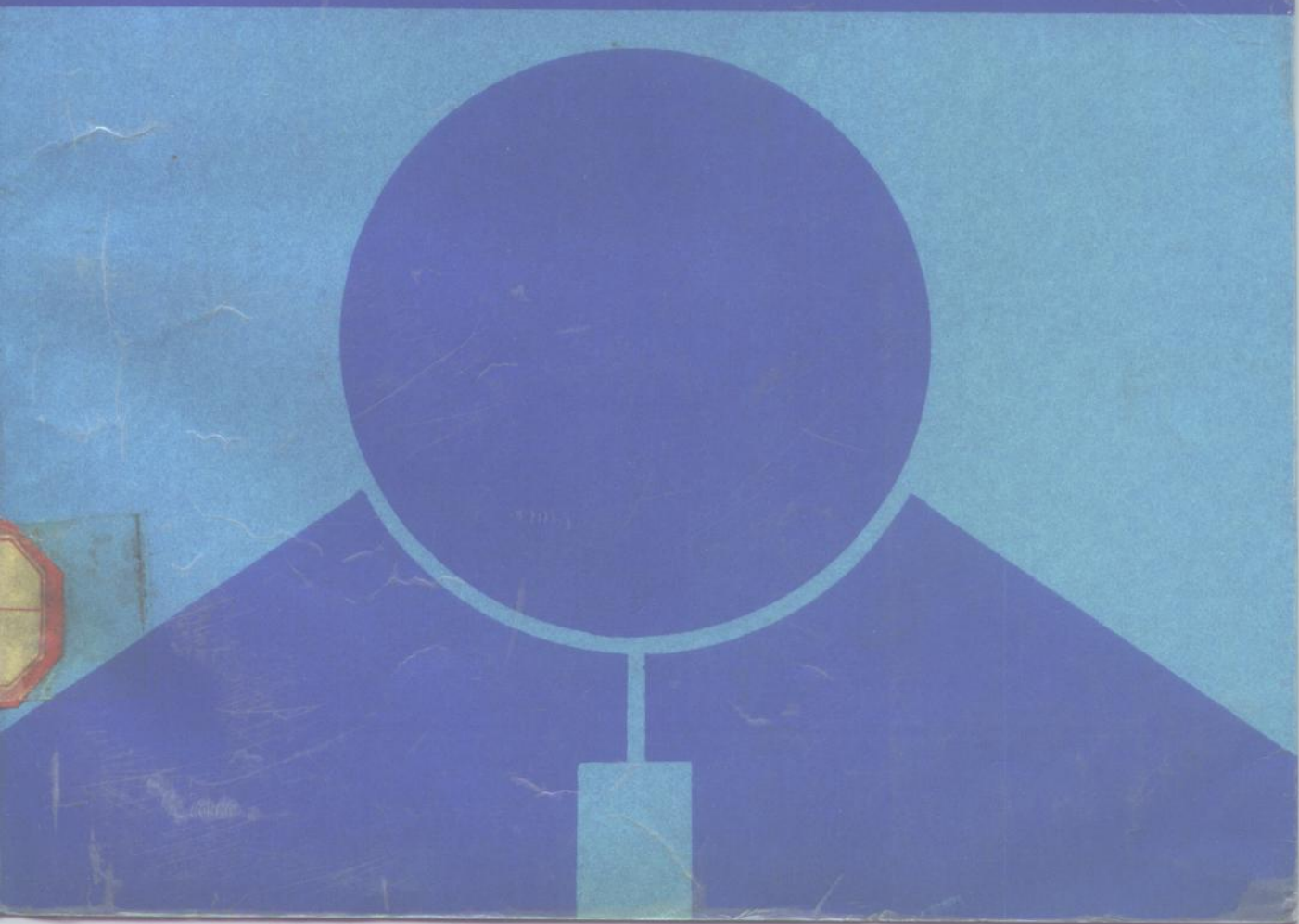


哈尔滨工业大学出版社

刘 瞰 刘育华 陈世杰 著

静压气体润滑



TH117.2

L73

355349

静 压 气 体 润 滑

tūn

刘 瞰 刘育华 陈世杰 著



哈尔滨工业大学出版社

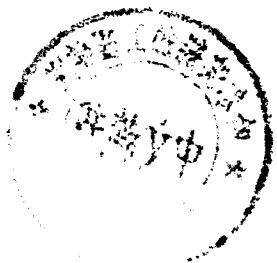
内 容 简 介

近二十年来, 气体静压轴承在我国获得迅速发展, 它可应用在极高温和极低温、超高速和超低速、超精密、具有放射性污染的环境等极端条件中, 某些情况下是唯一可供选择的机械元件。

本书是气体静压轴承的专著, 对它的原理、设计方法、加工测试等做了详尽叙述。第一章是理论基础; 第二章介绍了工程简化计算方法和参数优化技术; 第三章给出了对任意复杂轴系进行精确分析的数值方法; 第四、五章提供了深入研究所必需的几种有限元方法和对复杂工作条件下的轴承做理论分析的加权余量法; 第六、七章是关键零件的实用加工方法和轴系精度测试方法的总结。书内包含了详尽的计算实例、程序框图、设计曲线和性能参数图表等。

本书适用于机械、精密仪器、高速机械等类专业; 可作为大学教师、高年级学生、研究生的参考教材; 也可做为研究人员和工程技术人员研究、设计、加工测试气体轴承和超精、超高速轴系的参考读物。

1371/01



静 压 气 体 润 滑

刘 墩 刘育华 陈世杰 著

哈尔滨工业大学出版社出版发行

哈尔滨工业大学印刷厂印刷

开本 787 × 1092 1/16 印张 19 字数 438 000

1990 年 4 月第 1 版 1990 年 4 月第 1 次印刷

印数 1—2 500

ISBN 7-5603-0285-8 /TG·19 定价 4.50 元

序 言

空气静压轴承的原理早在1828年即已出现^[40]，但是它们的正式应用却是近四十年左右的事。其中主要原因在于这类轴承的加工比较困难，精度要求高，理论分析比较复杂。近代工业，特别是军事工业，在50年代左右迫切需要空气轴承，以解决某些特殊条件下的工作问题，才使它得到迅速发展。

空气轴承的主要优点是：（1）极小的摩擦。气体的粘性大约为液体的千分之一，其值在 $1.88 \times 10^{-9} \text{kg} \cdot \text{s}/\text{m}^2$ 左右，在大多数场合可以略去。由于摩擦很小，这类轴承能够用在极低运动速度（如每昼夜旋转一周的转台）的机构中，而不产生低速运动机械经常出现的爬行现象；另一极端，它又能工作在极高的运动速度之下（如每分钟几十万转的高速涡轮机或离心机），这是因为轴承和轴颈被气体所隔离，完全没有接触，因而不致产生显著的摩擦热，更无磨损，且功耗很低的缘故。（2）工作精度很高。由于气膜中的气体具有可压缩性，可以补偿零件的表面的加工误差，使气体轴承或气体导轨的工作误差大约只为前者的四分之一。目前已能制造迴转精度或平移精度十分之几到百分之几微米的轴系及导轨，它们的角振摆优于十分之几或百分之几的角秒。（3）工作范围宽广，特别适合于恶劣环境下工作。温度变化对气体粘性影响很小，因而气体轴承的承载能力几乎不随温度而变化，理论上讲气体轴承的容许温度上限取决于所用的材料，下限则取决于材料或气体液化温度。气体轴承还可以工作在有毒或放射环境中，特别在核反应堆的辅助设备中工作时不会造成污染。与液体轴承相比，气体轴承无渗漏的麻烦，不致弄脏环境，这在许多超精场合是极其可贵的。如使用空气为润滑介质，其来源是取之不尽的。

气体润滑也有它的不足，如：（1）加工困难。大多数情况下，气体轴承或导轨的加工精度是微米或亚微米级的，表面粗糙度要求优于 $\nabla 10$ 或更高，有时还采用难加工材料，因此需考虑采用某些特殊工艺措施。小孔节流时的小孔，表面节流时的沟槽，以及其它的特殊阶、台等也往往造成一定的加工困难。（2）对于静压气体润滑，气体要经过除水、除油和精细过滤才能使用，以防堵塞，这些造成了附加的麻烦。（3）承载能力比较低。与液体静压润滑相比，由于气体的工作特点，气源压力不能过高（大约 $30 \sim 60 \times 10^4 \text{Pa}$ ），因此，同尺寸的气体轴承承载能力比前者显著的低，设计不当还会出现各类不稳定现象。对于动压润滑，气体轴承也比液体的承载能力低。

我国的气体润滑应用起步稍迟于国外，50年代末期，上海柴油机厂曾做过一些试探，正式在技术中使用则是60年代中期的事。70年代是我国气体润滑技术蓬勃发展的时期，无论在理论上还是在技术实践中，无论是静压还是动压或混合气体润滑方面都获得了可喜的大面积收获。进入80年代之后，在已用的基础之上，又得到了进一步的发展。目前，我国已生产出振摆精度达0.1微米、迴转精度达到零点几角秒的高精度，或转速高至

数十万转（每分）和低速每日一周的轴系，分别用在诸如惯导系统或惯导元器件测试台、精密测量设备和精密机床、高速涡轮机、制备液化气体的设备、牙钻、计算机外围设备、纺织、造纸等工业机器、仿真装置、风洞天秤和其他用途之中。

本书的宗旨是向从事机械设计的工程技术人员、研究单位的科学工作者、大专院校的师生介绍气体静压润滑的基本理论、空气静压轴承的工程简化计算方法和精确计算的分析方法、以及主要零件的精度保证和精度测试途径。本书的主要内容是作者们十余年来科研工作的总结，为了照顾到阅读的方便和内容的系统性及完整性，也编入了一些熟知的内容和国内外学者所发表的材料。本书前三章的大部分内容曾编入1984年全国第一届气体润滑学习班的讲义，又经作者们作了修改与补充。第一章介绍了阅读本书所必需的气体力学和气体润滑的基本知识。第二章是常用的几类静压气体轴承的工程计算方法，包括了圆柱轴承、球轴承和平面止推轴承，还给出了参数的优选方法、设计实例和为使用方便而给出的曲线。这一章的内容对初步设计，可行性分析或非专门从事气体润滑的技术人员设计气体轴承都是很有用的，按照本书的方法，可以较快地获得所需的数据，当然精度稍低（大约为10%或更低一些）。第三章介绍气体静压轴承的精确分析方法，并给出了大量实例，采用了结构分析中的有限元技术。应用本章的方法可以分析任意形状、任意结构的气体轴承，给出他们的承载能力、刚度等性能。这种方法十分灵巧，精度也很高。经对比，所得数据接近试验结果，但计算量比较大，需借助计算机才能进行，因而适合于那些需要对气体轴承做详细分析和重要的应用场合。应该说明，我们曾将工程计算方法和精确分析方法应用到许多重要设备的气体轴承设计中，都获得了满意的结果。第四章是介绍有限单元方法的，特别是它在解决气体流场中的应用问题，其内容散见于许多文献，为了方便读者而归纳成一章。第五章则叙述了加权余量方法，这即是第三章某些节的理论基础，又是进一步分析气体润滑问题的一种工具，对拟深入钻研气体润滑问题的读者会有所裨益。第六和第七章专门叙述了气体轴承的关键零件的主要加工方法，它们的测量以及轴承的综合测试方法等。设计出高性能轴承并不十分困难，而为了达到预期的性能，往往要在工艺方法和测试方法上做许多艰苦工作。因此，我们愿意把点滴经验贡献给读者。

本书作者的分工是：第一、三、四、五章由刘瞰执笔，第二章由刘育华主写，第六、七章由陈世杰完成，全书由刘瞰定稿。此外，本书第三章例题计算工作，第二章中的优化参数，是由史小文同志完成的，或引自他的文章，特致谢意。由于气体润滑技术的日新月异的发展，加之我们工作的局限性，本书的错误和不足之处在所难免，希望同行专家和广大读者给予指正。

作者

目 录

序 言

第一章 气体润滑基本方程式	(1)
§1 气体力学基本方程式.....	(1)
1.1 运动方程式的建立 (2), 1.2 连续性方程式(8), 1.3 状态方程式(9),	
1.4 气体粘性系数(9)	
§2 曲线坐标系中的气体力学基本方程式.....	(11)
2.1 柱坐标系(12), 2.2 球坐标系(15)	
§3 基本微分方程式的化简.....	(18)
3.1 笛卡儿坐标系中基本方程式的简化(18), 3.2 柱坐标系中基本方程式	
的简化(21), 3.3 球坐标系中基本方程式的简化(23)	
§4 惯性力的影响.....	(26)
§5 边界条件.....	(27)
5.1 速度边界条件(28), 5.2 压力边界条件(28), 5.3 流量边界条件	
(28), 5.4 对称边界条件(30)	
§6 雷诺方程式的推导.....	(30)
§7 节流孔的流动.....	(32)
7.1 管中的无粘性流动(33), 7.2 伯努力方程式的几种表现形式(34),	
7.3 气体从小孔中的出流(35)	
附录A 拉伐尔喷管中的流动.....	(37)
A.1 拉伐尔喷管中的亚音速流动(38), A.2 正激波(40), A.3 拉伐尔喷管	
中的超音速流(42)	
§8 节流孔周围的超音速流动.....	(43)
8.1 超音速区域的流动(44), 8.2 亚音速区域的流动(47), 8.3 激波	
前后的关系(48), 8.4 气膜内压力的计算(49)	
第二章 气体静压轴承的工程计算	(51)
§1 气体静压轴承的工作形式.....	(51)
§2 圆柱气体轴承的工程计算方法.....	(56)
2.1 结构、工作原理及设计参数(56), 2.2 圆柱气体静压轴承的工程计算方	
法(59), 2.3 参数的优化设计(65), 2.4 压力按线性分布的近似计算(76),	
2.5 对承载能力的修正(76), 2.6 设计举例(78)	
§3 平面止推气体轴承的工程计算方法.....	(83)
3.1 结构、工作原理及设计参数(83), 3.2 平面止推气体静压轴承的工	

程计算方法 (85), 3.3 压力沿径向按线性分布的近似计算 (93), 3.4 闭式止推轴承的设计 (93), 3.5 止推轴承的参数优化设计 (95), 3.6 设计举例 (96)	
§4 球面气体轴承的工程计算方法.....	(99)
4.1 结构、工作原理及设计参数 (99), 4.2 球面气体静压轴承的工程计算方法 (100), 4.3 压力按 θ 角线性分布的简化计算 (106), 4.4 球面气体轴承的参数优化设计 (107), 4.5 设计举例 (108)	
附录A	(110)
附录B	(114)
第三章 节流孔静压气体轴承的有限元精确解	(122)
§1 基本方程式	(122)
1.1 笛卡儿坐标系的雷诺方程式 (122), 1.2 柱坐标系的雷诺方程式 (124), 1.3 球坐标系的雷诺方程式 (126)	
§2 气体润滑问题的变分提法	(128)
2.1 边界条件 (128), 2.2 气体润滑问题的变分提法 (130)	
§3 用有限单元法解气体静压问题	(134)
3.1 有限单元的划分及插值函数 (134), 3.2 气体润滑方程的有限单元表示法 (137), 3.3 压力方程组的解法 (141), 3.4 承载能力的计算 (148), 3.5 柱坐标和球坐标系中的算式 (151)	
§4 计算例题	(153)
第四章 有限单元体及插值函数	(192)
§1 函数的连续度	(192)
§2 三角形有限单元体及其插值函数	(193)
2.1 三角形坐标系及其与笛卡儿坐标系间的关系 (193), 2.2 三角形单元体的一阶连续度线性插值函数 (198), 2.3 三角形单元体的一阶连续度二次插值函数 (200), 2.4 三角形单元体的一阶连续度立方插值函数 (203)	
§3 矩形单元体一阶连续度插值函数	(207)
3.1 矩形单元体一阶连续度的线性插值函数 (208), 3.2 矩形单元体一阶连续度的二次插值函数 (209), 3.3 矩形单元体一阶连续度的立方插值函数 (209)	
§4 形函数	(211)
§5 曲线单元体的应用	(212)
5.1 正方形单元体向四边形单元体的变换 (213), 5.2 正方形单元体向二次曲线单元体的变换 (215)	
第五章 加权余量法的应用	(219)
§1 加权余量法原理	(219)
1.1 配点法 (220), 1.2 最小二乘法 (221), 1.3 矩法 (223), 1.4 加辽金法 (Galerkin's Method) (224)	

§2	弱解公式	(227)
	2.1 算子和边界条件的分类 (227), 2.2 加权余量法的弱解 (Weak Solution) (229)	
§3	用加权余量法解气体润滑问题	(232)
第六章	静压气体轴承零件的加工与测量	(238)
§1	典型气体轴承的结构形式	(238)
	1.1 气体静压高速磨头 (238), 1.2 双轴陀螺测试转台的正交轴系 (238), 1.3 双半球气体静压主轴 (241)	
§2	圆柱气体轴承零件的精密加工和测量	(242)
	2.1 圆柱气体轴承零件的结构特点与精度要求 (242), 2.2 加工设备的精化与改装 (244), 2.3 提高零件的定位和安装质量 (247), 2.4 轴肩及端面 (气体止推面) 的精加工 (247), 2.5 零件精度的检测 (249)	
§3	球面气体静压轴承的精密加工及测量	(259)
	3.1 大球面精密加工方案的选择 (259), 3.2 加工设备及砂轮尺寸 (261), 3.3 成型范成法的加工原理误差 (263), 3.4 球轴承零件的检测 (265)	
第七章	静压气体轴承性能综合测试	(269)
§1	圆柱形气体轴承工作间隙的测量	(269)
	1.1 相对位移法测量轴承间隙 (269), 1.2 空气流量法测量轴承间隙 (270), 1.3 电测法测量轴承间隙 (270)	
§2	气体轴承刚度测量	(271)
	2.1 圆柱体轴承径向静态刚度测量 (271), 2.2 圆柱轴承轴向刚度测量 (272), 2.3 圆柱轴承力矩刚度测量 (272), 2.4 气体轴承动态特性试验研究概况 (274)	
§3	气体轴承主轴回转精度测试	(274)
	3.1 主轴回转运动的基本概念和定义 (275), 3.2 主轴回转精度测试方法综述 (277), 3.3 主轴回转精度的数据处理及误差评定 (282), 3.4 主轴回转精度数字测量及误差补偿 (286)	
参考文献	(292)

第一章 气体润滑基本方程式

本章介绍书中将要用到的基础性知识，复习了有关气体力学基本方程式，这些基本方程式，并非气体润滑学中所用到的全部。本章还着重研究了气体静压技术中可能遇到的边界条件，这在后面几章，特别是第三章是十分重要的；还将常用的基本方程式综合为雷诺方程，并研究了不同边界条件及工作状态雷诺方程式的具体表现形式。最后介绍了节流孔的流动现象以及节流后可能出现的超音速及亚音速流动。

§1 气体力学基本方程式

本节将在笛卡儿坐标系建立气体润滑问题需要的基本方程式，然后在后面有关章节再推导曲线坐标系中的相应方程式。

图 1.1 是笛卡儿坐标系中的一个微元立方体，三边分别与 ox , oy , oz 轴相重合，边长各为 dx , dy 和 dz 。图 1.1 (b) 是微元立方体的三个能看到的表面上各力的分布，图 1.1 (a) 则是去掉这三个表面，显现出观看不到的另外三个表面上力的分布情况。气体在 x 、 y 、 z 坐标点的密度为 ρ ，压力为 p ，速度在 x 、 y 、 z 三个方向上的分量分别以 u 、 v 、 w 表示。

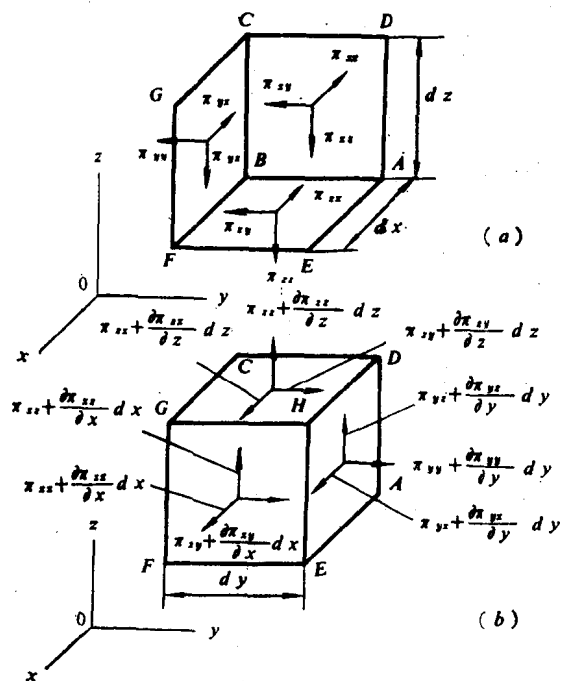


图 1.1 微元立方体的表面力

1.1 运动方程式（动力学方程式）的建立

首先分析图 1.1 的微元体上作用的表面力。 π_{xx} 是在与 x 轴相垂直的平面上沿 x 轴方向的单位面积拉力或压力。 π_{xy} 是与 x 轴垂直的平面上沿 y 方向的单位面积剪力，其余各力的下标照此类推。即 $\pi_{ij}(i, j = x, y, z)$ 中第一个下标 i 表示应力所在的平面垂直于 i 轴，第二个下标 j 表示应力是沿着 j 轴方向的。垂直于 ox 轴方向计有两个平面： $ABCD$ 平面和 $EFGH$ 平面。如果在坐标为 x 的 $ABCD$ 平面上的表面力为 π_{xx} ， π_{xy} 和 π_{xz} ，则在坐标为 $x+dx$ 的 $EFGH$ 平面上的表面力应为 $\pi_{xx} + \frac{\partial \pi_{xx}}{\partial x} dx$ ，

$\pi_{xy} + \frac{\partial \pi_{xy}}{\partial x} dx$ 和 $\pi_{xz} + \frac{\partial \pi_{xz}}{\partial x} dx$ 。显然，这里假设了表面力的增量和坐标增量 dx 是线性关系，这是因为微元立方体的尺寸足够小时，非线性项可以忽略的缘故。其它两个方面的表面力也有类似的关系（见图 1.1）。

图示各表面力沿 x 方向的合力是

$$\begin{aligned} & \left(\pi_{xx} + \frac{\partial \pi_{xx}}{\partial x} dx - \pi_{xx} \right) dydz + \left(\pi_{yx} + \frac{\partial \pi_{yx}}{\partial y} dy - \pi_{yx} \right) dx dz + \\ & \left(\pi_{zx} + \frac{\partial \pi_{zx}}{\partial z} dz - \pi_{zx} \right) dx dy \\ & = \left(\frac{\partial \pi_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \pi_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \pi_{zx}}{\partial z} \right) dx dy dz \end{aligned} \quad (1.1)$$

除了表面力之外，作用在流体微元立方体上的力还有体积力，如重力、惯性力、电磁力（磁流体力学中）等，它们与气体质量成正比。如果微元立方体的尺寸足够小，可认为密度 ρ 是常量，且等于 (x, y, z) 点的密度值，则在 x 方向体积力是

$$\rho f_x dx dy dz \quad (1.2)$$

其中， f_x 是单位质量的体积力沿 x 方向的分量，惯性力虽也是体积力，但我们将另行考虑。显然，流体在 x 方向的速度 u 是坐标值 (x, y, z) 和时间的变量，所以 $u = u(x, y, z, t)$ ，它随时间的变化率即为加速度

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \quad (1.3)$$

所以，微元立方体内气体质量形成的惯性力便是

$$\rho \frac{du}{dt} dx dy dz \quad (1.4)$$

根据牛顿第二定律，微元立方体的惯性力应等于作用在其上的体积力和表面力之和，所以把 (1.3) 代入 (1.4) 命其与 (1.1) 和 (1.2) 之和相等，便有

$$\begin{aligned} & \rho \frac{du}{dt} + \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ & = \frac{\partial \pi_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \pi_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \pi_{zx}}{\partial z} + \rho f_x \end{aligned} \quad (1.5a)$$

同理，可以写出对于 y 及 z 方向的类似方程式

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ = \frac{\partial \pi_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \pi_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \pi_{zy}}{\partial z} + \rho f_y \end{aligned} \quad (1.5b)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial w}{\partial t} + \rho \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ = \frac{\partial \pi_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \pi_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \pi_{zz}}{\partial z} + \rho f_z \end{aligned} \quad (1.5c)$$

这就是气体力学中的运动方程式。

我们先对微元立方体的表面力 π_{ij} ($i, j = x, y, z$) 进行说明，它们又称为应力张量。对于粘性气体，九个表面力并非全部都独立，为证明此点，取图 1.1 中各力对于过微元立方体中心而平行 z 轴的力矩平衡关系如下

$$\begin{aligned} (\pi_{xy} dy dz) dx - (\pi_{yx} dx dz) dy + \text{四阶微量} \\ = 0 \end{aligned}$$

所以有

$$\pi_{xy} = \pi_{yx} \quad (1.6)$$

同理，对过微元体中心而平行于 x 及 y 的轴取力矩平衡关系，得

$$\pi_{yz} = \pi_{zy}, \quad \pi_{xz} = \pi_{zx} \quad (1.7)$$

这表明九个应力分量中，只有六个是独立的。显然，六个独立应力中三个剪力 π_{xy} 、 π_{yz} 、 π_{zx} 只在气体具有粘性时才存在，而无粘性气体，通常称为理想气体，这不是润滑学科所研究的对象。六个独立应力分量中，另外三个是正应力 π_{xx} 、 π_{yy} 和 π_{zz} ，不论粘性气体还是无粘气体，正应力总是存在的，不过对于非粘性气体，正应力就是气体的压强，而对于粘性气体，正应力不仅包括了气体的压强，还包括了因粘性而引起的分量。所以

$$\pi_{ii} = -p + \tau_{ii} \quad (i = x, y, z) \quad (1.8)$$

其中， τ_{ii} 是粘性正应力。假如定义

$$\pi_{ij} = \tau_{ij} \quad (i \neq j, i, j = x, y, z) \quad (1.9)$$

为粘性剪应力，则上述两类应力可以合并写为^[1]

$$\pi_{ij} = -p \delta_{ij} + \tau_{ij} \quad (1.10)$$

其中

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

为克罗内克尔 δ 。粘性应力张量 τ_{ij} ($i, j = x, y, z$) 可以通过气体分子运动论的理论建立其方程，假如只考虑分子的两两相撞，而不考虑其它分子的影响，分子运动论给出的结果是

$$\begin{aligned}
\tau_{xy} &= \eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \tau_{yz} = \eta \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\
\tau_{zx} &= \eta \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\
\tau_{xx} &= 2\eta \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\eta' - \frac{2}{3}\eta \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\
\tau_{yy} &= 2\eta \frac{\partial v}{\partial y} + \left(\eta' - \frac{2}{3}\eta \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\
\tau_{zz} &= 2\eta \frac{\partial w}{\partial z} + \left(\eta' - \frac{2}{3}\eta \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)
\end{aligned} \tag{1.11}$$

其中, η 是气体粘性系数或第一粘性系数, η' 是膨胀粘性系数或第二粘性系数, 两粘性系数都是由分子的性质所决定的。当分子没有内在自由度或内在自由度未被激发时, η' 是零。通常 η' 比 η 小很多, 只有在气体体积膨胀率极大或随时间变化得很快时, η' 的影响才显著, 但对于气体润滑的情况 η' 通常都是可以忽略的, 下面的分析将认为 $\eta' = 0$ 。

式 (1.11) 中各偏导数项是有明确几何意义的, 为了今后应用上的方便, 我们先加以说明。取 x 方向速度分量 u 沿 x 轴的变化率 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 观察, 这时暂且假设 (1.11) 式中的

其它偏导数都为零, 这无异于认为 u 不随 y 和 z 坐标改变, 亦即所分析情况是沿 x 轴

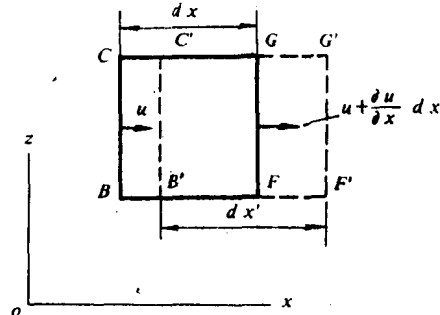


图 1.2 只沿 x 方向变化时微元体的变形

研究完全可以用 xy 或 xz 平面的两维运动来代替 (图 1.2)。在 $t=0$ 的时刻, 两边分别和 ox 及 oz 轴平行的矩形微元体 $BCGF$ 中 BC 边的速度为 u , FG 边的速度是 $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$ 。经过一个短的时间间隔 Δt 之

$$\overline{BB'} = u\Delta t, \quad \overline{FF'} = \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) \Delta t$$

微元体的 dx 边, 变形之后边长成为 dx'

$$dx' = dx + \overline{FF'} - \overline{BB'} = \frac{\partial u}{\partial x} dx \Delta t + dx \tag{1.12}$$

如以

$$\epsilon_{xx} = \frac{dx' - dx}{dx \Delta t} \tag{1.13}$$

表示单位时间内微元体沿 x 方向边长的相对变化量, 又称变化率, 则将 (1.12) 代入 (1.13) 后可求得 x 方向的变形率或称正应变率为

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.14)$$

同理, y 和 z 方向的正应变率应是

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (1.15)$$

那么, (1.11) 后三式中的 $\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$ 就是微元体在单位时间内的体积变化率了。它又被称为散度 (见后)。

对于 x 方向速度分量 u 只随 y 变化的情况, 可以通过图 1.3 分析微元体的变形。当 $t=0$ 时, 微元体位于 $BAFE$, 在时间 Δt 瞬间, 微元体取 $B'A'F'E'$ 的形状。这是因为 BF 线上各质点的沿 x 方向的速度全为 u (因不随 x 方向变化), 而 AE 线上各质点的速度为 $u + \frac{\partial u}{\partial y} dy$ 。所以

$$\overline{BB'} = \overline{FF'} = u \Delta t, \quad \overline{AA'} = \overline{EE'} = \left(u + \frac{\partial u}{\partial y} dy\right) \Delta t \quad (1.16)$$

我们观察上述运动过程中 AB 线段在单位时间内绕 z 轴的转角 γ_1 , 则

$$\gamma_1 = \frac{\overline{AA'} - \overline{BB'}}{dy \Delta t}$$

把 (1.16) 代入上式, 有

$$\gamma_1 = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.17)$$

显然, 当 y 方向的分速 v 只随 x 变化时, 微元体的变化如图 1.4。与 x 轴平行的 BF 边单位时间内绕 oz 轴的转角应是

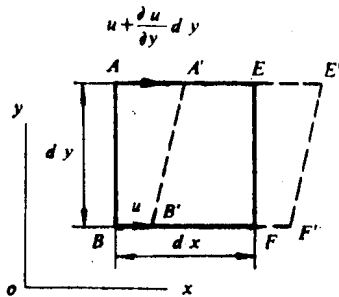


图 1.3 u 只沿 y 方向变化时微元体的变形

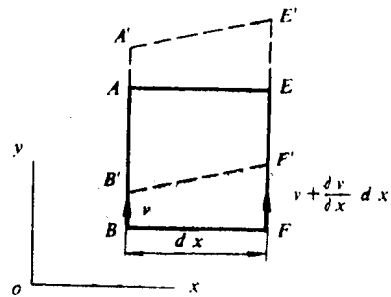


图 1.4 v 只沿 x 方向变化时微元体的变形

$$\gamma_2 = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.18)$$

由此可见 (1.11) 中的第一式, 即 τ_{xy} 的表达式说明, τ_{xy} 剪应力是与 dx 及 dy 边

绕 oz 轴旋转的角速率之和成正比。若称

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (1.19)$$

为绕 oz 轴的剪应变率，而

$$\begin{aligned} \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \\ \varepsilon_{zx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (1.20)$$

分别称为绕 ox 轴和 oy 轴的剪应变率，至此便可以利用(1.14)、(1.15)、(1.19)和(1.20)式将(1.11)改写为(取 $\eta' = 0$)

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= 2\eta\varepsilon_{xy}, \quad \tau_{yx} = 2\eta\varepsilon_{yx}, \quad \tau_{zx} = 2\eta\varepsilon_{zx} \\ \tau_{xx} &= 2\eta\varepsilon_{xx} - \frac{2}{3}\eta(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) \\ \tau_{yy} &= 2\eta\varepsilon_{yy} - \frac{2}{3}\eta(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) \\ \tau_{zz} &= 2\eta\varepsilon_{zz} - \frac{2}{3}\eta(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) \end{aligned} \quad (1.21)$$

用式(1.21)推导非笛卡儿坐标系中运动方程式是比较方便的。

现在，再回到运动方程式，把(1.11)代入(1.10)，然后代入(1.5a)–(1.5c)，并考虑到(1.6)式，便可以得到^[2]

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= \rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} \\ &- \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} (\eta \operatorname{div} \vec{v}) + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left[\eta \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \end{aligned} \quad (1.22a)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= \rho f_y - \frac{\partial p}{\partial y} \\ &- \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} (\eta \operatorname{div} \vec{v}) + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\eta \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left[\eta \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] \end{aligned} \quad (1.22b)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial w}{\partial t} + \rho \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= \rho f_z - \frac{\partial p}{\partial z} \\ &- \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial z} (\eta \operatorname{div} \vec{v}) + 2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\eta \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\eta \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left[\eta \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] \end{aligned} \quad (1.22c)$$

上述方程中

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (1.23)$$

是气流速度矢量 $\vec{v} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$ ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 分别是 x, y 和 z 方向的单位矢量) 的散度。(1.22a) ~ (1.22c) 三式是由 Navier(1823) 和 Stokes (1845) 分别独立推导出来, 故又称为 Navier-Stokes 方程式, 或略记为 N.S 方程, 是气体润滑的基本方程式之一。

当气体粘性 $\eta = \text{const}$ 时, 式 (1.22a) ~ (1.22c) 又可简化为

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= \rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} \\ &+ \eta \Delta u + \eta \frac{\partial}{\partial x} (\operatorname{div} \vec{v}) / 3 \end{aligned} \quad (1.24a)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= \rho f_y - \frac{\partial p}{\partial y} \\ &+ \eta \Delta v + \eta \frac{\partial}{\partial y} (\operatorname{div} \vec{v}) / 3 \end{aligned} \quad (1.24b)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial w}{\partial t} + \rho \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= \rho f_z - \frac{\partial p}{\partial z} \\ &+ \eta \Delta w + \eta \frac{\partial}{\partial z} (\operatorname{div} \vec{v}) / 3 \end{aligned} \quad (1.24c)$$

其中

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1.25)$$

是拉普拉斯算子。如果再引入梯度概念, 有

$$\nabla = \operatorname{grad} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \quad (1.26)$$

则 (1.24a) ~ (1.24c) 可以合并为

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{f} - \operatorname{grad} p - \eta \Delta \vec{v} + \frac{\eta}{3} \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v} \quad (1.27)$$

在推导 (1.27) 式时, 利用了 (1.3) 式并引入了

$$\vec{f} = f_x \vec{i} + f_y \vec{j} + f_z \vec{k} \quad (1.28)$$

有时使用另一种表达方式, 更利于对运动方程式的处理。首先, 定义一种表面应力的双矢量表示方法。即令

$$\begin{aligned} \vec{\pi} &= (\pi_{xx} \vec{i} + \pi_{xy} \vec{j} + \pi_{xz} \vec{k}) \vec{i} \\ &+ (\pi_{yx} \vec{i} + \pi_{yy} \vec{j} + \pi_{yz} \vec{k}) \vec{j} \\ &+ (\pi_{zx} \vec{i} + \pi_{zy} \vec{j} + \pi_{zz} \vec{k}) \vec{k} \end{aligned} \quad (1.29)$$

对气体运动方程式，还可以从 (1.5a)、(1.5b) 和 (1.5c) 出发，利用 (1.26) 关于梯度算子的定义，写成

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \rho \vec{f} + \nabla \cdot \vec{\pi} \quad (1.30)$$

1.2 连续性方程式

连续性方程式，实际上是质量守恒定理在气体力学中的应用。我们取一边长为 dx , dy , dz 的微元体 (图 1.5)。首先考虑沿 x 方向的质量流量，单位时间内流入微元体 $ABCD$ 平面的质量为 $\rho u dy dz$ ，而从 $EFGH$ 平面流出的质量是

$$\left[\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx \right] dy dz$$

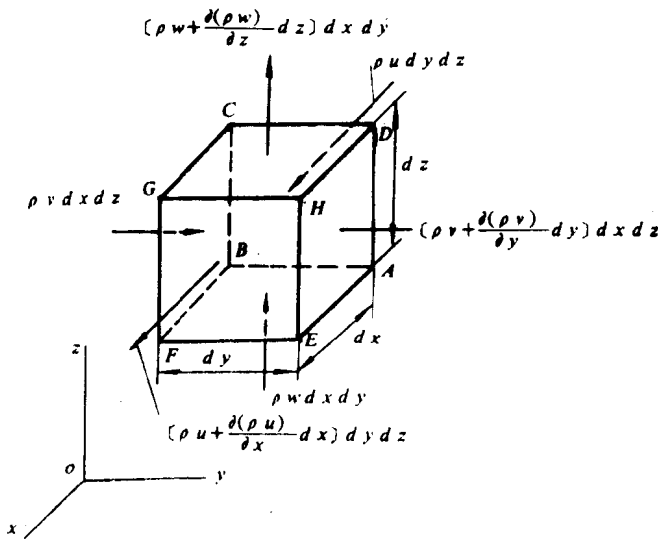


图 1.5 连续性方程式的推导

从 x 方向净流出质量是上述两量之差

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx dy dz$$

所以，在单位时间内从微元体中沿 x , y 和 z 三个方向净流出的总质量是

$$\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] dx dy dz$$

上述流出的质量，造成微元体内部气体密度 ρ 的变化，这一变动是 $-\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz$ 。则

根据质量守恒原理，单位时间内由微元体流出的总质量与微元体内质量变化率相等，气体连续性方程成为

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (1.31)$$

如果引进散度（见（1.23）式），则有

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (1.32)$$

对于不可压缩流，有 $\rho = \text{const}$ ，则（1.32）式成为

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = 0 \quad (1.33)$$

1.3 状态方程式

由气体力学知，气体状态方程式把气体的状态变量，即压力、密度和绝对温度 p ， ρ ， T 联系起来，这就是

$$\frac{p}{\rho} = RT \quad (1.34)$$

其中， R 是气体常数，对于一定的气体其值不变。

在气体润滑问题中，往往可以把气体的过程视为等温的，其误差不超过百分之几。对于等温的气体过程，可令（1.34）中的 $T = \text{const}$ ，这样（1.34）式便成为

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0} \quad (1.35)$$

其中， p_0 和 ρ_0 分别是大气压力和密度。

当气体变化过程很迅速，热量来不及传递时，可以把这种过程视为绝热的。此时，气体的过程被描述为

$$\frac{p}{\rho^k} = \text{const} \quad (1.37)$$

其中， k 为气体的比热比。根据气体的分子运动论， k 值只和气体分子中的原子数有关，对于空气这种双原子气体，其值为 1.4。

上面，我们总共导出了五个方程式：即三个运动方程式，一个连续性方程式和一个状态方程式，而变量也恰为五个，即 p, ρ, u, v, w 。因此，只要给定适当的边界条件，问题就是封闭可解的。

1.4 气体的粘性系数

粘性系数 η 可以通过气体分子的统计理论进行分析。J.C. Maxwell 于 1860 年第一次给出， η 与气体的平均速度，平均自由程、分子的质量及单位体积中气体的分子数成正比，并最终地导出粘性系数与气体温度 T 的平方根的关系

$$\eta \propto \sqrt{T} \quad (1.38)$$

或

$$\frac{\eta}{\eta_0} = \sqrt{\frac{T}{T_0}} \quad (1.39)$$

其中， η_0 表示温度为 T_0 时的气体粘性系数。它表明粘性系数是随温度的增加而增加的。这种与温度的关系对于大多数气体与实验结果并不完全符合。当改进了气体分子运