理论电磁学

刘承方

LILUN DIANCIXUE

天津科学技术出版社

理论电磁学

刘成芳

天津科学技术出版社

津新登字(90)003号

责任编辑:张炳祥

理论电磁学

刘成芳

*

天津科学技术出版社出版

天津市张自忠路189号　邮编300020

天津市蓟县印刷厂印刷

新华书店天津发行所发行

*

开本787×1092毫米　1/32　印张8.5　字数193 000

1995年9月第1版

1995年9月第1次印刷

印数:1—1 690

ISBN　7-5308-1301-3

O·63　定价:8.90元

前　　言

理论电磁学主要是讨论电磁学的基本理论和相对论。用场的观点来讨论电、磁理论是本书的一个特点。编著者结合教学实践对电磁场理论作了一点探索，也取得一定的成果。如麦克斯韦方程的建立、边界条件的推导、预言磁荷的存在、菲涅耳公式的负号、磁矢势的物理意义、从速度来看相对论等。

本书共分五章。第一章，电磁现象的普遍规律，主要讨论各种场的基本性质和麦克斯韦方程。第二章，静电场和稳恒磁场的计算，是麦克斯韦方程应用于$\frac{\partial}{\partial t}(\quad)=0$的情况，这时$\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{B}$是可分的，主要讨论了几种计算电标势$\varphi$的方法。第三章，电磁波传播，是麦克斯韦方程应用于$\frac{\partial}{\partial t}(\quad)\neq 0$的情况，这时$\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{B}$不可分，相互激发形成电磁场，以电磁波的方式在空中传播；讨论了电磁波在界面和各种不同介质中的传播。第四章，电磁波辐射，是麦克斯韦方程应用于$\frac{\partial}{\partial t}(\quad)\neq 0$时的有源空间，主要讨论电、磁偶极子及细长天线的辐射问题。第五章，相对论，较系统地讨论了狭义相对论，也对广义相对论的主要内容作了介绍。

另外有附录。附录一，矢量运算和场论，对矢量的基本运算和场的基本概念作了简要介绍。附录二，习题，包括各章的习题。

内容提要

本书讨论的是电磁学基本理论。编著者用场的观点系统地讨论了电磁场的基本理论和相对论。全书分五章：电磁现象的普遍规律、静电场和稳恒磁场的计算、电磁波的传播、电磁波的辐射、相对论。

本书可作为理、工科院校有关专业高年级学生和研究生的教材，也可供对电磁学理论和相对论有兴趣的专业人员参考。

目　录

第一章 电磁现象的普遍规律

本章从宏观电磁现象中的几个实验定律出发，用场的观点讨论各种场的基本性质，进而推导出描述电磁现象普遍规律的麦克斯韦方程，并对麦克斯韦方程进行讨论。

§1·1 电磁场的基本性质

一、静电场的基本性质

1. 库仑定律　1785 年，库仑用实验确定了真空中静止的点电荷间作用力的规律——库仑定律。在国际单位制下库仑定律的数学表达式为

$$\boldsymbol{F}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\quad\frac{QQ'}{r^3}\boldsymbol{r} \tag{1.1.1}$$

库仑定律成立的条件是真空、静止、点电荷，因此，必须作合理的外推：

(1) 真空 → 空气 → 介质，只须对介电常数相应地作 $\varepsilon_o\approx\varepsilon_o\to\varepsilon$ 。

(2) 点电荷是一个相对性的概念，因此，$r\not\to 0$。当 $r\to 0$ 时点电荷概念已不成立，所以库仑定律也不成立。对于带电体，总可以看成许多点电荷元之和，即 $Q=\int\mathrm{d}Q=\int_v\rho\mathrm{d}v$ 。

(3)理论表明，只要带电体的运动速度 $v\ll c$ 时，库仑定律仍成立。

合理外推后的库仑定律为

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_v\int_{v'}\frac{\rho\rho' \mathrm{d}v\mathrm{d}v'}{r^3}\boldsymbol{r} \tag{1.1.2}$$

在上述外推的情况下，库仑定律的正确性已为由它推出的结论被证实而得到证明。

2. 静电场的基本性质

(1)静电场　库仑定律说明的是电荷间的作用力的大小和方向问题，但没有回答这力是如何传递的。

1831 年，法拉第提出电场的概念：电荷周围存在着一种特殊的物质，称为电场，电场是一种特殊的物质，是电力的传递者，电场虽然看不见、摸不着，但能用实验的手段揭示出它的客观存在：电荷在电场中要受力而运动；运动时电场要对电荷作功。将看到：电磁场有能量、动量和质量。这些都是场的物质性的具体表现。

电场强度：设有多个点电荷 Q_i 施力作用在点电荷 Q' 上时，如图 1-1 所示：

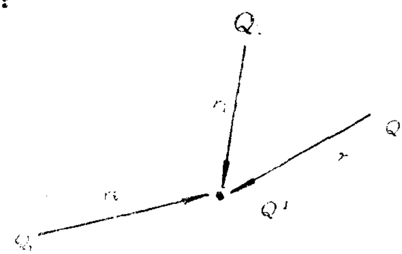

图 1-1

按照力的迭加原理有

$$\boldsymbol{F} = \sum_i \boldsymbol{F}_i = (\sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_i}{r_i^3}\boldsymbol{r})Q' = Q'\sum_i \boldsymbol{E}_i = Q'\boldsymbol{E}$$

这里有

$$\boldsymbol{E}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_i}{r_i^3}\boldsymbol{r}$$

$$\boldsymbol{E} = \sum \boldsymbol{E}_i \tag{1.1.3}$$

$$
\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{F} &= Q'\boldsymbol{E} \\
\text{或}\qquad \boldsymbol{E} &= \frac{\boldsymbol{F}}{Q'}
\end{aligned}\right\} \tag{1.1.4}
$$

① $\boldsymbol{E}$ 称为电场强度。是描述电场强、弱的物理量，其值 $\propto \frac{Q}{\varepsilon r^2}$；方向是与 Q 的正负有关。将看到：Q 是正时，$\boldsymbol{E}$ 向外；Q 是负时 $\boldsymbol{E}$ 向内。

② 当 $Q' = +1$ 单位时，$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{E}$。可见，电场强度的物理意义是：电场中某点的电场强度在数值和方向上都等于单位正电荷在该点所受的力。

③$\boldsymbol{E} = \sum_i \boldsymbol{E}_i$，这表明电场强度满足迭加原理。当电荷是连续分布时，由电场的迭加原理即有

$$
\boldsymbol{E} = \int \mathrm{d}\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\mathrm{d}Q}{r^3}\boldsymbol{r}
$$

$$
\mathrm{d}Q = \begin{cases}
\rho \mathrm{d}v \rightarrow \rho = \dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}v} & \text{体电荷密度,} \\[2ex]
\sigma \mathrm{d}S \rightarrow \sigma = \dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}S} & \text{面电荷密度,} \\[2ex]
\lambda \mathrm{d}L \rightarrow \lambda = \dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}L} & \text{线电荷密度,}
\end{cases}
$$

当电荷密度 $\rho(x')$ 连续分布在体积 V 内时，如图 1-2 所示：

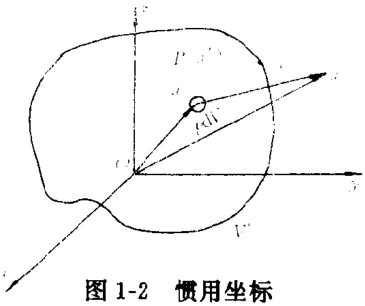

图 1-2 惯用坐标

按惯例表示，图 1-2 中的 x' 表示空间坐标(x',y',z')；

同样，x 表示(x,y,z)。

因此有

$$\boldsymbol{E}(x)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_v\frac{\rho(x')}{r^3}\boldsymbol{r}\mathrm{d}v \tag{1.1.5}$$

由此可见，静电场是由静电荷所激发的。所以在电荷的周围就存在着电场。这就是法拉弟引入场概念的依据。

(2)静电场的散度、高斯定理　因为 $\boldsymbol{E}(x)$ 是矢量场，我们知道，其基本性质是由其散度和旋度来定的。因此，首先看其散度的情况。我们知道，矢场的散度是与通量相联系着。现来看静电场的通量：

$$\oint_s\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\oint_s\frac{\mathrm{d}s\cos\theta}{r^2}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\oint_s\frac{\mathrm{d}s_\perp}{r^2}$$

$$=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\oint_s\mathrm{d}\Omega=\frac{Q}{\varepsilon_0}=\int_v\frac{\rho}{\varepsilon_0}\mathrm{d}v$$

所以

$$\oint_s\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\int_v\frac{\rho}{\varepsilon_0}\mathrm{d}v=\frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{1.1.6}$$

这就是电磁学中的高斯定理(积分形式)。再利用矢量运算中的高斯定理，则有

$$\oint_s\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\int_s(\nabla.\boldsymbol{E})\mathrm{d}v=\int_v\frac{\rho}{\varepsilon_0}\mathrm{d}v$$

所以

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{1.1.7}$$

这就是高斯定理的微分形式。

① $\oint_s\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\int_s\frac{\rho}{\varepsilon_0}\mathrm{d}v=\frac{\sum_i Q_i}{\varepsilon_0}$

穿过闭合曲面S的电通量只与S曲面包围在内的电量的代数和有关，与S曲面外的电量无关。

② $\Phi_e=\oint_s\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\frac{Q}{\varepsilon_0}$

若 Q 是正，则 $\Phi_e>0$，要求$(\boldsymbol{E}\overset{\wedge}{\cdot}\boldsymbol{n})<\pi/2$，则正 Q 的 $\boldsymbol{E}$ 向外；

若Q是负，则$\Phi_e < 0$，要求$(\boldsymbol{E}\hat{,}\ \boldsymbol{n}) > \pi/2$，则负$Q$的$\boldsymbol{E}$向内；当$Q = 0$时

$$\oint_{s=s_1+s_2} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0$$

$$\int_{s} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\int_{s_2} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

这表明$Q = 0$时，$\Phi_e = 0(\boldsymbol{E} \neq 0)$，即表示进入$V$的通量等于流出去的通量。由此结论：电场的场源头是电荷，电场是由正电荷发出，会聚于负电荷处。

③ $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$

这表明静电场的场源是电荷。在$\rho = 0$处，$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$；在$\rho \neq 0$处，$\nabla \cdot \boldsymbol{E} \neq 0$。这就是静电场散度的局域性。

(3) 静电场的旋度　矢场的旋度与它的环量有关，因此来看静电场的环量：

$$\oint_{v} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \oint_{L} \frac{\boldsymbol{r} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L}}{r^3} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \oint_{L} \frac{\mathrm{d}L\cos\theta}{r^2}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \oint_{L} \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0} \oint_{L} \mathrm{d}\left(\frac{1}{r}\right) = 0$$

所以
$$\oint_{L} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{L} = 0 \tag{1.1.8}$$

静电场的环量为0，利用斯托克斯定理，上式即有

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0 \tag{1.1.9}$$

静电场的旋度为0。

(4)静电场的基本性质　我们知道，任何一个矢场的基本性质是由它的散度、旋度来定的，因此，静电场的基本性质也是由它的散度、旋度来定。

$$\left.\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{E}&=\frac{\rho}{\varepsilon_0}\\ \nabla\times\boldsymbol{E}&=0\end{aligned}\right\}\longrightarrow\left.\begin{aligned}\oint_s\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}&=\int_V\frac{\rho}{\varepsilon_0}\mathrm{d}v\\ \oint_L\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}&=0\end{aligned}\right\}$$

①因 $\nabla\cdot\boldsymbol{E}\neq0,\nabla\times\boldsymbol{E}=0$，故静电场是有散无旋场，是纵场，正如 $\boldsymbol{E}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0r^3}\boldsymbol{r}$ 所示。

② $\oint_L\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}=\frac{1}{Q'}\oint_L\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}=0$，静电场作功与路径无关，是势场。因 $\nabla\times\boldsymbol{E}=0$，故 $\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi$，$\varphi$就是电标势。

③ $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$，这表明静电场是有源头场，场的源头起于正电荷，会聚于负电荷处。这同时表明，静电场的场源是静电荷。

④ $\oint_S E\mathrm{d}L=\int_V\frac{\rho}{\varepsilon_0}\mathrm{d}V$，当带电体电荷分布具有球对称、轴对称、面对称时，用高斯定理来计算 $\boldsymbol{E}$ 是方便的，是计算 $\boldsymbol{E}$ 的重要方法之一。

二、稳恒磁场的基本性质

电学、磁学都是古老的学科，特别是古磁学在我国的研究，真可谓“历史悠久，成果伟大”。我国古代的四大发明之一的指南针就是一例。但电学、磁学真正成为一门科学还是比较晚的，而磁学又较电学为晚。磁学研究较晚的原因有二：

第一，自由磁荷至今尚未找着，不便用磁荷来作实验。

第二，磁场是个轴矢量，不太直观。

直到 1819 年，奥斯特发现电流的磁效应后，人们开始用电流来研究磁现象。随后，安培定律、毕奥—萨伐尔定律、法拉弟定律等相继出现，使磁学研究真正成为一门科学。

1. 电荷守恒定律

(1)电流密度矢量 $\boldsymbol{j}$　我们知道，电流强度 $I=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$ 不足以

用来描述导体横截面上各处电流的分布和方向，为此要引入电流密度矢量 $\boldsymbol{j}$ 的概念。

①$\boldsymbol{j}$ 的定义：

$$\boldsymbol{j} = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}S_{\perp}}\boldsymbol{E}_0 = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}S\cos\theta}\boldsymbol{E}_0 \tag{1.1.10}$$

这里 $\boldsymbol{E}_0$ 表示电场强度的单位矢量；θ 是 $\boldsymbol{E}$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 的夹角。显然，$\boldsymbol{j}$ 的方向是该点电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的方向；$\boldsymbol{j}$ 的大小是垂直流过单位截面积的电流强度。

② 几个关系式　为了后面用起来方便，由 $\boldsymbol{j}$ 的定义式(1.1.10)便能写出如下的关系式：

$$\left.\begin{aligned} I &= \int_S \boldsymbol{j}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} \\ \boldsymbol{j} &= \rho \boldsymbol{v} \\ I\mathrm{d}\boldsymbol{L} &= \boldsymbol{j}\mathrm{d}v \end{aligned}\right\} \tag{1.1.11}$$

(2)电荷守恒定律　电荷守恒定律通常的说法是电荷既不能被创造，也不能被消灭，只可能由一个物体转移到另一个物体上去。即任何物理过程中，这个系统的总电荷保持不变。电荷守恒定律是电磁学最基本的定律，也是自然界中最普遍的定律。

电荷守恒定律的数学表达式：设 S 包围的体积 V 内有运动电荷(ρ,$\boldsymbol{v}$)，如图1-3所示：

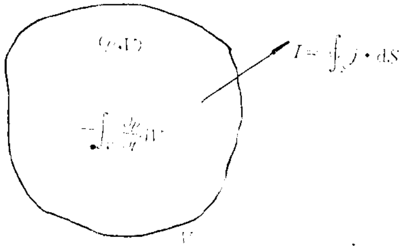

图1-3

单位时间由 S 面跑出来的电荷 $I = \oint_S \boldsymbol{j}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$，一定会引起单位时间体积 V 的电荷的减少，即

$$-\int_v \frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}v$$

根据电荷守恒定律，应有

$$\oint_S \boldsymbol{j}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\int_v \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}v \tag{1.1.12}$$

这就是电荷守恒定律的数学表达式。

①电荷守恒定律的微分形式为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \tag{1.1.13}$$

这正是我们熟悉的连续性方程。

②对于稳恒情况时，$\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$

所以 $$\nabla\cdot\boldsymbol{j} = 0 \tag{1.1.14}$$

反过来，若 $\nabla\cdot\boldsymbol{j} = 0$ 时，则有 $\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$，即是稳恒情况。因此，把(1.1.14)称为稳恒条件。

③ 当 $S\to\infty$，或 S 包围整个系统时，没有电流流到外面去了，所以 $\oint_{S\to\infty}\boldsymbol{j}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0$，因此有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_v \rho\,\mathrm{d}v = \frac{\partial}{\partial t}Q = 0$$

所以 $Q = C$

这表明全系统的总电荷保持不变，即上述的电荷守恒定律。

2. 安培定律　1820年，安培用实验发现电流线之间的磁作用力的规律，在国际单位制下的数学式为

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_L\oint_{L'}\frac{I'\mathrm{d}\boldsymbol{L}'\times(I\mathrm{d}\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{r})}{r^3} \tag{1.1.15}$$

这就是安培定律。这力称为安培力，就是磁力。磁场就是这力的传递者。

1822年，安培创磁分子电流学说，认为电流是产生一切磁现象的原因。

3. 毕奥—萨伐尔定律　1820 年，从实验中毕奥—萨伐尔发现电流与磁场的关系：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{B}(x) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_L \frac{I\mathrm{d}\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{r}}{r^3} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\boldsymbol{j}(x')\times\boldsymbol{r}}{r^3}\mathrm{d}v \qquad (1.1.16)
\end{aligned}
$$

这就是毕奥—萨伐尔定律。

(1) $\boldsymbol{B}(x)$—— 叫磁感应强度。$|\boldsymbol{B}| \propto \frac{I\mathrm{d}L}{r^2}\mu$，方向是在 $I\mathrm{d}\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{r}$ 的方向，是一个轴矢量。

(2)毕奥—萨伐尔定律表明，磁场的场源是稳恒电流。

(3)安培定律可写成

$$
\boldsymbol{F} = \oint_{L'} I'\mathrm{d}\boldsymbol{L}'\times\boldsymbol{B} \qquad (1.1.17)
$$

这表明安培力是磁力，磁场是力的传递者。

(4)运动电荷 $(\rho,\boldsymbol{v})$ 在磁场受力为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F} &= \oint_L I\mathrm{d}\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{B} = \int_V \boldsymbol{j}\mathrm{d}v\times\boldsymbol{B} \\
&= \int_v \rho\,\mathrm{d}v\,\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} = q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} \qquad (1.1.18)
\end{aligned}
$$

4. 稳恒磁场的基本性质　因为 $\boldsymbol{B}$ 是矢场，其性质是由它的散度、旋度来定的。

(1) 磁场的旋度、安培环路定理

① 在稳恒条件 $\nabla'\cdot\boldsymbol{j}(x')=0$ 下，由毕奥—萨伐尔定律可求得

$$
\left.
\begin{aligned}
&\oint_L \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \mu_0\int_s \boldsymbol{j}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \mu_0 I \\
&\nabla\times\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{j}
\end{aligned}
\right\} \qquad (1.1.19)
$$

这就是安培环路定理。

② 证明　注意：算符 ∇ 是对 x 微分的，与 x' 无关，所以 ∇ 对 $f(x')$ 的微分为 0；同样，∇' 是对 x' 微分的，对 $f(x)$ 的微分为

0。由于

$r=|x-x'|=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$，所以对 r 的函数而言，$\nabla=-\nabla'$；由于散度、旋度的局域性，因此，上述的稳恒条件应写成 $\nabla'\cdot\boldsymbol{j}(x')=0$。按惯例规定，在不发生误会的情况下，则可省写成 $\nabla\cdot\boldsymbol{j}=0$。

$$
\begin{aligned}
a.\ \boldsymbol{B}(x) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\boldsymbol{j}(x')\times\boldsymbol{r}}{r^3}\mathrm{d}v' \\
&= \frac{-\mu_0}{4\pi}\int_V \boldsymbol{j}(x')\times\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}v' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \nabla\left(\frac{1}{r}\right)\times\boldsymbol{j}(x')\mathrm{d}v' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \nabla\times\left(\frac{\boldsymbol{j}(x')}{r}\right)\mathrm{d}v' \\
&= \nabla\times\left[\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\boldsymbol{j}(x')}{r}\mathrm{d}v'\right] \\
&= \nabla\times\boldsymbol{A}(x) \qquad \text{ⓐ}
\end{aligned}
$$

这里 $$\boldsymbol{A}(x)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\boldsymbol{j}(x')}{r}\mathrm{d}v' \qquad (1.1.20)$$

将看到，这就是磁场的磁矢势。

$$
\begin{aligned}
b.\ \nabla\times\boldsymbol{B} &= \nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A}); \\
&= \nabla(\nabla.\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot\boldsymbol{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \nabla\cdot\left(\frac{\boldsymbol{j}(x')}{r}\right)\mathrm{d}v' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \nabla\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\boldsymbol{j}(x')\mathrm{d}v' \\
&= \frac{-\mu_0}{4\pi}\int_V \nabla'\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\boldsymbol{j}(x')\mathrm{d}v' \\
&= \frac{-\mu_0}{4\pi}\int_V \left[\nabla'\cdot\left(\frac{\boldsymbol{j}(x')}{r}\right)-\frac{\nabla'\cdot\boldsymbol{j}(x')}{r}\right]\mathrm{d}v'
\end{aligned}
$$

利用稳恒条件 $\nabla'\cdot\boldsymbol{j}(x')=0$，则有

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{-\mu_0}{4\pi}\int_V \nabla'\cdot\left(\frac{\boldsymbol{j}(x')}{r}\right)\mathrm{d}v'$$