高等学校教学用书

数理统计及其应用

汤光霖　冉隆振　景　平　编

中国矿业大学出版社

高等学校教学用书

数理统计及其应用

汤光霖　冉隆振　景　平　编

中国矿业大学出版社

(苏)新登字第 010 号

内 容 提 要

本书着重讲授各种常用的数理统计方法，包括参数估计、假设检验、回归分析、方差分析及正交试验设计。还介绍了时间序列分析及多元统计分析。

本书可作为高等工科院校本科生及研究生数理统计课程（40～60 学时）的教材，也可作为工科院校学生及工程技术人员自学数理统计之用。

责任编辑　王树范

高等学校教学用书

数理统计及其应用

汤光霖　冉隆振　景　平　编

中国矿业大学出版社出版

新华书店经销　中国矿业大学印刷厂印刷

开本 787×1092 毫米 1/16　印张 19　字数 477 千字

1991 年 11 月第 1 版　1991 年 11 月第 1 次印刷

印份 1—3000 册

ISBN　7-81021-450-0

O · 19　　　　定价：4.90 元

编者说明

本书是为高等工科院校本科生及研究生独立开设的数理统计课程编写的教材，学时为40～60学时。本书也可作为工科院校学生及工程技术人员自学数理统计之用。

在编写过程中，特别注意概念、方法和应用三个环节。在概念上，力求清楚、详细与易懂；在方法上，力求步骤分明，便于掌握；在应用上，一般是通过范例说明如何应用数理统计方法解决实际问题。所选例题涉及面较广，包括一些将数理统计方法应用于矿山实际的问题。理论推导在本书中占有一定分量。为了使读者深刻理解所讲的数理统计方法，以及为了提高学生的分析能力与抽象思维能力，在考虑到学生接受能力的情况下，对一些重要的数理统计方法，尽量给予详细的证明。对只想了解方法的读者，可以略去这些理论推导。本书假定读者具有微积分的初步知识，在个别章节还用到一些矩阵知识。

本书内容较为丰富。重点讲授了各种常用的数理统计方法，例如参数估计、假设检验、回归分析、方差分析以及正交试验设计等。另外，作为简介，还编写了时间序列分析及多元统计分析两章。第一章概率论简述是为没有学过概率论的读者编写的，具有概率论初步知识的读者可以不读。不过，其中有一些定理、公式和结论在后面是要用到的，必要时可查阅。

本书是编者在使用过多次的数理统计讲义的基础上改编的。在编写讲义及改编过程中，参考了多种概率论与数理统计教材以及一些内部使用的讲义，现将主要参考书目列在书后，特在此向有关教材的编著者致以热忱的敬意与感谢！

本书由三人合编。汤光霖负责编写第一、二、四、五、六章；冉隆振负责编写第三、八、九章；景平负责编与第七、十章。由汤光霖负责整理并统一笔调。由于编者水平有限，错误及缺点在所难免，敬希读者批评与指正！

编者

1989年11月

目　录

第一章　概率论简述

§1　随机事件与概率

1·1　必然事件、不可能事件与随机事件

在一定条件下，必然发生的事情称为必然事件；反之，在一定条件下，必然不发生的事情称为不可能事件。例如在一个大气压下，水加热到100℃时，“沸腾”就是必然事件，而“结冰”就是不可能事件。必然事件以大写字母 U 表之，不可能事件以大写字母 V 表之。

在一定条件下，可能发生也可能不发生的事情称为随机事件，下面举例说明。

例1　将一枚硬币上抛两次（条件），观察国徽面、币值面出现的情况。令

$E_1 =$“恰有一次国徽面出现”

$E_2 =$“至少有一次国徽面出现”

$E_3 =$“两次都是国徽面出现”

则 E_1、E_2、E_3 都是随机事件。

例2　在十张相同的卡片上，分别写上数1、2、3、4、5、6、7、8、9、10，任意叠放在一起，从中任意抽取一张（以上是条件）。令 A_i 表示“抽到 i”，A 表示“抽到偶数”，B 表示“抽到小于8的数”，C 表示“抽到奇数”，D 表示“抽到7或9”，则 A_1、A_2、…、A_{10}、A、B、C、D 都是随机事件。

一定条件的实现称为试验，这里的试验一词，在意义上是很广泛的。例如在一个大气压下，把水加热到100℃时，是一个试验；将一枚硬币上抛两次，也是一个试验，等等。如果试验 E 可重复进行（即条件组 E 可重复实现），试验的可能结果不只一个，且哪一个结果发生，试验前是不能预测的，则称这种试验为随机试验。例1、例2中的试验都是随机试验。试验结果有多少、内容是什么完全由条件组决定。在例1中，令 $A=$“国徽面出现”，$B=$“币值面出现”，则例1中可能出现的试验结果有4个，它们是 $(A,A),(A,B),(B,A),(B,B)$。符号 (A,A) 表示第一次出现国徽，第二次也出现国徽，其余符号，依此类推。例2中可能出现的试验结果有10个，即 $A_1,A_2,\cdots,A_{10}$。例2中已列举的随机事件已有14个，为什么说可能出现的试验结果只有10个呢？随机试验的可能出现的试验结果是随机事件，而且它们是不能再分的最简单随机事件，也可称之为基本事件。例1的基本事件是 $(A,A),(A,B),(B,A),(B,B)$；例2的基本事件是 $A_1,A_2,\cdots,A_{10}$。在例2中，A、B、C、D 显然不是基本事件。就 A 来说吧，若 A 发生，则 A_2,A_4,A_6,A_8,A_{10} 中必有一个发生；反之，当 A_2,A_4,A_6,A_8,A_{10} 中有一个发生，则 A 必发生。事实上，A 包括了 A_2,A_4,A_6,A_8,A_{10}，而且也只包括这五个基本事件，可写成 $A=\{A_2,A_4,A_6,A_8,A_{10}\}$，凡像例2中的 A 这样，由基本事件组成的事件称为复合事件。例2中的 A 是复合事件，同理，B、C、D 也是复合事件。在例一中，$E_1=\{(A,B),(B,A)\}$，$E_2=\{(A,A),(A,B),(B,A)\}$，所以 E_1,E_2 是复合事件，而 $E_3=\{(A,A)\}$，所以 E_3 是基本事件，或者说是一个可能的试验结果。

1·2 频率与概率

随机事件是可能发生也可能不发生的事件，但对某一特定的随机试验来说，它的随机事件发生的可能性是有大小之分的。例如在例 1 中可想像 4 个基本事件 (A,A)，(A,B)，(B,A)，(B,B) 发生的可能性应相等，而例 2 中 B 发生的可能性要比 A 大。问题是如何严格地对随机事件发生的可能性大小给予数值表示。历史上有人就上抛一枚硬币做过试验，例 1 中上抛 两次作为一次试验，这里上抛一次作为一次试验，因此这里可能出现的试验结果只有两个："国徽面出现"，"币值面出现"。现将他们的试验情况列入表 1-1。

表 1-1

试验人	试验次数 n	"国徽面出现"发生次数 k	"国徽面出现"发生频率 $=\frac{k}{n}$
德·摩尔根	2048	1061	0.518
蒲　丰	4040	2048	0.507
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005

从表上可以看出，虽然在一次试验中，"国徽面出现"这个事件的发生是偶然的，但在大量重复试验中，它的频率 k/n 却有明显的稳定性，即当试验次数 n 充分大时，频率 k/n 接近 0.5，即大约发生 $n/2$ 次。

再看一个例子。有人对正常运转的机床生产出的大批产品进行检查，每次从其中抽取一件，检查后放回，令 A 表"抽到正品"，经过七轮抽查，其情况如表 1-2 所示。

表 1-2

检查轮次	一	二	三	四	五	六	七
检验次数 n	50	100	200	400	600	800	1000
A 发生次数 k	35	87	171	361	549	725	913
A 的频率 $=\frac{k}{n}$	0.7	0.87	0.855	0.903	0.915	0.906	0.913

同样从表中可以看出，A 的频率明显地在 0.91 上下摆动，如检验次数增大，这种稳定性会更加明显。

在上抛硬币试验中，显然各次试验互不影响；在检查产品时，采取放回抽样方法，当然每次抽取也是互不影响的。如果各次试验互不影响，称各次试验是相互独立地进行的。

上述试验提供了表示随机事件发生可能性大小的方法。令 A 表随机试验 E 的一个随机事件。设随机事件 A 在 E 的 n 次重复独立试验中出现了 k 次，比值 k/n 称为这 n 次试验中事件 A 的频率。一般说来，当 n 充分大时，频率 k/n 便稳定地在某个常数 p 上下摆动，且当 n 愈大时，摆动的幅度常愈小，因此数值 p 就表示了随机事件 A 发生的可能性大小，我们称 p 为随机事件 A 的统计概率，记作 $P(A)=p$。

显然，如果事件 U 是必然事件，则 U 在 n 次试验中发生的次数 $k=n$，因此必然事件的频率总等于 1，从而 $P(U)=1$，即必然事件的概率是 1。如果事件 V 是不可能事件，则必有 $k=0$，从而 $P(V)=0$，即不可能事件的概率是 1。

§2 事件的运算

对于一个随机试验，我们常常考虑的不只是一个事件，而是多个事件。这些事件之间可能存在某种关系。对此应作进一步讨论。

我们把随机试验 E 的所有可能的试验结果(即基本事件)的集合称为 E 的样本空间，以 S 表之。例如 §1 例 2 的样本空间 $S=\{A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6,A_7,A_8,A_9,A_{10}\}$。令 E 表任一随机试验，设 A、B 表 E 的两个随机事件，下图正方形表示样本空间 S，即正方形包含所有 E 的试验结果。图 1-1 及图 1-2 中圆 A、圆 B 分别表示事件 A、事件 B，A、B 都包含了一个或多个基本事件。

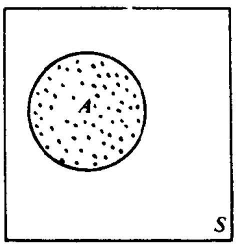

图 1-1

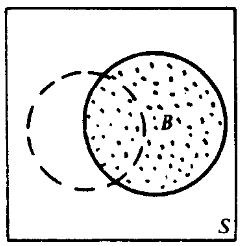

图 1-2

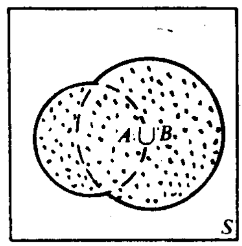

图 1-3

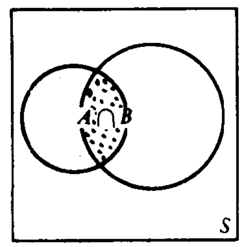

图 1-4

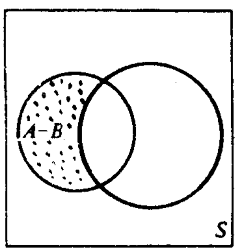

图 1-5

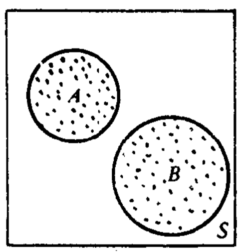

图 1-6

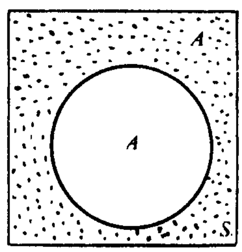

图 1-7

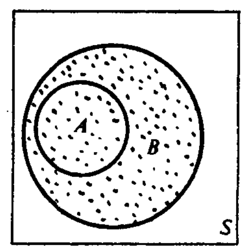

图 1-8

1) 设 A、B 是两个事件，则事件"A 与 B 至少一个发生"称为事件 A 与 B 的并或和，记作 $A\cup B$ 或 $A+B$，图 1-3 含点的部分表示 $A\cup B$，结合 §1 例 2 来说，则 $A\cup B=\{A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6,A_7,A_8,A_{10}\}$。

例 1 有人对目标连射两弹，C 表示"击中目标"，若以 A 表示"第一弹击中"，B 表示"第二弹击中"，则 $C=A\cup B$。

2) 设 A、B 是两个事件，若事件"A 与 B 都发生"，称为事件 A 与 B 的交或积，记作 $A\cap B$ 或 AB，图 1-4 中含点的部分表示 $A\cap B$。结合 §1 例 2 来说，则 $A\cap B=\{A_2,A_4,A_6\}$。

例 2 在一电路(图 1-9)上有两个开关，C 表示"电路接通"，令 A 表示"开关 Ⅰ 接通"，B 表示"开关 Ⅱ 接通"，则 $C=A\cap B$。

3) 设 A、B 是两个事件，则事件"A 发生而 B 不发生"称为事件 A 与 B 的差，记作 $A-B$，图 1-5 中含点部分表示 $A-B$，结合 §1 例 2 来说，$A-B=\{A_8,A_{10}\}$。

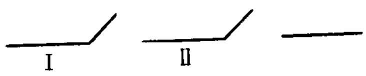

图 1-9

例 3 在例 1 中，若击中了目标，但第一弹未击中，则必第二弹击中，即 C 发生而 A 未发生，因此 $B=C-A$。

4）若事件 A 与 B 不可能同时发生，(即当 A 发生时，B 必不发生；当 B 发生时，A 必不发生)，则称 A 与 B 互斥或互不相容。A 与 B 互斥可表成 $AB=V$，即“A、B 同时发生”为不可能事件，图 1-6 表示 A 与 B 互斥。结合 § 1 例 2 来说，A 与 C 互斥；A 与 D 互斥。

例 4 在例 1 中，若以 D 表“未击中目标”，则 $CD=V$，$AD=V$，$BD=V$。

5）设 A 是一个事件，则事件“A 不发生”称为 A 的对立事件，记作 $\overline{A}$，图 1-7 含点部分表示 $\overline{A}$。结合 § 1 例 2 来说，$\overline{A}=C$ 或 $\overline{C}=A$。

例 5 例 1 中 C=“击中目标”与 D=“未击中目标”是互为对立事件，$\overline{C}=D$，$\overline{D}=C$。

当 A 与 B 互为对立事件时，则有

$$AB=V \text{ 及 } A\cup B=U$$

6）若事件 A 发生必引起事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A 或称 A 导致 B，记作 $B\supset A$ 或 $A\subset B$，图 1-8 表示 $B\subset A$。

例 6 在例 1 中 A=“第一弹击中”导致 C=“击中目标”，因此 $A\subset C$；同样，$B\subset C$。

7）若事件 A 导致事件 B，B 也导致事件 A，则称 A 与 B 相等，记作 $A=B$。

例 7 从一批产品中抽取两件，令 A=“至少抽到一件次品”，B=“抽到次品”，则 $A\subset B$，而且 $B\subset A$，因此 $A=B$。

例 8 设 A、B、C 表示三个随机事件，试用 A、B、C 的运算关系表示下列事件：

1）三个事件都不发生；

2）不多于一个事件发生：

3）三个事件中至少有两个发生。

解 1）“三个事件都不发生”$=\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}$ 或 $\overline{A\cup B\cup C}$；

2）“不多于一个事件发生”$=\overline{A}\,\overline{B}C\cup\overline{A}B\overline{C}\cup A\overline{C}\,\overline{B}\cup\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$；

3）“三个事件中至少有两个发生”$=AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC\cup ABC$。

习　　题

1. 写出下列随机试验的样本空间：

1）上抛三枚硬币，以 A=“国徽面出现”，B=“币值面出现”；

2）对一批产品进行检查，合格的记0，不合格的记1。如果连续查出两个次品就停止检查，或检查4个产品就停止检查，(提示：例如0101便是一个试验结果)。

2. 设 A、B、C 为三个随机事件，试用 A、B、C 的运算关系表示下列事件：

1）A 发生，B 与 C 不发生；

2）A 与 B 都发生，而 C 不发生；

3）A、B、C 都发生；

4）A、B、C 中至少有一个发生；

5) A、B、C 中不多于两个发生。

3. 用作图方法说明下列等式：

1) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\ \overline{B}$；

2) $A-B=A\overline{B}$；

3) $\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$。

§3 古典概率

在§1例2中，将十张卡片任意叠放在一起，随便抽取一张，事件 A_1、A_2、…、A_{10} 发生的可能性是相等的，每个 $A_i(i=1,2,\cdots,10)$ 发生的可能性大小都是$\frac{1}{10}$，现在问 $A=$"抽到偶数"发生的可能性有多大?因为 A 是由 A_2、A_4，A_6，A_8，A_{10} 组成，这五个事件有一个发生 A 即发生，显然 A 发生的可能性应是$\frac{5}{10}$，分母是试验的基本事件总数，分子是组成复合事件 A 的基本事件个数。用这种方法计算随机事件的可能性的大小与统计概率是一致的。事实上，如果把§1 例 2 中的随机试验重复做 n 次，记录 A 发生的次数 k，当 n 充分大时，$\frac{k}{n}$ 必定围绕$\frac{5}{10}$上下摆动，即$\frac{5}{10}$是事件 A 的统计概率。现将上述计算概率的方法总结如下。

古典概率定义　设随机试验 E 只有 n 个基本事件，每个基本事件发生的可能性都相等，每进行一次试验发生且只发生一个基本事件。如果随机事件 A 由 m 个基本事件组成，则规定事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{\text{组成}\,A\,\text{的基本事件个数}}{\text{基本事件的总数}}=\frac{m}{n} \tag{1-1}$$

这样定义的概率称为古典概率。"组成 A 的基本事件个数"有时也称为"有利于 A 的基本事件个数"。

应用式(1-1)时，应注意基本事件 A_1、A_2、…A_n 必须具备下列三个性质：

1) 事件 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 是必然事件(完备性)；

2) 任意两 A_i、$A_j(i\neq j)$ 是互斥的(不相容性)；

3) 每个 A_i 发生的可能性相等(等可能性)。

例1　袋内有4个红球3个白球，从中一次取两个球，求取出的两个球都是白球的概率。

解　一次取两个球的搭配方法不考虑次序，因此基本事件总数 $n=C_7^2=21$。显然每种搭配被取到的可能性相等。令 $A=$"取得两个白球"，取得两个白球的方法数为 $C_3^2=3$ 种，即事件 A 包含3个基本事件。所以

$$P(A)=\frac{3}{21}=\frac{1}{7}$$

例2　把一部五册的书随意地放到书架上，求 册数恰为1、2、3、4、5顺序的概率。

解　五册书放在一起共有 $P_5=5!=120$ 种放法，自左至右或自右至左恰为1、2、3、4、5的顺序只有两种，令 A 表示"册数恰为1、2、3、4、5顺序"，则

反
1

$$P(A)=\frac{2}{120}=\frac{1}{60}$$

例3　仓库有白漆10桶、黑漆4桶、红漆3桶。由于标签脱落，求从仓库中任取9桶，其中有4

桶白漆、3桶黑漆和2桶红漆的概率。

解 仓库共有17桶漆，从中任取9桶，共有 $C_{17}^9=24310$ 种取法，每种取法的可能性都相等。利用乘法法则，可算得9桶中恰有4桶白漆、3桶黑漆和2桶红漆的取法有 $C_{10}^4\times C_4^3\times C_3^2=2520$ 种，令 A 表示待求概率的事件，则

$$P(A)=\frac{C_{10}^4\times C_4^3\times C_3^2}{C_{17}^9}=\frac{2520}{24310}\approx 0.104$$

例4 图书馆的藏书编号是用从00001开始的五个数字组成，现任意从藏书中抽取一本，问书号是由五个均不相同 的数字编成的概率是多少？

解 按题意，基本事件总数就是在十个数字中任意取五个容许重复的排列种数减1(没有00000这个书号)，即 $n=10^5-1=99999$。令 $A=$“由五个不同数编成的书号”，因而有利于 A 的基本事件个数为 $P_{10}^5=10\times 9\times 8\times 7\times 6$，所以

$$P(A)=\frac{P_{10}^5}{10^5-1}=\frac{30240}{99999}\approx 0.302$$

例5 设有一批产品共100件，其中有5件次品，现在从中任取50件，求未取到次品的概率。

解 从100件产品中任取50件，共有 C_{100}^{50} 种取法，每种取法为一基本事件。令 A 表示“取出的 50 件中没有次品”，因此所取的 50 件是从 95 件正品中取出的，A 包含 C_{95}^{50} 个基本事件，所以

$$\begin{aligned}P(A)&=\frac{C_{95}^{50}}{C_{100}^{50}}=\frac{95!/50!\,45!}{100!/50!\,50!}=\frac{95!\,50!}{100!\,45!}\\&=\frac{95!\times(50\times 49\times 48\times 47\times 46)\times 45!}{(100\times 99\times 98\times 97\times 96)\times 95!\times 45!}\\&=\frac{50\times 49\times 48\times 47\times 46}{100\times 99\times 98\times 97\times 96}\\&=\frac{2162}{76824}\approx 0.028\end{aligned}$$

例6 设有 N 件产品，其中有 M 件次品，从 N 件中任意抽取 n 件，求抽取的 n 件中有 m $(m\leqslant M)$ 件次品的概率。

解 在 N 件产品中抽取 n 件，有 C_N^n 种取法，每一种取法是一个基本事件。现在求抽取的 n 件中有 m 件次品的取法有多少种。在 M 件次品中取出 m 件的取法有 C_M^m 种，在 $N-M$ 件正品中取 $n-m$ 件的取法有 C_{N-M}^{n-m} 种，搭配起来便得在 N 件产品中抽取 n 件，其中恰有 m 件次品，取法种数利用乘法法则，则得 $C_M^m\cdot C_{N-M}^{n-m}$ 种，故所求事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{C_M^m\cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n} \tag{1-2}$$

在例5中，求取出的50件产品中恰有两件次品的概率，按式(1-2)得

$$P(A)=\frac{C_5^2\cdot C_{95}^{48}}{C_{100}^{50}}\approx 0.32$$

习　　题

1. 袋内装有5个白球3个黑求，求1)从中任意取一个恰为白球的概率；2) 从中任取两个

都是白球的概率。

2. 电话号码由五个数字组成，每个数字可以是0、1、…、9中的任一数，求电话号码是由完全不相同的数字组成的概率。

3. 把十本书任意地放在书架上，求其中指定的三本书放在一起的概率。

4. 有n本书已编上号码1、2、3、…、n，按任意方法放到书架上，若n为奇数，试求各册书排成“1□3□5□…□n”形式的概率，其中□处是任意其它号码的书。

5. 设100只晶体管中有5只废品，现从中抽取15只，求其中恰有2只废品的概率。

6. 设袋中有a只黑球、b只白球，采用不放回抽样方式从中摸出n只球，求其中恰好有k只黑球的概率。

7. 把20个球队分成两组(每组10队)进行比赛，求最强的两队被分在不同组内的概率。

8. 有五条线段，其长度相应地为1、3、5、7、9个单位，求从这五条线段中任意取出三条能构成三角形的概率。

9. 把1、2、3、4、5诸数字各写在一张卡片上，任取三张排成自左向右的次序，求所得数是偶数的概率。

10. 袋中装有n只白球、n只黑球、n只红球，从袋中任取m只球，求其中白、黑、红球分别有m_1、m_2、m_3($m_1+m_2+m_3=m$)只的概率。

§4 概率的性质

在§1与§3中讲了概率的概念，现在讲概率的性质。

性质1 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$

由古典概率定义容易说明这个性质，因为事件A所包含的基本事件m受不等式$0\leqslant m\leqslant n$限制，故有$0\leqslant m/n\leqslant 1$，即$0\leqslant P(A)\leqslant 1$。

性质2 在n个事件A_1、A_2、…，A_n中，若任意两个事件均互不相容，即$A_iA_j=V(i\neq j)$，则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)\qquad(1\text{-}3)$$

或简写成

$$P(\sum_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$$

现在就$n=2$的情况，用古典概率说明式(1-3)成立。设基本事件全体为E_1、E_2、…、E_N，A_1、A_2各包含m_1、m_2个基本事件，因为假定A_1、A_2互不相容，有利于A_1的m_1个基本事件与有利于A_2的m_2个基本事件均不相同，所以$A_1\cup A_2$包含的基本事件个数为m_1+m_2，故有

$$P(A_1\cup A_2)=\frac{m_1+m_2}{N}=\frac{m_1}{N}+\frac{m_2}{N}=P(A_1)+P(A_2)$$

例1 设有20件产品，其中有16件是正品，4件是次品，今从中任取3件，求至少有一件是正品的概率。

解 令A表示“至少有一件是正品”，A_i表示“恰有i个正品”，$i=1$、2、3，则$A=A_1\cup A_2\cup A_3$。显然A_1、A_2、A_3两两互斥，故由式(1-3)、式(1-2)即得所求概率为

$$P(A)=P(A_1\cup A_2\cup A_3)$$

$$= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$$

$$= \frac{C_4^2 C_{16}^1}{C_{20}^3} + \frac{C_4^1 C_{16}^2}{C_{20}^3} + \frac{C_{16}^3}{C_{20}^3} \approx 0.9965$$

性质3　$P(\overline{A})=1-P(A)$　　(1-4)

证明　在§2的5)中已讲过事件 A 与其对立事件 $\overline{A}$有如下关系

$$A \cup \overline{A} = U, A\overline{A} = V$$

再由式(1-3)得

$$P(U) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$$

已知 $P(U)=1$,故有

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1, \text{即 } P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

例2　在例1中,$\overline{A}$表示"取出的三件产品均为次品",于是

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{C_4^3}{C_{20}^3} \approx 1 - 0.0035 = 0.9965$$

例3　某校有学生300人,求至少有一个人的生日在5月1日的概率。

解　A 表示"至少有一个人的生日在5月1日"。300人在365天的生日排法有 $(365)^{300}$ 种,即基本事件总数是$(365)^{300}$。直接计算有多少个基本事件有利于 A 比较麻烦,但容易算出有利于 $\overline{A}$的基本事件有$(364)^{300}$ 个,从而得

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - (\frac{364}{365})^{300} \approx 0.561$$

性质4　若 $A \supset B$,则 $P(A-B)=P(A)-P(B)$　　(1-5)

证明　如图1-10所示,大圆表事件 A,小圆表事件 B,含点部分表 $A-B$,则 $A=(A-B)\cup B$,且$(A-B)\cup B=V$,故有 $P(A)=P(A-B)+P(B)$,即 $P(A-B)=P(A)-P(B)$。

推论　若 $A \supset B$,则 $P(A) \geqslant P(B)$

性质5　$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$　　(1-6)

证明　由图1-11可知

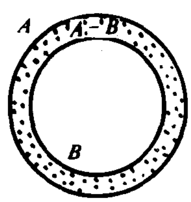

图1-10

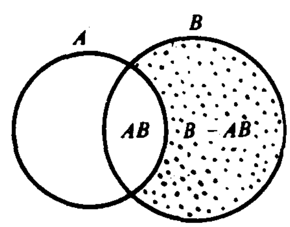

图1-11

$$A \cup B = A \cup (B - AB), \text{且 } A \cap (B - AB) = V$$

$$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B - AB)$$

由于 $B \supset AB$,

$$P(B - AB) = P(B) - P(AB)$$

从而得

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

推论1 $P(A\cup B)\leqslant P(A)+P(B)$

推论2 $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)$
$-P(BC)-P(AC)+P(ABC)$

例4 设 A、B 分别表示甲、乙两地六月份出现“雨天”事件，根据以往天气记录和 $P(A)=0.5$，$P(B)=0.4$，$P(AB)=0.28$，求 $C=$“六月份两地均无雨”的概率。

解 至少一地有雨天的事件为 $A\cup B$，故

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.5+0.4-0.28=0.62$$

$$\therefore P(C)=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=0.38$$

习　题

1. 36件产品中有4件次品，其余均为正品，现从中任意抽取3件，求至少抽到一件次品的概率。

2. 100件产品中有5件废品，任意取出50件进行检验，如果抽出的产品中的废品不多于1件，则该批产品被接收，求产品被接收的概率。

3. 设 A、B、C 是三个事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$，$P(AB)=P(CB)=0$，$P(AC)=\frac{1}{8}$，求 A、B、C 至少有一个发生的概率。

§5　条件概率与事件的独立性

直到现在所讨论的概率 $P(A)$，都是指在某确定的条件组 E 实现(即进行一次随机试验)之下而言，别无其它限制。但是实际问题中有许多问题，除了条件组 E 之外，还要提出另外的附加限制条件，往往需要求“在事件 A 已经发生的前提下”事件 B 发生的概率，这就是条件概率问题。

先看一个例子。

例1 甲、乙两车间生产同一种产品，某日它们各生产 n_1、n_2 件，其中废品分别为 m_1、m_2 件。假定将这些产品均匀地混合存放在一起，任意从中抽取一件检查。

1) 令 A 表示“抽到甲车间产品”，求 $P(A)$。

2) 令 B 表示“抽到废品”，求 $P(AB)$。

3) 已知抽到甲车间产品，求这件产品是废品的概率，即求“在已知 A 发生的条件下，求 B 发生”的概率，记作 $P(B|A)$。

解 1) $P(A)=\frac{n_1}{n_1+n_2}$

2) $P(AB)=\frac{m_1}{n_1+n_2}$

3) $P(B|A)=\frac{m_1}{n_1}$

显然，$P(B|A)$可用$P(A)$与$P(AB)$表示

$$P(B|A)=\frac{m_1}{n_1}=\frac{m_1/(n_1+n_2)}{n_1(n_1+n_2)}=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

定义1　A、B是随机试验E的两个随机事件，设$P(A)>0$，在事件A已发生的条件下，事件B发生的条件概率定义为

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)} \tag{1-7}$$

于是

$$P(AB)=P(A)P(B|A) \tag{1-8}$$

例2　袋中装有5个白球和3个红球，求从袋中依次取出两个白球的概率(取出不放回)。

解　令A表示“取出两个白球”，A_1表示“第一次取出白球”，A_2表示“第二次取出白球”。$A=A_1A_2$，按式(1-8)计算，得

$$P(A)=P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)=\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}=\frac{20}{56}\approx 0.36$$

定义2　如果两个事件A与B满足条件

$$P(AB)=P(A)P(B) \tag{1-9}$$

则称A与B为相互独立事件。

定理1　设$P(A)>0$(或$P(B)>0$)，则事件A与B相互独立的充要条件为$P(B|A)=P(B)$或$P(A|B)=P(A)$。

证明　充分性(充分性是证明：若$P(B|A)=P(B)$，则A与B相互独立)。

因为$P(A)>0$，由式(1-8)，$P(AB)=P(A)P(B|A)$，但已知$P(B|A)=P(B)$，故有$P(AB)=P(A)P(B)$，由定义，A与B相互独立。

必要性(必要性是证明：若A与B相互独立，则$P(B|A)=P(B)$)。

根据假定，A与B相互独立，则$P(AB)=P(A)P(B)$，由式(1-8)知，$P(AB)=P(A)P(B|A)$，故有

$$P(A)P(B)=P(A)P(B|A),P(A)>0$$
$$\therefore P(B|A)=P(B)$$

推论　若事件A与B相互独立，则每对事件$A,\overline{B}$;$\overline{A},B$;$\overline{A}\overline{B}$均相互独立(证明从略)。

例3　甲、乙两射手彼此独立地射击同一目标，令A表示“甲射中”，B表示“乙射中”。设$P(A)=0.9$，$P(B)=0.8$，求目标被射中的概率。

解法1　令C表示“目标被击中”

$$\begin{aligned}P(C)=P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(AB)\\&=P(A)+P(B)-P(A)P(B)\\&=0.9+0.8-0.9\times 0.8\\&=0.98\end{aligned}$$

解法2

$$\begin{aligned}P(C)=P(A\cup B)&=1-P(\overline{A\cup B})\\&=1-P(\overline{A}\,\overline{B})(\text{已知}\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B})\end{aligned}$$

由于A、B相互独立，则它们的对立事件$\overline{A}$、$\overline{B}$也相互独立，故

$$P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})$$