曾余庚 徐国华 宋国乡 编著
吴鸿适 审校

电磁场有限单元法

科学出版社

电磁场有限单元法

曾余庚　徐国华　宋国乡 编著

吴鸿适 审校

科 学 出 版 社

1 9 8 2

内 容 简 介

本书全面系统地阐述了电磁场有限元法的基本原理和应用. 全书共分三篇: 第一篇为电磁场有限单元法的数学基础. 深入浅出地介绍了线性代数, 泛函分析和数理方程中与电磁场有限单元法有关的基本概念、原理、定理和公式. 第二篇为电磁场的有限单元法. 全面系统地介绍了以变分原理为基础的有限单元法以及 Helmholtz、Laplace 和 Poisson 方程的有限元解法, 讨论了波动方程的有限元解, 导出了几种常用单元的有限元方程. 还详细讨论了场变量模型、高次单元和等参数等问题. 第三篇为电磁场有限单元法的线性代数计算方法. 简明扼要地介绍了求解电磁场有限单元方程常用的几个算法.

本书把电磁场有限单元法的数学基础、基本原理、应用方法和有关的计算方法有机地结合在一起, 形成了一个完整的体系. 可供从事电子器件、微波技术、天线理论、电子光学及电机工程等方面工作的科技人员和研究生参考, 也可供大专院校有关专业师生参考.

电磁场有限单元法

曾余庚 徐国华 宋国乡 编著

吴鸿适 审校

责任编辑 刘兴民

科学出版社 出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂 印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1982 年 6 月第 一 版 开本: 787×1092 1/32

1982 年 6 月第一次印刷 印张: 13 1/2

印数: 0001—7,200 字数: 307,000

统一书号: 15031·412

本社书号: 2627·15—7

定价: 2.10 元

序　言

由于高速度、大容量电子计算机的出现，促进了各种数值分析方法的发展，为求解工程技术中各种复杂问题提供了技术条件．有限单元法求解电磁场问题就是一种先进的数值分析方法，能解决过去用古典方法所无法解决、而只能单纯依靠实验摸索的一些电磁场问题．关于电磁场问题的有限元分析，国外已有许多文献资料，国内应用有限单元法求解电磁场问题也取得了一定的进展，但反映这方面工作的文献资料还不如结构领域那么多．广大从事电磁场工作的科技工作者迫切需要有一本较全面系统地介绍求解电磁场问题的有限单元法书籍，以便学习和应用有限单元法来解决用传统的古典方法所不能求解的电磁场问题．编著者就是在这样的情况下，在自己科研工作的基础上，根据几次举办有限单元法短训班所编的讲义整理编写而成的．

本书在写作时，着眼于应用，也考虑到读者进一步阅读有关这方面文献资料所必需的基础知识，为此，书中有选择地介绍了一些数学方面的概念、原理、定理和方法．该书从理论到应用和计算构成了一个完整的体系．

本书分为三部分，第一篇电磁场有限单元法的数学基础，介绍了电磁场有限单元法所必需的数学知识，扼要地阐述了线性代数、泛函分析、数理方程中与电磁场有限单元法有关的基本概念和基本方法，重要的原理和定理．略去了烦琐的推导和论证．这是本书的开篇，此篇力求通俗易懂，便于自学，为学习有限单元法的基本原理和方法打下基础，并为进一步

阅读有关文献资料创造条件.

第二篇电磁场的有限单元法，这是本书的核心部分. 首先介绍了以变分原理为基础的有限单元法的基本思想，详细讨论了电磁场问题中经常遇到的几个重要方程的有限元解法. 为便于应用，对最常用的几种单元，导出了相应的单元特征式，并进一步介绍了高次单元、等参数单元及其相应的内插函数. 综述了电磁场有限单元法的基本原理和方法，使读者可结合具体问题灵活应用.

第三篇电磁场有限单元法的线性代数计算方法. 有重点地介绍了求解电磁场有限元方程的几个常用的算法. 以便读者在实际应用中参考选用.

书中附录提供了读者为运算电磁场问题时所必需的一些物理常数，矢量运算公式，合理化 MKSA 与高斯单位制间的变换，几种直角坐标下 Helmholtz 方程以及各个场分量的表示式等，以有利于读者查阅应用.

在编写本书过程中，始终得到吴鸿适教授的热情关怀和指导. 吴鸿适教授仔细审阅了本书的全部内容，提出了许多宝贵意见，并对有些章节进行了仔细修改和补充. 这里，向吴鸿适教授表示衷心的感谢. 我们的工作还得到西北电讯工程学院各级领导以及茅于宽教授的关心与支持，这里一并致谢.

由于作者们学识浅陋，书中肯定有不少错漏不足之处，希望读者们不吝指正.

编 著 者

一九八〇年八月

目　　录

第二篇 电磁场的有限单元法

第三篇 电磁场有限单元法的线性代数计算方法

第一篇　电磁场的有限单元法的数学基础

第一章　线 性 代 数

§1　引　　言

高速电子计算机的出现，使得工程技术人员能采用各种数值离散化方法来求得复杂问题的近似解．有限单元法是一种先进的数值离散化方法，电磁场问题中经有限单元法离散处理后得到的一类最常见、最基本的数学模型是线性代数方程组．

线性代数研究的对象就是线性方程组，而线性代数中所采用的工具是行列式、向量和矩阵．尤其是矩阵这个数学工具，它在大量的代数运算过程中出色地担当了组织者的角色，显示了它的优越性，因此矩阵是整个线性代数的重点．有人认为线性代数实质上就是矩阵的代数，也是有一定道理的．

作为电磁场的有限单元法的数学基础，在线性代数这一章中，我们简要地介绍行列式和向量，重点叙述矩阵的概念及运算，并讨论了线性方程组的相容性及求解问题．

§2　行　列　式

2.1　二阶行列式

在利用消去法解二元一次方程组

$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 = c_1, & (1) \\ a_2x_1 + b_2x_2 = c_2 & (2) \end{cases}$$

时，为了消去方程组中的未知量 x_2，可用 b_2 乘式(1)的两端，用 b_1 乘式(2)的两端，得

$$a_1b_2x_1 + b_1b_2x_2 = b_2c_1,$$

$$a_2b_1x_1 + b_1b_2x_2 = b_1c_2.$$

两式相减得

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x_1 = b_2c_1 - b_1c_2.$$

于是，若 $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$，则可解得

$$x_1 = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}. \tag{3}$$

同理，为了消去 x_1 求出 x_2，可以用 a_2 和 a_1 分别乘式(1)和式(2)，得

$$a_1a_2x_1 + a_2b_1x_2 = a_2c_1,$$

$$a_1a_2x_1 + a_1b_2x_2 = a_1c_2.$$

两式相减得

$$(a_2b_1 - a_1b_2)x_2 = a_2c_1 - a_1c_2.$$

若 $a_2b_1 - a_1b_2 \neq 0$，则可解得

$$x_2 = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}. \tag{4}$$

式(3)和式(4)中的分子和分母，是由方程组的系数和右端项经过运算得到的，而这种运算具有很明显的规律性．式(3)和式(4)中的分母是一样的，为

$$a_1b_2 - a_2b_1,$$

这是由 a_1, a_2 与 b_1, b_2 交叉相乘后相减而得．我们用记号

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

来表示这种运算，并称它为二阶行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1.$$

行列式中横的称为行，竖的称为列． 数 a_1, a_2, b_1, b_2 称为行列式的元素．

显然,式(3)中分子

$$c_1b_2 - c_2b_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \tag{5}$$

式(4)中分子

$$a_1c_2 - a_2c_1 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}. \tag{6}$$

于是,使用行列式记号,方程组的解便可以表示为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}. \tag{7}$$

例 试利用公式(7)解方程组

$$\begin{cases} 2x + 3y = 13, \\ 3x + 2y = 12. \end{cases}$$

【解】 根据公式(7)有

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 13 & 3 \\ 12 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-10}{-5} = 2,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 13 \\ 3 & 12 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-15}{-5} = 3.$$

从上面的讨论我们可以看到,使用了二阶行列式的记号,

使二元一次方程组的求解公式变得特别清楚、简明，便于记忆．于是，人们很自然地就会想到，这种方法和规律是否可以推广到三元和更多元的线性方程组？从后面的讨论我们可以知道，如果类似地引进三阶和更高阶的行列式，则前面这种利用二阶行列式来处理二元线性方程组的求解规律对三元和更多元的线性方程组也同样适用，这也就是引进行列式这个数学工具的目的和意义．

2.2 三阶行列式

现在我们来考虑三元一次代数方程组

$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 = d_1, \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = d_2, \\ a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 = d_3. \end{cases} \tag{8}$$

为了利用前面解二元一次方程组的求解公式，我们将方程组(8)中前两式改写为

$$b_1x_2 + c_1x_3 = d_1 - a_1x_1,$$
$$b_2x_2 + c_2x_3 = d_2 - a_2x_1,$$

根据公式(7)可以解出

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} d_1 - a_1x_1 & c_1 \\ d_2 - a_2x_1 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}, \qquad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & d_1 - a_1x_1 \\ b_2 & d_2 - a_2x_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}. \tag{9}$$

将式(9)代入式(8)的第三方程，则有

$$a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} x_1 + b_3\begin{vmatrix} d_1 - a_1x_1 & c_1 \\ d_2 - a_2x_1 & c_2 \end{vmatrix} + c_3\begin{vmatrix} b_1 & d_1 - a_1x_1 \\ b_2 & d_2 - a_2x_1 \end{vmatrix}$$
$$= d_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}. \tag{10}$$

因为根据二阶行列式定义

$$\begin{vmatrix} d_1 - a_1x_1 & c_1 \\ d_2 - a_2x_1 & c_2 \end{vmatrix} = (d_1 - a_1x_1)c_2 - (d_2 - a_2x_1)c_1$$

$$= \begin{vmatrix} d_1 & c_1 \\ d_2 & c_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} x_1,$$

$$\begin{vmatrix} b_1 & d_1 - a_1x_1 \\ b_2 & d_2 - a_2x_1 \end{vmatrix} = (d_2 - a_2x_1)b_1 - (d_1 - a_1x_1)b_2$$

$$= \begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} x_1,$$

把它们代入式(10),就可解得

$$x_1 = \frac{d_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - d_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + d_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}, \tag{11}$$

同理可得

$$x_2 = \frac{a_1\begin{vmatrix} d_2 & c_2 \\ d_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} d_1 & c_1 \\ d_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} d_1 & c_1 \\ d_2 & c_2 \end{vmatrix}}{a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}, \tag{12}$$

$$x_3 = \frac{a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_3 & d_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}}{a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}. \tag{13}$$

显然可以看出式(11)、(12)、(13)中的分母都是

$$a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

我们用记号

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

来表示,即令

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$-a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = D,$$

同样可令

$$\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = d_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$-d_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + d_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = D_1$$

来表示式(11)的分子,用

$$\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} d_2 & c_2 \\ d_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$-a_2\begin{vmatrix} d_1 & c_1 \\ d_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} d_1 & c_1 \\ d_2 & c_2 \end{vmatrix} = D_2$$

来表示式(12)的分子,用

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & d_2 \\ b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

$$-a_2\begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_3 & d_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix} = D_3$$

来表示式(13)的分子.

于是方程组(8)便有了与二元一次方程组类似形式的求解公式:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{D_1}{D}, \\[2ex] x_2 = \dfrac{D_2}{D}, \\[2ex] x_3 = \dfrac{D_3}{D}. \end{cases} \tag{14}$$

我们称记号

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

为一个三阶行列式，它有三行三列，共九个元素. 它的运算规律通过

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \tag{15}$$

及二阶行列式的规定立即可得.

关于三阶行列式的运算规律，可用下面的记忆方法（仅限于三阶）.

在原三阶行列式下，加写第一行，第二行，则成

$$\begin{matrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix} \end{matrix}$$

取在实线上的三个元素作乘积，冠以(＋)号，则得三项：

$$+a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2,$$

又取在虚线上的三个元素作乘积，冠以（－）号，则得另三项：

$$-a_3b_2c_1-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3.$$

原行列式的运算规律即为它们之代数和：

$$\begin{aligned}D=&a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2\\&-a_3b_2c_1-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3.\end{aligned}\tag{16}$$

例 求解线性方程组

$$\begin{cases}2x-y+z=0,\\3x+2y-5z=1,\\x+3y-2z=4.\end{cases}$$

【解】 这时

$$D=\begin{vmatrix}2&-1&1\\3&2&-5\\1&3&-2\end{vmatrix}=28,\quad D_1=\begin{vmatrix}0&-1&1\\1&2&-5\\4&3&-2\end{vmatrix}=13,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}2&0&1\\3&1&-5\\1&4&-2\end{vmatrix}=47,\quad D_3=\begin{vmatrix}2&-1&0\\3&2&1\\1&3&4\end{vmatrix}=21.$$

因此

$$x=\frac{13}{28},\ y=\frac{47}{28},\ z=\frac{21}{28}=\frac{3}{4}.$$

2.3 n阶行列式

为了便于研究行列式，我们把位于第i行第j列的元素记为a_{ij}，于是二阶行列式与三阶行列式的一般形式可分别写为