计算方法丛书

矩阵与算子广义逆

王国荣 著

科学出版社

中国科学院科学出版基金资助项目

计算方法丛书

矩阵与算子广义逆

王国荣　著

科学出版社

1994

(京)新登字 092 号

内 容 简 介

本书系统地论述了矩阵与算子广义逆的理论、计算方法和若干新的进展. 重点是叙述方程组解的广义逆, Drazin 逆, Cramer 法则的推广, 广义逆计算的直接方法, 并行算法和扰动理论, 有界线性算子广义逆的表示和逼近以及迭代算法. 并且附有一定数量的习题和一百多篇参考文献.

本书可供计算数学与应用数学工作者、工程技术人员、高等学校有关专业的高年级学生、研究生和教师参考.

计算方法丛书

矩阵与算子广义逆

王国荣 著

责任编辑 林 鹏

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

北京朝阳大地印刷厂印刷

蓝地公司激光照排

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1994 年 6 月第 一 版	开本: 850×1168 1/32
1994 年 6 月第一次印刷	印张: 8 ¼
印数: 1-1 500	字数: 204 000

ISBN 7-03-004174-7/O · 726

定价: 11.00 元

#《计算方法丛书》编委会

前　言

广义逆的概念最早是 I. Fredholm 于 1903 年提出的[56]，他给出了积分算子的广义逆，并称之为“伪逆”. D. Hilbert 于 1904 年讨论广义 Green 函数时含蓄地提出了微分算子的广义逆[63]. W. Reid 于 1931 年的论文[81]中，谈到了微分算子广义逆的历史.

E. H. Moore 于 1920 年首先提出了矩阵广义逆[72]，他利用投影矩阵定义了矩阵唯一的广义逆. 在这之后 30 年中，广义逆很少被人注意，直到 50 年代中期，围绕着某些广义逆的最小二乘性质及广义逆与线性方程组解的关系的讨论，才使广义逆的研究有了新的起色. 特别是 R. Penrose 于 1955 年证明了 Moore 所定义的广义逆是满足四个矩阵方程的唯一的矩阵[77]，这个重要发现对广义逆的研究来说是一个新纪元. 为纪念他们所作的贡献，称这个唯一的广义逆为 Moore-Penrose 逆.

近 40 多年来，广义逆的理论、应用和计算方法的研究得到了迅速的发展. 一个标志是 70 年代国外出版了几本专著([80]，[41]，[59]，[44])；另一个标志是 1973 年在美国威斯康星大学举行了一次广义逆的高级讨论班，并由 M. Z. Nashed 主编出版了一本卓越的、内容十分丰富的综述文集[73]，其中有 14 篇关于广义逆的理论、算法和应用的综述论文，并收集了 1975 年以前发表的有关广义逆的非常详尽的文献目录. 接着于 1976 年在美国南卡罗来纳州的哥伦比亚又召开了一次地区性会议，并由 S. L. Campbell 主编出版了一本新的综述文集[42]，其中有 12 篇关于广义逆最新应用的论文. 文集叙述了从 70 年代中期起，广义逆的研究方向和类型的改变. 以前由于统计学的需要，经常研究的是与解方程组有关的广义逆和最小二乘广义逆. 现在已转到无限维理论、数值计算问题、特殊类型(布尔型、整型)、非实数或复数域的代数结构上的

矩阵的广义逆、系统理论和非解方程有关的广义逆.

本书作者自 1976 年以来一直从事广义逆矩阵的教学和研究工作,曾为我系计算数学专业研究生多次开设“广义逆矩阵”课程和主持讨论班活动. 1979 年以来,作者和同事及研究生在矩阵广义逆的扰动理论、条件数、递推算法、有限算法、嵌入算法、并行算法、秩 r 修正阵和 Hessenberg 阵的广义逆、Cramer 法则的推广以及算子广义逆的表示和逼近等方面取得了一系列研究成果,在国内外刊物上发表了数十篇论文([1—10,93—101]等),引起了国内外同行的注意. 作者曾收到美国、德国、瑞典等 8 个国家十多所大学及研究所来函索取论文、希望建立学术上联系. 国内一些同行专家对我们的工作也很关心和支持,希望能系统地介绍一下我们的工作. 南京大学何旭初教授生前十分关心本书的出版,曾亲自审阅本书的编写大纲和写作计划. 王德人教授、匡蛟勋教授和陈永林教授对本书的出版也给了许多支持和帮助,正是由于大家的热忱鼓励,我才有信心撰写这本既反映我们自己研究工作的成果,又较系统地介绍矩阵和算子广义逆的基本理论、计算方法和若干新进展的专门著作. 我们抛砖引玉,以期有利于国内外同行交流,促进广义逆研究的开展.

本书共分十章,前三章是广义逆矩阵的基本理论并附有一定数量的习题,来作为正文的补充. 第四、五章是广义逆矩阵的计算方法,包括直接方法和并行算法,有关迭代方法可以参考最后三章算子广义逆中计算方法部分,在此不再另设一章. 第六、七章是广义逆矩阵的扰动理论,为读者阅读第八、九、十章算子广义逆方便起见,我们在书末附录中简明地叙述了泛函分析中有关的概念和性质.

本书初稿写成后,曾在本校计算数学专业研究生课程及南开大学数学所组织的 1992 年计算数学年活动上讲授过,之后又作了部分修改和补充.

限于水平,不当之处请读者批评指正.

最后,作者衷心感谢中国科学院出版基金委员会和国家自然

科学基金委员会提供的资助. 对上海师范大学领导的关怀和有关部门的支持和资助也在此一并表示感谢.

谨以此书献给上海师范大学四十周年校庆.

王国荣

1993 年 3 月

于上海师范大学

符 号 表

$C^{m\times n}(R^{m\times n})$	所有 $m\times n$ 复(实)元素矩阵的全体
$C_r^{m\times n}(R_r^{m\times n})$	$C^{m\times n}(R^{m\times n})$中所有秩为 r 的矩阵的全体
$C^n(R^n)$	所有复(实)n 维向量的全体
$C(R)$	所有复(实)数的全体
$R(A)$	A 的值域
$N(A)$	A 的零空间
$R(A,B)$	矩阵对 A,B 的值域
$N(A,B)$	矩阵对 A,B 的零空间
$Rc(A)$	$R(A)$的余空间
$Nc(A)$	$N(A)$的余空间
$\mathrm{rank}(A)$	A 的秩
$\mathrm{null}(A)$	A 的零度($N(A)$的维数)
$\dim(L)$	子空间 L 的维数
$\lambda(A)$	A 的特征值的全体
$\sigma(A)$	A 的奇异值的全体
$\mu_{MN}(A)$	A 的加权(M,N)奇异值的全体
$\rho(A)$	A 的谱半径
$\mathrm{Ind}(A)$	A 的指标
$\mathrm{tr}(A)$	A 的迹
$\det(A)$	A 的行列式
$\kappa(A)$	A 的求广义逆 A^+的条件数
$\kappa_{MN}(A)$	A 的求广义逆 A_{MN}^+的条件数
$C(A)$	A 的求广义逆 A_d 的条件数
(x,y)	向量 x 与 y 的内积
$(x,y)_M$	向量 x 与 y 的加权 M 内积
$\Vert x\Vert_2$	向量 x 的 2 范数
$\Vert A\Vert_2, \Vert A\Vert_F$	矩阵 A 的 2 范数和 A 的 F 范数

$\Vert A \Vert_{MN}$	矩阵 A 的加权(M,N)矩阵范数
I	单位矩阵
A^T	矩阵 A 的转置
A^*	矩阵 A 的共轭转置
$A^\#$	矩阵 A 的加权共轭转置
A^{-1}	A 的逆阵
$A^{(1)}$	A 的$\{1\}$逆
$A^{(1,3)},A^{(1,3M)}$	A 的$\{1,3\}$逆和 A 的$\{1,3M\}$逆
$A^{(1,4)},A^{(1,4N)}$	A 的$\{1,4\}$逆和 A 的$\{1,4N\}$逆
$A_{T,S}^{(1,2)}$	A 的具有值域 T 和零空间 S 的$\{1,2\}$逆
$A_{T,S}^{(2)}$	A 的具有值域 T 和零空间 S 的$\{2\}$逆
A_{MN}^{+}	A 的加权 Moore-Penrose 逆
A^{+}	A 的 Moore-Penrose 逆
$A_{(L)}^{(-1)}$	A 的 Bott-Duffin 逆
$A_{(L)}^{(+)}$	A 的广义 Bott-Duffin 逆
A_d	A 的 Drazin 逆
A_g	A 的群逆
$A_{d,w}$	A 的带 W 权 Drazin 逆
$P_{L,M}$	沿 M 到 L 上的投影算子
P_L	到 L 上的正交投影算子
$A(j\rightarrow b)$	A 的第 j 列换成 b 后得到的矩阵
$A(d^*\leftarrow i)$	A 的第 i 行换成 d^* 后得到的矩阵
$\in$	元素属于
$\overline{\in}$	元素不属于
$\subset$	集合含于
$\cup$	集合的并
$\cap$	集合的交
$\varnothing$	空集
$\Leftrightarrow$	等价

$\Rightarrow$	蕴涵
$\forall$	对一切
X_1, X_2	相同数域上的 Hilbert 空间
$B(X_1, X_2)$	$X_1 \to X_2$ 的有界线性算子全体构成的空间
$B(X)$	$X \to X$ 的有界线性算子全体构成的空间
$R(T)$	算子 T 的值域
$\overline{R(T)}$	$R(T)$的闭包
$N(T)$	算子 T 的零空间
T^*	算子 T 的共轭算子
$T\|_S$	算子 T 在子空间 S 上的限制
$M^{\perp}$	M 的正交补
$\mathrm{Ind}(T)$	算子 T 的指标
$d(x,y)$	点 x 到 y 的距离
$d(x,S)$	点 x 到集 S 的距离
$\sigma(T)$	算子 T 的谱
$\sigma_r(T)$	算子 T 的谱半径
$T>0$	正算子
$T\geqslant 0$	非负算子

目　　录

第一章　表示线性方程组解的广义逆

§1　Moore-Penrose 逆

设 C^n 为复 n 维向量空间，$C^{m\times n}$ 为复 $m\times n$ 阶矩阵的全体，$C_r^{m\times n}=\{X\in C^{m\times n}, \text{rank } X=r\}$. $R(A)=\{y\in C^m; y=Ax, x\in C^n\}$ 为 A 的值域. 众所周知，非奇异线性方程组

$$A\,x=b,\quad (A\in C_n^{n\times n}) \tag{1.1}$$

有唯一解 $x=A^{-1}b$，其中 A^{-1} 是满足矩阵方程

$$AX=I,\quad XA=I \tag{1.2}$$

的唯一的矩阵. 称 X 为 A 的逆阵，记作 $X=A^{-1}$.

当 A 为长方阵时，相容线性方程组

$$A\,x=b\quad (A\in C^{m\times n},\quad b\in R(A)) \tag{1.3}$$

有无数解. 不相容线性方程组

$$A\,x=b\quad (A\in C^{m\times n},\quad b\,\overline{\in}\,R(A)) \tag{1.4}$$

无解，但它有最小二乘解. 我们能否找到一个适当的矩阵 X，使 Xb 是方程组的某个解？这个 X 称为表示方程组解的 A 的广义逆，并且它是通常非奇异矩阵之逆阵的推广. 本章将要讨论的 Moore-Penrose 逆、(i,j,k)逆等就是这种广义逆.

1.1　A^+的定义和基本性质

设 A 是 $m\times n$ 阶矩阵($m\geqslant n$)，rank $A=n$，则 A^*A 是 n 阶非奇异阵. 于是不相容线性方程组(1.4)的最小二乘解可以通过下列法方程组

$$A^*Ax=A^*b \tag{1.5}$$

求出，$x=(A^*A)^{-1}A^*b$. 若记

$$X = (A^* A)^{-1} A^* \tag{1.6}$$

则可以证明 X 是满足下列矩阵方程(通常称为 Penrose 条件)

$$(1)\ AXA = A,\quad (2)\ XAX = X,$$
$$(3)\ (AX)^* = AX,\ (4)\ (XA)^* = XA$$

的唯一的矩阵. 称 X 为 A 的 Moore-Penrose 广义逆(简称 M-P 逆),记作 $X=A^+$. 于是,(1.6)的最小二乘解可记为 $x=A^+b$.

特别地,当 $m=n=\mathrm{rank}A$ 时,

$$A^+ = (A^* A)^{-1} A^* = A^{-1}(A^*)^{-1} A^* = A^{-1}.$$

这表明 A 的 M-P 逆确是 A 的逆阵的一种推广.

对一般的 $m\times n$ 阶矩阵 A,我们有

定义 1.1 设 $A\in C^{m\times n}$,则满足 Penrose 条件(1)—(4)的矩阵 $X\in C^{n\times m}$称为 A 的 M-P 逆,记作 $X=A^+$.

下面,我们指出定义 1.1 中的矩阵 X 是存在而且唯一的.

定理 1.1 满足 Penrose 条件(1)—(4)的广义逆 X 是存在而且唯一的.

证明 设 $A\in C_r^{m\times n}$,则由矩阵计算的理论[87]知道,A 可以分解为 $A=Q^*RP$,其中 Q 和 P 分别为 m 和 n 阶酉阵

$$R = \begin{pmatrix} R_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in C^{m\times n}$$

其中 R_{11}为 r 阶非奇异上三角阵. 记

$$R^+ = \begin{pmatrix} R_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in C^{n\times m}$$

则 $X=P^*R^+Q$ 满足 Penrose 条件(1)—(4). 事实上

$$AXA = Q^*RPP^*R^+QQ^*RP = Q^*RP = A$$
$$XAX = P^*R^+QQ^*RPP^*R^+Q = P^*R^+Q = X$$
$$(AX)^* = (Q^*RR^+Q)^* = \left(Q^*\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q\right)^* = AX$$
$$(XA)^* = (P^*R^+RP)^* = \left(P^*\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P\right)^* = XA$$

所以,对任何 $A\in C_r^{m\times n}$,$X=A^+$总是存在的. 下面证唯一性.