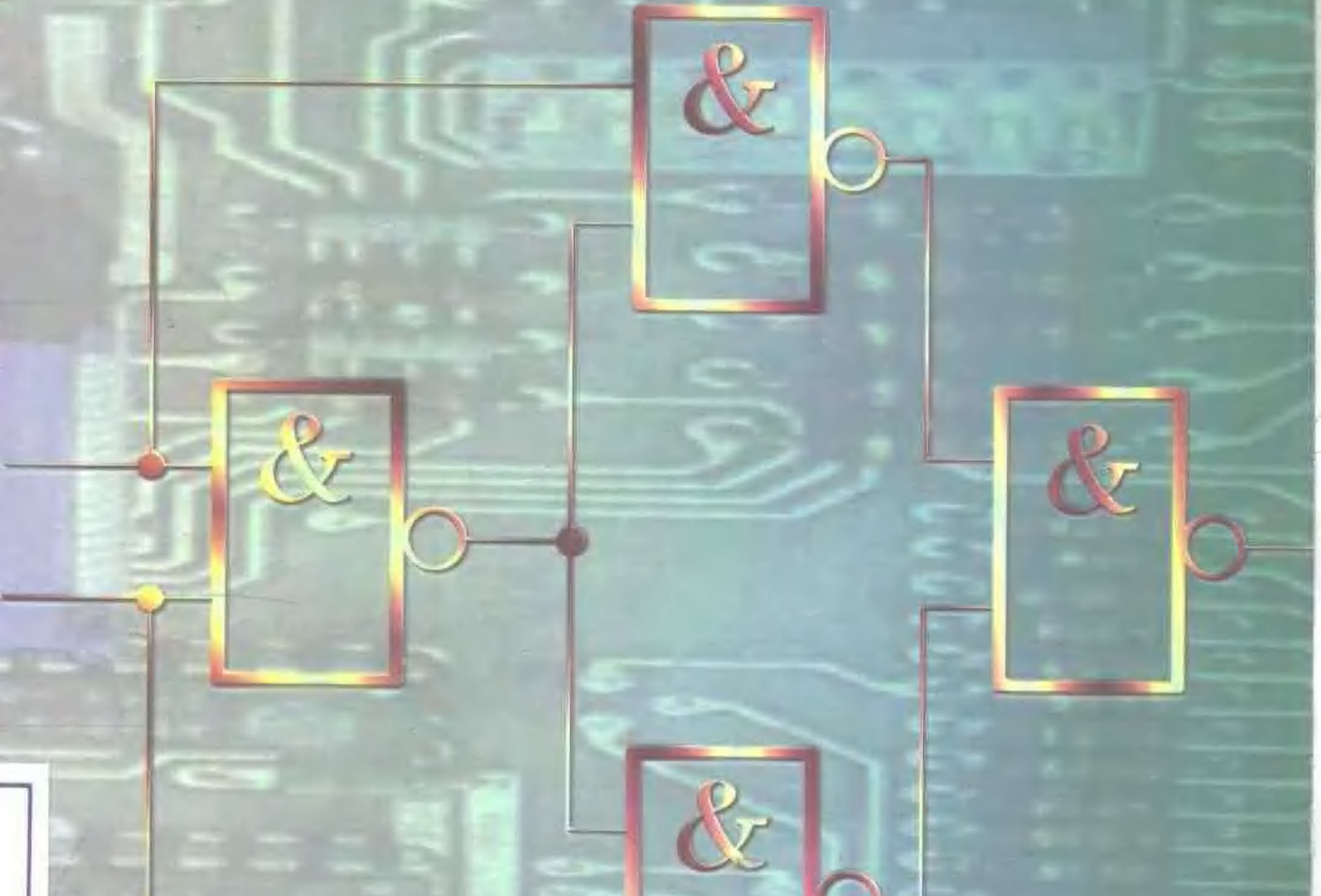
数字电路与逻辑设计

曹国清　主编



中国矿业大学出版社

数字电路与逻辑设计

曹国清　主编

中国矿业大学出版社

内容简介

本书是在近年来教学改革与实践的基础上，根据教学基本要求编写的。全书共分十一章，包括数制与编码、逻辑代数基础、逻辑门电路、组合逻辑电路、集成触发器、时序逻辑电路、数字系统设计基础、脉冲波形的产生与整形、半导体存贮器及可编程逻辑器件、数模和模数转换、数字逻辑电路综合应用举例。每章之后有思考题与习题，可供选用。

本书可作为计算机、自动控制、通信、电子等专业本科和大专的技术基础课教材。可根据不同需要适当取舍有关章节，以满足不同专业和不同层次的教学要求。本书还可供有关工程技术人员参考阅读。

数字电路与逻辑设计
曹国清　主编

出版人　解京选
责任编辑　苏树朴

中国矿业大学出版社出版发行
（江苏徐州　邮政编码　221008）
新华书店经销　江苏省赣中印刷厂印刷
开本 787×1092　1/16　印张 19 字数 462 千字
1998 年 8 月第 1 版　1998 年 8 月第 1 次印刷
印数 1～4100 册

ISBN 7 - 81040 - 871 - 2

TN・7　　定价：19.60 元

前　言

在近年来教学改革和实践的基础上，为满足不同专业、不同层次的教学要求，我们根据数字电路与逻辑设计课的“基本要求”，编写了《数字电路与逻辑设计》教材。

在教材编写过程中，根据注重基础、突出应用的指导思想，在内容安排上既注重了基本理论、基本概念和基本方法的要求，又照顾到了实际应用的需要和集成技术的发展，加强了中、大规模集成电路的内容。对集成电路删减了其内部工作过程的分析，强调了其逻辑功能和典型应用；增加了用中、大规模集成电路实现组合逻辑和时序逻辑设计的方法和实例。由于 PAL 和 GAL 在数字系统设计中已得到广泛应用，因此本教材也介绍了 PAL 和 GAL 的基础知识和基本应用。

在教材编写过程中，我们本着由浅入深、由易到难、循序渐进、通俗易懂的原则，力求突出重点、基本概念清晰，努力贯彻少而精和理论联系实际的精神，以适应不同层次学生的要求。不同专业也可根据专业需要取舍有关章节，其中带“*”内容自动控制等专业可以不讲；第七章内容可根据教师的安排自由取舍；第十一章可作为实践性教学环节示例。每章后都附有小结和习题，帮助学生加深对课程内容的理解、掌握重点内容。

本书由曹国清教授主编，参加编写工作的有张剑英(第一、二章)、马牧燕(第四、九章)、毕文艳(第三、五章)、曹国清(第六、七、八、十、十一章)。

由于编者水平所限，书中难免存在不妥之处和谬误，恳请读者批评指正。

编　者

1998 年 2 月

目　录

绪言……………………………………………………………………………………（1）
第一章　数制与编码……………………………………………………………………（3）
1.1　进位计数制 ………………………………………………………………（3）
1.2　数制转换 …………………………………………………………………（5）
1.3　数的原码、反码及补码表示 ……………………………………………（11）
1.4　编码…………………………………………………………………………（16）
思考题与习题 ……………………………………………………………………（24）
第二章　逻辑代数基础 ………………………………………………………………（26）
2.1　逻辑变量与逻辑函数………………………………………………………（26）
2.2　逻辑代数的基本公式和规则………………………………………………（28）
2.3　逻辑函数的化简……………………………………………………………（30）
思考题与习题 ……………………………………………………………………（45）
第三章　逻辑门电路 …………………………………………………………………（48）
3.1　基本逻辑门电路……………………………………………………………（48）
3.2　TTL 集成门电路 …………………………………………………………（54）
3.3　MOS 集成门电路 …………………………………………………………（66）
思考题与习题 ……………………………………………………………………（73）
第四章　组合逻辑电路 ………………………………………………………………（78）
4.1　组合逻辑电路的一般分析方法……………………………………………（78）
4.2　组合逻辑电路的设计方法…………………………………………………（79）
4.3　常用集成组合电路…………………………………………………………（88）
4.4　组合逻辑电路中的竞争与险象 …………………………………………（112）
思考题与习题……………………………………………………………………（114）
第五章　集成触发器…………………………………………………………………（118）
5.1　基本触发器 ………………………………………………………………（118）
5.2　钟控 RS 触发器 …………………………………………………………（121）
5.3　主从 JK 触发器 …………………………………………………………（122）
5.4　边沿触发器 ………………………………………………………………（125）
5.5　CMOS 触发器 ……………………………………………………………（127）
5.6　不同类型触发器之间的转换 ……………………………………………（129）
思考题与习题……………………………………………………………………（132）
第六章　时序逻辑电路………………………………………………………………（136）
6.1　时序电路的特点 …………………………………………………………（136）

6.2 时序电路的状态表和状态图 …………………………………………………… (137)
6.3 常用时序逻辑部件 ………………………………………………………… (138)
*6.4 时序电路的分析和设计 ……………………………………………………… (161)
*6.5 时序电路中的竞争与险象 …………………………………………………… (192)
思考题与习题……………………………………………………………………… (195)
*第七章 数字系统设计基础………………………………………………………… (200)
7.1 数字系统的一般构成 ………………………………………………………… (200)
7.2 自上而下的设计方法 ………………………………………………………… (200)
7.3 ASM 图符号……………………………………………………………………… (201)
7.4 ASM 图的硬件实现…………………………………………………………… (203)
7.5 用 ASM 图实现小型数字系统的设计 …………………………………… (206)
思考题与习题……………………………………………………………………… (215)
第八章 脉冲波形的产生与整形…………………………………………………… (216)
8.1 555 定时器及其基本应用 …………………………………………………… (216)
8.2 集成门构成的脉冲单元电路 ……………………………………………… (222)
思考题与习题……………………………………………………………………… (231)
第九章 半导体存贮器及可编程逻辑器件……………………………………… (236)
9.1 半导体存贮器 ………………………………………………………………… (236)
9.2 可编程逻辑器件及其应用 ………………………………………………… (241)
思考题与习题……………………………………………………………………… (257)
第十章 数模和模数转换…………………………………………………………… (258)
10.1 D/A 转换器 ………………………………………………………………… (258)
10.2 A/D 转换器 ………………………………………………………………… (266)
思考题与习题……………………………………………………………………… (274)
第十一章 数字逻辑电路综合应用举例………………………………………… (277)
11.1 简易计算器……………………………………………………………………… (277)
11.2 数字频率计……………………………………………………………………… (282)
11.3 可编程字符显示器…………………………………………………………… (287)
11.4 $3\frac{1}{2}$位数字电压表 …………………………………………………… (292)
参考文献…………………………………………………………………………… (297)

绪　言

目前数字电子技术已经广泛地应用于计算机、自动控制、电子测量仪表、电视、雷达、通信等各个领域。例如在现代测量技术中，数字测量仪表不仅比模拟测量仪表精度高、功能强，而且容易实现测试的自动化和智能化。随着集成技术的发展，尤其是中、大规模和超大规模集成电路的发展，数字电子技术的应用范围将会更广泛地渗透到国民经济的各个部门，并将产生越来越深刻的影响。因此，数字电子技术是电类及计算机类各专业的主要技术基础课之一，也是现代电子工程技术人员所必备的专业基础知识。

1. *数字信号*

自然界中存在的许多物理量，如时间、温度、压力等，它们在时间和数值上都具有连续变化的特点，这种连续变化的物理量，习惯上称为模拟量。表示模拟量的信号叫做模拟信号，如电压、电流等。模拟信号的瞬间取值可以是一个数值区间内的任意值。

还有一种物理量，它们在时间和数值上是不连续的，它们的变化总是发生在一系列离散的瞬间。这种不连续变化的离散的物理量称为数字量，表示数字量的信号叫做数字信号。数字信号的取值只有 0 和 1 两种，它们并不表示数值的大小，完全没有数值的概念，而只是表示两种截然相反的逻辑状态，如电位的高、低和脉冲的有、无等。

2. *数字电路及特点*

数字电路是指能对数字信号进行算术运算和逻辑运算的电路。所谓算术运算，即对两个或两个以上数字信号进行加、减、乘、除等一系列算术加工；所谓逻辑运算，即对数字信号进行与、或、非及其他逻辑关系的加工处理。

数字电路的工作信号是离散的数字信号，所以在数字电路中工作的半导体管稳定时一般都工作在开关状态，即工作在饱和区和截止区，而放大区只是一种过渡状态。在二进制系统中，数码只有 0 和 1 两种可能，反映到电路上就是高电平和低电平。

数字电路中的单元电路是集成门电路和集成触发器。它们是构成组合逻辑电路和时序逻辑电路的基本单元电路。

数字电路的研究对象是输出信号与输入信号之间的逻辑关系。利用的主要分析工具是逻辑代数，描述逻辑功能的主要方法是真值表、逻辑函数表达式及状态图、波形图等。经常遇到的问题是对已知电路进行逻辑分析和根据实际的功能要求进行逻辑设计。

3. *学习本课程应注意的问题*

研究数字电路的逻辑功能叫做“分析”，根据确定的功能要求设计出相应的逻辑电路叫做“综合”，或“逻辑设计”。虽然数字电路千变万化，但是分析和设计的方法基本上是一致的，通常逻辑设计的解答不是唯一的，一般最佳设计应满足全面的性能指标，包括价格、功耗、可靠性及充分利用已有元器件等。在集成电路普遍大量应用的今天，则集成芯片数目最少和引出线的总数最少成了评价最佳逻辑设计的主要指标。

学习本课程，必须抓住特点，尤其要注意基本概念、基本方法、基本单元电路、常用逻辑

部件和典型应用。注意理论与实践的结合，不断提高工程实践能力。

需要指出的是，随着科学技术的发展、特别是微电子技术的发展，越来越难以将数字技术与模拟技术截然分开。数字电压表、数字示波器、开关电源等都是模拟技术与数字技术相结合的产物。在解决一些实际的具体问题时，往往是两种技术混合使用，只是数字技术在很多方面更优于模拟技术。这是在学习中应该注意的。

第一章 数制与编码

数字系统中经常遇到计数问题。所谓数制，就是计数体制、计数方法。具体地说就是表示数的一组统一符号和计数规则。本章主要讨论数字系统中数的基本表示方法、各种不同进位计数制及其相互间的转换方法，并介绍了二进制数在计算机中的表示方法和常用的几种编码。

1.1 进位计数制

进位计数法是将数划分为不同的位数，按位进行累加。每位数都使用同样的一些数字符号，但同一数字符号在不同位上所表示的数值是不同的，因而使用较少的数字符号就能表示范围很大的数。在实际生活中都是采用进位计数的方法进行计数，简称进位制。在数字技术中最常用的有二进制、八进制、十六进制和十进制等。

1.1.1 十进位计数制

对于任何一个数，可以用不同的进位制来表示。现从较熟悉的十进制入手，分析进位制的特点和表示方法。

在十进制计数中，采用了十个有序的数字符号，即 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9。若干上述数字符号加上一个小数点符号“.”并列在一起可以表示一个十进制数，其计数规律是“逢十进一”。

例如：518.73 共有五位，左起第一位为百位，5 代表 500；第二位为十位，1 代表 10；第三位为个位，8 代表 8。小数点右边的第一位为十分位，7 代表$\frac{7}{10}$；第二位为百分位，3 代表$\frac{3}{100}$。可以看出，处于不同位置上的数字符号有着不同的意义。

为获得十进计数制的特点，引出两个述语：一个是“基数”，它表示某种进位制所具有的数字符号的个数。如十进制的基数为“十”；另一个是“权”，它表示某种进位制的数中不同位置上数字的单位值。如上面讲到的十进制数 518.73 中，百位上数字的权为 10^2、十位上数字的权为 10^1，个位上数字的权为 10^0，十分位上数字的权为 10^{-1}，百分位上数字的权为 10^{-2}。

基数和权是进位制的二个要素。有了基数和权的概念，可以将任何一个数表示成多项式的形式。例如：

$$518.73=5\times10^2+1\times10^1+8\times10^0+7\times10^{-1}+3\times10^{-2}$$

一般说来，一个十进制数 N，可以用多项式表示为

$$\begin{aligned}(N)_{10} = {} & K_{n-1}\cdot(10)^{n-1}+K_{n-2}\cdot(10)^{n-2}+\cdots\cdots+K_1\cdot(10)^1+K_0\cdot(10)^0 \\ & +K_{-1}\cdot(10)^{-1}+K_{-2}\cdot(10)^{-2}+\cdots\cdots+K_{-m}\cdot(10)^{-m}\end{aligned} \tag{1-1-1}$$

写成和式为

$$(N)_{10}=\sum_{i=-m}^{n-1}K_i\cdot(10)^i \tag{1-1-2}$$

式中，n 表示整数部分的位数；m 表示小数部分的位数；10 表示基数；$(10)^i$ 表示第 i 位的权；K_i 表示第 i 位的系数。式(1-1-1)也称为按权展开式。

另外，十进制数 N 也可用位置计数法表示为

$$(N)_{10}=(K_{n-1}K_{n-2}\cdots\cdots K_1K_0.K_{-1}\cdots\cdots K_{-m})_{10} \tag{1-1-3}$$

1.1.2 其他进位计数制

在数字系统中还使用其他进位计数制，其他进制的记数规律可以看成为十进制计数制的推广。对于任意 R 进制来说，数 N 可表示为按权展开式

$$\begin{aligned}(N)_R&=K_{n-1}\cdot R^{n-1}+K_{n-2}\cdot R^{n-2}+\cdots\cdots+K_1\cdot R^1+K_0\cdot R^0\\&\quad+K_{-1}\cdot R^{-1}+K_{-2}\cdot R^{-2}+\cdots\cdots+K_{-m}\cdot R^{-m}\\&=\sum_{i=-m}^{n-1}K_i\cdot R^i\end{aligned} \tag{1-1-4}$$

R 进制数 N 也可用位置记数法表示为

$$(N)_R=K_{n-1}K_{n-2}\cdots\cdots K_1K_0.K_{-1}K_{-2}\cdots\cdots K_{-m} \tag{1-1-5}$$

在 R 进制中，每一位都是逢 R 进一。

1.1.2.1 二进制

当基数 R 等于 2 时，称为二进制。在二进制中只有两个有序的数字符号 0 和 1。计数时每一位都是逢二进一。一个二进制数的按权展开式为

$$\begin{aligned}(N)_2&=K_{n-1}\cdot 2^{n-1}+K_{n-2}\cdot 2^{n-2}+\cdots\cdots\\&\quad+K_0\cdot 2^0+K_{-1}\cdot 2^{-1}+\cdots\cdots+K_{-m}\cdot 2^{-m}\\&=\sum_{i=-m}^{n-1}K_i\cdot 2^i\end{aligned} \tag{1-1-6}$$

例如：$10101.101=1\times 2^4+0\times 2^3+1\times 2^2+0\times 2^1+1\times 2^0+1\times 2^{-1}+0\times 2^{-2}+1\times 2^{-3}$

1.1.2.2 八进制

当基数 R 等于 8 时，称为八进制。0,1,2,3,4,5,6,7 为其八个数字符号。八进制的计数规则是逢八进一。八进制数按权展开式为

$$\begin{aligned}(N)_8&=K_{n-1}\cdot 8^{n-1}+K_{n-2}\cdot 8^{n-2}+\cdots\cdots+K_0\cdot 8^0\\&\quad+K_{-1}\cdot 8^{-1}+\cdots\cdots+K_{-m}\cdot 8^{-m}\\&=\sum_{i=-m}^{n-1}K_i\cdot 8^i\end{aligned}$$

1.1.2.3 十六进制

当基数 R 等于 16 时，称为十六进制。十六进制的 16 个数字符号为：0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F。十六进制的计数规则是逢十六进一。十六进制数可表示为

$$\begin{aligned}(N)_{16}&=K_{n-1}\cdot 16^{n-1}+K_{n-2}\cdot 16^{n-2}+\cdots\cdots+K_0\cdot 16^0\\&\quad+K_{-1}\cdot 16^{-1}+\cdots\cdots+K_{-m}\cdot 16^{-m}\\&=\sum_{i=-m}^{n-1}K_i\cdot(16)^i\end{aligned}$$

上述几种进位计数制是实际中经常用到的计数制方式，另外根据需要还可以有其他的计数制方式，如六进制、十二进制等等。表 1-1-1 列出了几种常用的进位制的表示方法。从表上可以看出同一数值可以用不同进位制数表示，其形式是不同的。

表 1-1-1 几种常用数制的表示方法

$R=10$	$R=2$	$R=6$	$R=8$	$R=12$	$R=16$
0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1
2	10	2	2	2	2
3	11	3	3	3	3
4	100	4	4	4	4
5	101	5	5	5	5
6	110	10	6	6	6
7	111	11	7	7	7
8	1000	12	10	8	8
9	1001	13	11	9	9
10	1010	14	12	A	A
11	1011	15	13	B	B
12	1100	20	14	10	C
13	1101	21	15	11	D
14	1110	22	16	12	E
15	1111	23	17	13	F
16	10000	24	20	14	10

1.2 数制转换

从上节介绍的几种进位制可以看出，不同进位制只是描述数值的不同手段，因而它们是可以相互转换的。将一个数从一种进位计数制转换成另一种进位计数制的方法，称为数制转换。常用的数制转换方法有下列几种。

1.2.1 多项式替代法

例 1 将二进制数 1011.101 转换成十进制数。

先把二进制数的位置记数法展开为多项式表示法，并且式中的所有数字符号都用二进制的相应值表示，则有

$$(1011.101)_2 = 1\times(10)^{11} + 0\times(10)^{10} + 1\times(10)^{1} + 1\times(10)^{0} + 1\times(10)^{-1} + 0\times(10)^{-10} + 1\times(10)^{-11}$$

再把等式右边的二进制数替代成十进制数，则得

$$(1011.101)_2 = 1\times2^3 + 0\times2^2 + 1\times2^1 + 1\times2^0 + 1\times2^{-1} + 0\times2^{-2} + 1\times2^{-3}$$

在十进制中计算等式右边之值，得

$$(1011.101)_2 = (8+0+2+1+0.5+0+0.125)_{10} = (11.625)_{10}$$

这一方法可以推广到任意两个 α、β 进制数之间的转换。其方法是：先将 α 进制的数在 α

进制中按权展开，然后替代成相应 β 进制中的相应值，最后在 β 进制中计算即可得 β 进制数。

例 2 $(321.4)_8=(?)_{10}$

$$\begin{aligned}(321.4)_8&=3\times(10)^2+2\times(10)^1+1\times(10)^0+4\times(10)^{-1}\text{（展开）}\\&=(3\times8^2+2\times8^1+1\times8^0+4\times8^{-1})_{10}\quad\text{（替代）}\\&=(209.5)_{10}\qquad\text{（在十进制中计算）}\end{aligned}$$

例 3 $(1002.2)_3=(?)_2$

$$\begin{aligned}(1002.2)_3&=1\times(10)^{10}+0\times(10)^2+0\times(10)^1+2\times(10)^0+2\times(10)^{-1}\text{（展开）}\\&=(1\times11^{11}+0\times11^{10}+0\times11^1+10\times11^0+10\times11^{-1})_2\quad\text{（替代）}\\&=(11101.10101\cdots)_2\qquad\text{（在二进制中计算）}\end{aligned}$$

由上述几例可以看出，多项式替代法用于 α 进制转换为十进制时较为简单，即 β 等于 10。而当 β 为其他进制时，计算就很不方便了。

1.2.2 基数除/乘法

基数除/乘法实际包括基数除法和基数乘法两种。基数除法适用于整数转换，基数乘法适用于小数的转换。一个 α 进制的数，若包含整数和小数两部分，则可以将它们分别转换，然后合并起来。

1.2.2.1 基数除法

下面通过实例来说明利用基数除法实现两个任意进制整数之间的转换方法。

现以将十进制整数 35 转换为二进制数为例，说明将十进制数转换为二进制数的转换方法如下。

假设十进制数 35 转换为二进制数的结果为

$$\begin{aligned}(35)_{10}&=(K_{n-1}K_{n-2}\cdots\cdots K_1K_0)_2\\&=(K_{n-1}\cdot2^{n-1}+K_{n-2}\cdot2^{n-2}+\cdots\cdots+K_1\cdot2^1+K_0\cdot2^0)_{10}\end{aligned}\qquad(1\text{-}2\text{-}1)$$

将(1-2-1)式两边除以 2 得

$$17+\frac{1}{2}=(K_{n-1}\cdot2^{n-2}+K_{n-2}\cdot2^{n-3}+\cdots\cdots+K_1\cdot2^0)+\frac{K_0}{2}$$

等式两边的数相等，则它们的整数部分和小数部分必定分别相等，所以有

$$17=K_{n-1}\cdot2^{n-2}+K_{n-2}\cdot2^{n-3}+\cdots\cdots+K_1\cdot2^0\qquad(1\text{-}2\text{-}2)$$

$$\frac{1}{2}=\frac{K_0}{2}\qquad\text{即 }K_0=1$$

将(1-2-2)式两边同除以 2，得

$$8+\frac{1}{2}=(K_{n-1}\cdot2^{n-3}+K_{n-2}\cdot2^{n-4}+\cdots\cdots+K_2\cdot2^0)+\frac{K_1}{2}$$

同理，整数和小数部分应分别相等，则有

$$8=K_{n-1}\cdot2^{n-3}+K_{n-2}\cdot2^{n-4}+\cdots\cdots+K_2\cdot2^0\qquad(1\text{-}2\text{-}3)$$

$$\frac{1}{2}=\frac{K_1}{2}\qquad\text{即 }K_1=1$$

再将(1-2-3)式两边同除以 2，得

$$4=(K_{n-1}\cdot2^{n-4}+K_{n-2}\cdot2^{n-5}+\cdots\cdots+K_3\cdot2^0)+\frac{K_2}{2}$$

$$K_2 = 0$$

可见，所要转换成的二进制数$(K_{n-1}K_{n-2}\cdots\cdots K_1K_0)_2$的最低位$K_0$是十进制数35除以2所得的余数；次低位$K_1$是第一次除2时所得的商17再除以2时所得的余数；以此类推，继续用2除，直到商0为止。每次所得的余数即为要求的二进制数$K_0 \sim K_{n-1}$之值。此法也称为"除基取余法"。

上述过程可以用算式表示为

2	35		余数	
2	17	……	1	低位
2	8	……	1	↑
2	4	……	0	
2	2	……	0	
2	1	……	0	
	0	……	1	高位

转换结果为$(35)_{10}=(100011)_2$。

上述将十进制整数转换为二进制整数的方法可以推广到任何两个α、β进制数之间的转换。

如$(N)_\alpha \rightarrow (N)_\beta$，其方法是：先将$\alpha$进制的整数在$\alpha$进制中连续除以$\beta$(为相应$\alpha$进制值)，求得各次余数$(K_i)_\alpha$。然后将余数用$\beta$进制中相应的数字符号$(K_i')_\beta$表示。最后按照并列表示法依次列出各余数，即得$\beta$进制中的整数。由此可知，基数除法转换过程主要计算是在α进制中进行，欲将α进制数转换为β进制数，必须熟悉α进制的运算规则。因此，基数除法用在十进制→β进制比较方便。

例4　$(683)_{10}=(?)_8$

8	683		余数	
8	85	……	3	低位
8	10	……	5	↑
8	1	……	2	
	0	……	1	高位

可得$(683)_{10}=(1253)_8$。

例5　$(683)_{10}=(?)_{16}$

16	683		余数	
16	42	……	11	低位
16	2	……	10	↑
	0	……	2	高位

其中，$(11)_{10}=(B)_{16}$，$(10)_{10}=(A)_{16}$，$(2)_{10}=(2)_{16}$。所以，$(683)_{10}=(2AB)_{16}$。

1.2.2.2　基数乘法

基数乘法用于不同进制中小数间的转换。

例如，将十进制小数0.8125转换为二进制数，即求$(0.8125)_{10}=(?)_2$。设转换的结果为

$$(0.8125)_{10}=(0.r_{-1}r_{-2}\cdots r_{-m})_2$$

$$=(r_{-1}\cdot 2^{-1}+r_{-2}\cdot 2^{-2}+\cdots+r_{-m}\cdot 2^{-m}) \tag{1-2-4}$$

在十进制中进行运算，将式(1-2-4)两边乘以 2 得

$$1.625=r_{-1}+(r_{-2}\cdot 2^{-1}+\cdots+r_{-m}\cdot 2^{-m+1})$$

两数相等，则它们的整数部分和小数部分应分别相等，故有

$$r_{-1}=1$$

$$0.625=r_{-2}\cdot 2^{-1}+\cdots\cdots+r_{-m}\cdot 2^{-m+1} \tag{1-2-5}$$

将式(1-2-5)两边再同时乘 2，可得

$$1.25=r_{-2}+(r_{-3}\cdot 2^{-1}+\cdots\cdots+r_{-m}\cdot 2^{-m+2})$$

等式两边的整数部分和小数部分分别相等，故有

$$r_{-2}=1$$

$$0.25=r_{-3}\cdot 2^{-1}+\cdots\cdots+r_{-m}\cdot 2^{-m+2}$$

同样的方法可求得

$$r_{-3}=0$$

可见，要求转换的二进制数$(0.r_{-1}r_{-2}\cdots\cdots r_{-m})$的最高位$r_{-1}$是十进制数 0.8125 乘以 2 所得数的整数部分。同理余下的小数部分再乘以 2 所得的整数部分为r_{-2}之值。依此类推，直至满足精度要求为止。可见每次所得乘积的整数部分即为所要求的二进制数$(0.r_{-1}r_{-2}\cdots\cdots r_{-m})_2$中的$r_{-1}\sim r_{-m}$之值。此种方法也称“乘基取整法”。

上述过程可用算式表示为

	整数		0.8125
			$\times\quad 2$
高位	$r_{-1}=1$	……	$\boxed{1}.6250$
			$\times\quad 2$
	$r_{-2}=1$	……	$\boxed{1}.2500$
			$\times\quad 2$
↓	$r_{-3}=0$	……	$\boxed{0}.5000$
			$\times\quad 2$
低位	$r_{-4}=1$	……	$\boxed{1}.0000$

转换结果为　$(0.8125)_{10}=(0.1101)_2$

上述将十进制小数转换为二进制小数的方法可以推广到任意两个α、β进制小数之间的转换。先将α进制小数在α进制中连续乘以β，β应为α进制的一个相应值，求出每次所得乘积的整数部分$(r_i)_\alpha$。然后，将各整数替代成β进制中相应的数字符号$(r_i')_\beta$，按高位到低位的次序用并列表示法列出，即得β进制的小数。若连续乘β后，小数部分仍不能为零，则按所需精度来确定小数的位数。需要指出的是，由于要在α进制中进行乘法运算，所以与基数除法一样，基数乘法用在十进制→β进制时较为方便。

利用基数除/乘法可以将一个既含有整数又含有小数的α进制的混合数很方便地转换为任何β进制的混合数。只要将整数部分和小数部分分别按基数除/乘法的规则进行转换，然后将所得的数合并起来即可。

例 6　$(168.45)_{10}=(?)_6$

整数部分转换

6	168		余数	
6	28	……	0	低位
6	4	……	4	↑
	0	……	4	高位

$$(168)_{10}=(440)_6$$

小数部分转换

	整数		0.45
			$\times\ 6$
高位	2	……	$\boxed{2}.70$
			$\times\ 6$
	4	……	$\boxed{4}.20$
			$\times\ 6$
	1	……	$\boxed{1}.20$
↓			$\times\ 6$
低位	1	……	$\boxed{1}.20$

$$(0.45)_{10}=(0.2411\cdots)_6$$

所以转换结果为 $(168.45)_{10}=(440.2411\cdots)_6$

1.2.3 混合法

前面介绍的两种数制转换方法原则上适用于两种任意 α、β 进制数之间的转换。但多项式替代法是在 β 进制中进行运算，基数除/乘法则需要在 α 进制中进行运算。如果 α、β 进制都不是人们熟悉的进位制，前述两种算法就很不方便。此时，可以用人们熟悉的十进制作为过渡，先把 α 进制数用多项式替代法转换为十进制数；再把十进制数利用基数除/乘法转换为 β 进制的数，这种方法称为混合法，其过程可表示为

$$(N)_\alpha \xrightarrow{\text{多项式替代法}} (N)_{10} \xrightarrow{\text{基数除/乘法}} (N)_\beta$$

例 7 $(345.34)_8=(?)_5$

首先用多项式替代法将八进制数转换为十进制数

$$\begin{aligned}(345.34)_8 &=(3\times8^2+4\times8^1+5\times8^0+3\times8^{-1}+4\times8^{-2})_{10}\\ &=(229.4375)_{10}\end{aligned}$$

再用基数除/乘法将上述所求十进制数转换为五进制数

整数部分用基数除法

5	229		余数	
5	45	……	4	低位
5	9	……	0	↑
5	1	……	4	
	0	……	1	高位

$$(229)_{10}=(1404)_5$$

小数部分用基数乘法

	整数		0.4375
			× 5
高位	2	……	$\boxed{2}.1875$
			× 5
	0	……	$\boxed{0}.9375$
			× 5
	4	……	$\boxed{4}.6875$
			× 5
低位	3	……	$\boxed{3}.4375$

$(0.4375)_{10}=(0.2043)_5$　　（取四位小数）

$$(229.4375)_{10}=(1404.2043)_5$$

转换结果为$(345.34)_8=(1404.2043)_5$。

1.2.4 直接转换法

将α进制数转换为β进制数时，若α与β间满足$\alpha=\beta^k$（或$\beta=\alpha^k$）的关系，且k为整数，则α、β进制间数的转换可采用直接转换法。直接转换法的转换规则为：

(1) 当基数$\alpha=\beta^k$，则一位α进制数可直接转换为k位β进制数。

(2) 当基数$\alpha^k=\beta$，则k位α进制数可直接转换为一位β进制数。

(3) k位分组规则是：整数部分从低位到高位，k位为一组，当最高有效位不足k位时补“0”；小数部分从高位到低位，k位为一组，当最低有效位不足k位时补“0”。

当$R=2^k$，$k=1,2,3,4$时，则$R=2,4,8,16$。由此可知，二进制同四进制、八进制、十六进制具有直接转换关系。其对应关系是：一位四进制数对应二位二进制数；一位八进制数对应三位二进制数；一位十六进制数对应四位二进制数。

常用直接转换法的就是二、八、十六进制间的相互转换。

例 8 将$(AC6.F7)_{16}$转换为二进制数。

一位十六进制数对应四位二进制数，即$\alpha=16$，$\beta=2$，$\alpha=\beta^k$，$k=4$，对应关系为

A	C	6	.	F	7
1010	1100	0110	.	1111	0111

可得，$(AC6.F7)_{16}=(101011000110.11110111)_2$。

例 9 将$(BD.6E)_{16}$转换为八进制数。

$\alpha=16$，$\beta=8$，由于$\alpha=2^4$，$\beta=2^3$，故可以用二进制数作为中间过渡数制，最终实现转换。三种进制数的对应关系为

十六进制	B	D	.	6	E	
二 进 制	01011	1101	.	0110	11100	
八 进 制	2	7 5	.	3	3	4

可得，$(BD.6E)_{16}=(275.334)_8$。

1.2.5 转换位数的确定

进行数制转换时，α 进制中的整数总是可以准确地转换为 β 进制中有限位的整数。但对 α 进制中的小数而言，不一定能转换为 β 进制中有限位的小数，有时会出现无限位小数。因此，在实现小数转换时，必须按精度要求，确定转换所得小数的位数。

设 α 进制小数为 i 位，为保证转换后的精度不低于原精度，在 β 进制中需取 j 位小数，这时应有

$$(0.1)_\alpha^i=(0.1)_\beta^j$$

等式两边在十进制中按权展开，则有

$$(1\times\alpha^{-1})_{10}^i=(1\times\beta^{-1})_{10}^j$$

等式两边取以 α 为底的对数，得 $i\log_\alpha(\alpha)=j\log_\alpha(\beta)$，因为 $\log_\alpha(\alpha)=1$，所以

$$i = j\log_\alpha(\beta) \tag{1-2-6}$$

利用等式 $\log_\alpha(\beta)=\dfrac{\lg\beta}{\lg\alpha}$，得

$$j=i\,\frac{\lg\alpha}{\lg\beta}$$

为了保证转换后的精度不低于原来的精度，j 应取为满足下列不等式的最小整数

$$j\geqslant i\,\frac{\lg\alpha}{\lg\beta} \tag{1-2-7}$$

例如：将 $(0.3021)_{10}$ 转换成十六进制数时，要求转换精度为 $\pm(0.1)_{10}^4$

将 $i=4$，$\alpha=10$、$\beta=16$ 代入式(1-2-7)中，得

$$j\geqslant i\,\frac{\lg\alpha}{\lg\beta}=4\times\frac{\lg 10}{\lg 16}=3.32$$

满足不等式的最小整数为 $j=4$。

1.3 数的原码、反码及补码表示

通常表示带符号的二进制数时，是在数值前加“+”号表示正数，加“−”号表示负数。这样一种表示法，称之为带符号数的“真值”。例如 N_1 和 N_2 为带符号的二进制数，两者的真值可分别表示为

$$N_1=+1010 \qquad\qquad N_2=-1010$$

对带符号的二进制数而言，在计算机中应如何表示呢？实际上“+”和“−”无非是二种状态，用一位二进制数就可以表示，通常用“0”表示“+”，用“1”表示“−”。这样将符号“数值化”的表示法，称之为“机器数”，就是所谓的带符号数的代码表示。上述二个带符号的数 N_1、N_2，在计算机中用机器数表示时，则为

$$N_1=\underset{\text{符号}}{0}\quad\underset{\text{数值}}{1010}\qquad\qquad N_2=\underset{\text{符号}}{1}\quad\underset{\text{数值}}{1010}$$

因为计算机是对机器数进行运算的，因此要求机器数与真值的转换要直观，机器数的运算规则要简单。目前机器数采用三种主要代码形式：原码、反码及补码，都是按照上述要求得到的具有不同特点的机器数。这三种机器数的表示形式中，符号部分的规定是相同的，所不同的仅是数值部分的表示形式有差异。本节主要介绍这三种代码的表示形式及主要性质。