 写成复数(图 1.4)

$$v=v_x+iv_y$$

人们经过长期的摸索与研究, 发现对于很多的平面问题(如流体力学与弹性力学中的平面问题等)来说, 应用复数及复变函数作工具是十分有效的, 这正是由于复数可以表示平面向量的缘故.

3. 复数的模与幅角 表示复数 z 的点的位置, 也可以借助于 z 点的极坐标 r 和 θ 来确定(图 1.1).

上面我们用向量 $\overrightarrow{Oz}$ 来表示复数 $z=x+iy$, x, y 顺次等于 $\overrightarrow{Oz}$ 沿 x 轴与 y 轴的分量. 向量 $\overrightarrow{Oz}$ 的长度称为复数 z 的模或绝对值, 以符号 $|z|$ 或 r 表示, 因而有

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}\geqslant 0$$

这里引进的模的概念与对于实数的绝对值的概念是一致的.

根据图 1.1, 我们有不等式

$$|x|\leqslant|z|,\quad |y|\leqslant|z|,\quad |z|\leqslant|x|+|y| \tag{1.1}$$

根据图 1.2, 我们有不等式

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2| \tag{1.2}$$

(三角形两边之和≥第三边)

根据图 1.3，我们有不等式

$$||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1-z_2| \tag{1.3}$$

(三角形两边之差≤第三边)

由图 1.3 可见，$|z_1-z_2|$表示点 z_1 与点 z_2 的距离，记为

$$\rho(z_1, z_2)=|z_1-z_2|$$

实轴正向到复数 $z=x+iy\neq 0$ 所对应的向量$\overrightarrow{Oz}$的夹角

$$\theta=\mathrm{Arc\,tg}\frac{y}{x}$$

称为复数 z 的幅角，记为

$$\theta=\mathrm{Arg}z$$

我们知道，任一复数 $z\neq 0$ 有无穷多个幅角，今以 $\arg z$ 表其中的一个特定值，并称合条件

$$-\pi<\arg z\leqslant\pi \tag{1.4}$$

的那一个为 $\mathrm{Arg}z$ 的主值，或称之为 z 的主幅角. 于是有

$$\theta=\mathrm{Arg}z=\arg z+2k\pi \tag{1.5}$$

$$(k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

注意 当 $z=0$ 时，其模为零，幅角无定义.

当 $\arg z(z\neq 0)$表 z 的主幅角时，它与 $\mathrm{Arctg}\frac{y}{x}$的主值$\mathrm{arc\,tg}\frac{y}{x}$有如下关系：

$$\underset{(z\neq 0)}{\arg z}=\begin{cases}\mathrm{arc\,tg}\frac{y}{x} & \text{当 } z \text{ 在第一象限时}\\ \mathrm{arc\,tg}\frac{y}{x}+\pi & \text{当 } z \text{ 在第二象限时}\\ \mathrm{arc\,tg}\frac{y}{x}-\pi & \text{当 } z \text{ 在第三象限时}\\ \mathrm{arc\,tg}\frac{y}{x} & \text{当 } z \text{ 在第四象限时}\end{cases}$$

其中

$$-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}<\frac{\pi}{2}$$

思考题 当 z 在坐标轴上时，主幅角 $\arg z$ 分别取何值？

例 1.2 求 $\operatorname{Arg}(2-2i)$ 及 $\operatorname{Arg}(-3+4i)$.

解
$$\operatorname{Arg}(2-2i)=\arg(2-2i)+2k\pi$$
$$=\operatorname{arc\,tg}\frac{-2}{2}+2k\pi$$
$$=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$$
$$(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$$

$$\operatorname{Arg}(-3+4i)=\arg(-3+4i)+2k\pi$$
$$=\operatorname{arc\,tg}\frac{4}{-3}+\pi+2k\pi$$
$$=(2k+1)\pi-\operatorname{arc\,tg}\frac{4}{3}$$
$$(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$$

例 1.3 已知流体在某点 M 的速度 $v=-1-i$，求其大小和方向.

解 大小：$|v|=\sqrt{2}$

方向：$\arg v=\operatorname{arc\,tg}\frac{-1}{-1}-\pi=-\frac{3\pi}{4}$

从直角坐标与极坐标的关系，我们可以用复数的模与幅角来表示非零复数 z，即(由图 1.1)

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta) \tag{1.6}$$

特别，当 $r=1$ 时有

$$z=\cos\theta+i\sin\theta$$

这种复数称为单位复数.

我们引出熟知的欧拉(Euler)公式(参看本书第二章§3):

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta \tag{1.7}$$

并且容易验证

$$\left.\begin{aligned}&e^{i\theta_1}\cdot e^{i\theta_2}=e^{i(\theta_1+\theta_2)}\\&\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}=e^{i(\theta_1-\theta_2)}\end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

利用公式(1.7),就可以把(1.6)改写成

$$z=re^{i\theta} \tag{1.9}$$

我们分别称(1.6)及(1.9)式为复数 $z\neq0$ 的三角表示和指数形式.

例 1.4 $1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$;

$$i=1\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{2}i};$$

$$1=1\cdot(\cos0+i\sin0)=e^{0\cdot i};$$

$$-2=2(\cos\pi+i\sin\pi)=2e^{\pi i};$$

$$-3i=3\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=3e^{-\frac{\pi}{2}i}.$$

利用复数的指数形式作乘法比较简单,因由(1.8)可立得

$$\left.\begin{aligned}&z_1\cdot z_2=r_1e^{i\theta_1}\cdot r_2e^{i\theta_2}=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}\\&\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1e^{i\theta_1}}{r_2e^{i\theta_2}}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}\end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

所以

$$|z_1z_2|=|z_1||z_2|,\quad\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}\quad(z_2\neq0) \tag{1.11}$$

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2\\&\mathrm{Arg}\frac{z_1}{z_2}=\mathrm{Arg}z_1-\mathrm{Arg}z_2\end{aligned}\right\} \tag{1.12}$$

上面关于幅角的两个等式,两边各是无穷多个数(角度)的数集.例如,设(1.12)第一个等式右边