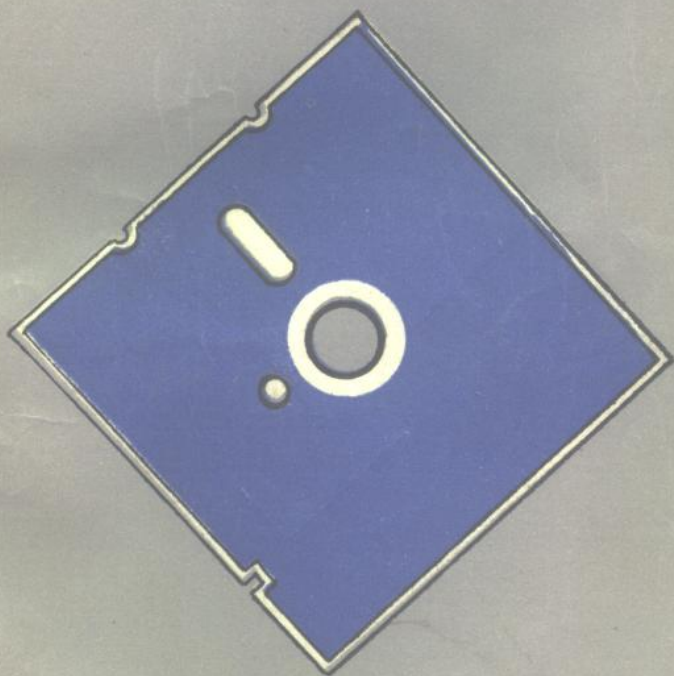


IBM PC

计算机代数系统

MU MATH

徐剑清 李锦涛 编著



百家出版社

IBM PC
计算机代数系统
muMATH

徐剑清 李锦涛 编著

百家出版社

一九八八年·上海

内 容 提 要

本书以国际上应用比较广泛的计算机代数系统 muMATH 为背景,介绍了计算机代数系统的概念、使用方法、写作语言及开发技术等。

全书共分八章。第一章介绍计算机代数的概念及准备知识。第二章至第四章介绍 muMATH 软件的使用方法。第五、六章介绍 muMATH 的写作语言 muSIMP 及其应用实例,内容涉及各类数学问题及人工智能领域的某些方面。第七章介绍符号计算模块的系统分析。第八章介绍上机操作的基本方法及调试程序的各种手段。

本书虽以 IBM-PC 微型计算机为主介绍上机操作方法,但原则上也适用于 APPLE II 微型计算机。

本书既可作为各级各类学校的数学、计算机专业的教科书和参考书,又可作为科研、工程技术人员进行各种数学计算和公式推导的技术手册。

IBM PC 计算机代数系统

徐剑清 李锦涛 编著

上海师范大学出版印刷中心编辑

百家出版社出版

(上海绍兴路5号)

该书由上海发行所发行

江苏大丰县印刷二厂印刷

开本: 850×1168 1/32 印张: 8.25 字数: 229,000

1988年12月第1版 1988年12月第1次印刷

印数: 1—10,000册

ISBN 7-900000-35-6/TP·01

定 价: 3.00 元

前 言

计算机代数, 又名符号计算。它是由数学、计算机软件和人工智能等学科交叉产生的一门新兴学科。计算机代数系统既是计算机代数研究的结晶, 又是进一步研究计算机代数的基础。目前, 国际上比较流行的计算机代数系统有许多种, 它们能进行从初等数学到高等数学的各种公式运算, 并把数值运算作为符号计算的特例。

符号计算的特点是运算结果绝对准确, 即使对数值运算也是如此。

muMATH 是国际上流行的一种计算机代数系统。由于它能在 IBM-PC 及 APPLE I 等微机上运行, 且使用方法极为简单, 因此, 有可能象目前流行的 BASIC 语言那样为人们所接受。

国内对计算机代数系统的研究正在展开。为了进一步普及、推广、研究计算机代数系统, 我们选择 muMATH 作为计算机代数的模型编写本书。其中, 前四章介绍了计算机代数的基本概念及 muMATH 软件的使用方法, 由李锦涛编写; 后四章介绍了 muMATH 的写作语言 muSIMP 及其应用、系统分析和上机操作, 由徐剑清编写。这些内容对学习、研究其它计算机代数系统也有参考意义。

本书内容新颖、通俗易懂, 适合各级各类学校的数学、计算机、人工智能等专业师生阅读, 既可以作为教科书, 也可以作参考书。还可以作为各理、工科师生, 科研人员, 以及工程技术人员进行各种数学计算和公式推导的技术手册。

凡是只对使用 muMATH 软件有兴趣的读者, 可以只读前四章以及第八章的 § 8.1 muMATH 交互使用方式。对编写程序有

兴趣的读者，应该阅读第五、六两章以及第八章的§8.2和§8.3。第七章是专为研究符号计算系统的读者编写的，大多数读者可以略读本章。

编写“计算机代数”的工作是一种尝试，国内尚未见到有同类的文献及书籍。本书虽经作者多次修改，且在试教期间受到学生的欢迎，但限于作者水平，错误缺点一定不少，恳请读者批评指正。

作 者

一九八八年二月

目 录

第一章 绪 言

§ 1.1 什么是计算机代数	1
§ 1.2 计算机代数研究的内容	4
§ 1.3 muMATH 基本概念	10
习题一	14

第二章 初等数学

§ 2.1 有理数运算	15
§ 2.2 代数运算	23
§ 2.3 方程求解	30
§ 2.4 初等函数化简	34
习题二	43

第三章 高等代数

§ 3.1 数组运算	45
§ 3.2 矩阵运算	48
§ 3.3 线性方程组求解	55
§ 3.4 向量代数	59
习题三	63

第四章 数学分析

§ 4.1 符号微分和泰勒级数	65
§ 4.2 符号积分	69
§ 4.3 函数的极限	72
§ 4.4 闭式求和与求积	75
§ 4.5 解常微分方程	77
§ 4.6 向量分析	83
习题四	90

第五章 muSIMP 语言

§ 5.1 基本概念	94
§ 5.2 基本函数	96
§ 5.3 定义函数	107
§ 5.4 条件	114
§ 5.5 递归与循环	124
§ 5.6 栈、特性表及其它	133
§ 5.7 输入、输出函数	150
习题五	156

第六章 程序实例

§ 6.1 有理数计算问题	159
§ 6.2 递归问题	173
§ 6.3 带回溯的搜索问题	178
习题六	187

第七章 符号计算模块分析

§ 7.1 muMATH 的内部结构	188
§ 7.2 有理数运算模块	192
§ 7.3 线性方程组求解模块	207
§ 7.4 微分运算模块	216
习题七	220

第八章 上机操作

§ 8.1 muMATH 交互使用方式	222
§ 8.2 muSIMP 程序操作方式	225
§ 8.3 muSIMP 程序开发系统	227

附 录

附录一 muMATH 函数(变量)一览表	243
附录二 muSIMP 函数(变量)一览表	249
附录三 APPLE II 上机操作概要	255

第一章 绪 言

计算机代数，又名符号计算或符号运算。它是近年来发展起来的一门新兴学科。与此相联系的计算机代数系统正在逐步完善，并显示了它的巨大优越性，越来越受到人们的注意。

§ 1.1 什么是计算机代数

§ 1.1.1 计算机代数

科学计算的两个大类是数值计算和符号计算。数值计算意味着把计算机作为数值处理器，许多计算问题可以用这种方法解决。在数值计算中，计算机处理的数据和得到的结果都是数值。大多数读者熟知数值计算方法。我们现在说的计算机代数，又称符号计算或符号运算。它处理的数据和结果都是符号。这种符号可以是字母、公式，也可以是数值。因此，在符号计算中也可以进行数值计算，数值计算可以看成是符号计算的特例。当然，在符号计算中进行数值计算与单纯的数值计算在处理方法、处理范围、处理特点等方面有较大的区别。用符号计算方法进行数值计算有不少优点，例如具有绝对精确的结果。不过，符号计算还不能解决传统数值计算中所有的计算。两种计算方法都有存在的必要，但随着计算机科学的发展而产生的符号计算方法无疑已经显示出强大的活力。它能完成的许多公式运算是传统计算方法所无法完成的。

例如，计算机代数能进行下列运算：

$$A + A + B \longrightarrow 2A + B$$

$$(\sin x)' \longrightarrow \cos x$$

$$\int \cos x dx \longrightarrow \sin x$$

$$3 + 4 \longrightarrow 7$$

等等。

计算机代数能够完成极其复杂的公式运算。

§ 1.1.2 计算机代数系统

计算机代数系统既是计算机代数的研究成果，又是进一步研究计算机代数的基础。它是一种大型的计算机软件系统。目前世界上比较著名的计算机代数系统是下列 7 个软件：

MACSYMA

SMP

SAC-2

FORMAC

ALTRAN

REDUCE

MAPLE

其中以 MACSYMA 的功能最为强大，规模也最大。它是一个用 600 人年写成的由 3000 多个子程序组成的大型软件系统，但目前至少要在超级微机上才能运行。

本书中要介绍的 muMATH 代数系统是一个能在一般微型计算机上实现的软件系统。它实际上是 MACSYMA 的一部分。它是目前世界上应用最为广泛的一个代数系统。它很可能象 BASIC 语言那样受到人们的普遍注意。在学校教育中，相信会受到广大师生的欢迎。在工程计算中，同样会受到工程技术人员的欢迎。

§ 1.1.3 计算机代数系统的特点

1. 具有绝对精确的计算结果

由于符号计算是用特殊方法进行数学运算的,因此它能给出绝对精确的运算结果。对于那些无法给出绝对精确的结果,将保留其符号形式或者按照用户规定的要求作近似计算。

2. 可以进行大有理数运算

计算机代数系统在进行有理数运算时,一般可以取几百位数码,甚至几千位,其位数只取决于存储器的大小。这是一般数值计算软件无法做到的。

3. 使用方便,可以作为符号及数值问题的日常计算工具

尽管代数系统不能超越人类智能的水平去解决各种数学问题,但是,对可以由公式处理的问题,它将比人工计算具有明显的优越性。人们可以利用代数系统毫不费力地去检查和发现新的数学猜想。代数系统的使用方法大多极为方便。没有使用计算机经验的读者也可以很快学会解决十分复杂的数学问题。

总之,它可以帮助人们从数学计算的繁琐事务中解脱出来,去从事更加智能化的问题的研究。

§ 1.1.4 计算机代数系统的能力

尽管计算机代数系统还不能代替全部的人工演算,但它们的功已足够达到人们为之惊讶的程度。一般说来,凡是能用公式解决的数学问题都能由计算机代数系统解决。通常包括下列内容:

1. 初等数学中的有理数运算、多项式因式分解、初等函数变换、解代数方程等。

2. 高等代数中的矩阵运算、线性方程组求解、向量运算等。

3. 微积分中的求函数的极限、导数、积分、泰勒级数展开,以及闭式求和、求积等。

4. 常微分方程求解,包括一阶常微分方程和特殊类型的高阶常微分方程等。

目前,计算机代数系统的应用已经深入到各个领域,其中有数论、经验数学、形变分析、声学、流体力学、广义相对论、计

算机辅助设计、数值分析、粒子物理、等离子物理、固态物理等学科。

当然,纯粹的符号计算也有某些缺点,主要是对无解析式的运算无法完成。此时,应该使用数值计算系统。幸运的是,目前有些计算机代数系统已经和数值计算系统相连接,以至可以充分利用各自的优点实现更为完满的计算。

§ 1.2 计算机代数研究的内容

由于计算机代数紧密依赖于计算机代数系统,因此,计算机代数研究的内容,一方面是如何利用现有的代数系统来解决各类数学问题;另一方面是如何不断开发代数系统的功能,以满足日益发展的科学、工程计算和教育事业对数学计算的需要。

本书以 muMATH 代数系统为背景介绍以下两部分内容:

第一, muMATH 代数系统的使用方法;

第二, muMATH 的写作语言 muSIMP, 包括 muMATH 程序系统、上机操作和系统开发。

下面粗略介绍各个部分所包含的内容。

§ 1.2.1 muMATH 的使用方法

muMATH 是一个全交互的计算机代数系统。它能解决的数学运算涉及初等数学, 高等代数, 微积分及常微分方程等课程。下面通过几个实例说明它们的功能及使用方法。

在 muMATH 状态下, 只要在计算机上调用一些简单的命令, 即可实现所要进行的运算。

为了便于阅读本绪言中下面的一些例子, 读者可以先看一下 § 8.1 中关于使用 muMATH 的开工方式以及命令调用方式。

例1 求 $(201)^{20}$ 。

这个式子的运算结果是一个很大的数, 但用 muMATH 计

算,在几秒钟内就可得到精确的结果。命令和结果如下:

? (201)^20;

@:

5278278940031998909275956721337694009

3093649615068456836702251481984675382

5738948673401013260960466248981888801

7111173374121711557702478936548845454

7225023336325110647391655624881516267

7696082152624894965127886620421275351

6992544484169091088523769583456440757

6261126117235609637840591257600000000

0000000000000000000000000000000000

0000000000000000000000000000000000

由例1可见,阶乘符号可以直接出现在命令中。muMATH之所以能进行这样庞大的数值运算,是因为这样的数值计算是用符号计算完成的。

例2 解三元一次方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3A + B \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 4A + B \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 5A - 2B. \end{cases}$$

这个方程组虽然简单,却有一个特点,即方程组中除了未知数 x_1, x_2, x_3 外,还有 A, B 两个未赋过值的变量。在一般的算法语言中,这是不允许的,但在 muMATH 中,仍然可以求解。命令和结果如下:

? M1: X1 + X2 + X3 = = 3A + B;

@: X1 + X2 + X3 = = 3A + B

? M2: 3X1 - 2X2 + X3 = = 4A + B;

@: 3X1 - 2X2 + X3 = = 4A + B

? M3: $X_1 + 3X_2 - 2X_3 = 5A - 2B$;

@: $X_1 + 3X_2 - 2X_3 = 5A - 2B$

? LINEQN([M1, M2, M3], [X1, X2, X3]);

@: $[X_1 = 2A, X_2 = A, X_3 = B]$

例中的“=”为普通的等号，命令形式与数学中的书写形式基本一致。计算过程说明如下：先把三个方程存放在三个变量 M_1 、 M_2 、 M_3 中；然后用 LINEQN 命令解关于 x_1 、 x_2 、 x_3 的联立方程组，此时， A 、 B 被看成是常数。muMATH 所以能完成这样的代数运算，主要是因为它具有很强的符号处理的能力，与传统的计算方法不一样。

例3 对函数 x^3y^2 求关于 x 的二阶偏导数和关于 y 的一阶偏导数，即求 $\frac{\partial^2 x^3y^2}{\partial^2 x \partial y}$ 。命令和结果如下：

? DIF(X^3 Y^2, X, 2, Y);

@: 12 Y X

例4 求 $x(\sin x)^2$ 的不定积分。命令和结果如下：

? INT(X * (SIN X)^2, X);

@: $-X \sin(2X)/4 + X^2/4 - \cos(2X)/8$

例5 求微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sin y}$ 的解。命令和结果如下：

? SOLVE(DIF(Y(X), X) = X/SIN Y(X), Y(X));

@: $\{Y(X) = \#PI/2 - \text{ASIN}((-X^2 - 2\text{ARB}(1))/2)\}$

注：上面运算中的符号含义是：

(1) $Y(X)$ —— y (y 是 x 的函数)；

(2) $=$ —— (普通等号)；

(3) $\#PI$ —— π (圆周率)；

(4) ASIN —— $\arcsin$ (反三角正弦的记号)；

(5) ARB(1)——任意常数 C 。

经过适当的变化, 上例中的 $\frac{dy}{dx}$ 不一定写成 $DIF(y(x), x)$ 的形式, 而可写成非常方便的形式 y' (这在第四章中将专门介绍)。

§ 1.2.2 muMATH 的写作语言 muSIMP

muMATH 同时提供了它的写作语言 muSIMP。muSIMP 是一种类 LISP 语言。它是 LISP 语言应用于编写数学软件时的一种改进形式。它具有更加自然的语法和应用能力。muMATH 符号数学系统就是用 muSIMP 写成的第一个可用于微型计算机的代数系统。

学习 muSIMP 是更好地使用 muMATH 系统的需要, 也是研究开发代数系统的需要。

1. 利用 muSIMP 可以实现 muMATH 的批处理模式

前已介绍, muMATH 是一个全交互的代数系统。它的每一个命令只能做一项工作。这样有时会感到麻烦, 但利用 muSIMP 语言, 可以编写简单的程序把若干条命令组合起来, 实现批处理模式, 以提高程序的自动化程度。

例如, 下面一段程序定义了一个先做微分和加法, 再做积分的函数 DAI(EX):

```
FUNCTION DAI (EX),
    EX1: DIF (EX, X),
    EX2: EX1 + 2,
    EX3: INT (EX2, X)
ENDFUN
```

DAI 函数的意义如下:

定义函数 DAI, 以 EX 为自变量。函数内容: 先将 EX 对 x 求导数, 结果存到 EX1 中; 接下来做加法 $EX1+2$, 并把结果

设两个数为 EX_1 和 EX_2 ，若两个数相等，则取 EX_1 ；若 EX_1 小于 EX_2 ，则取 EX_1 ，否则，取 EX_2 ；若其中有一个不是数，则不予计算。

显然，利用 MIN 函数，我们可以方便地把它修改成 MAX 函数。这就是：只要当 $EX_1 < EX_2$ 时，取 EX_1 ，否则，取 EX_2 ，即可。从这个例子还说明：在懂得了 muSIMP 语言之后，便可以得心应手地使用 muMATH 系统。

例8 Fibonacci 数列的计算

在 muMATH 源文件中，虽然没有直接求 Fibonacci 数列的模块，但事实上，用 muSIMP 语言编写求 Fibonacci 数列的程序是非常容易的。

根据 Fibonacci 数列的定义：

$$F(0) = 1$$

$$F(1) = 1$$

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2) \quad (n > 1),$$

相应的 muSIMP 函数可以定义如下：

```
FUNCTION F (N),
  WHEN N=0, 1 EXIT,
  WHEN N=1, 1 EXIT,
  F (N-1) + F (N-2)
ENDFUN
```

这个定义方式与 Fibonacci 数列的自然定义方式非常接近。当 $n=5$ 时，只要使用 $F(5)$ ，就可以得到结果 8。

这里虽然只举了两个极为简单的例子，但从中不难看出学习代数系统写作语言的重要性。

muSIMP 既然是一种类 LISP 语言，它的基本处理方法与 LISP 语言是相同的。因此，用它可以实现其它人工智能的应用。这在以后的 muSIMP 语言部分，我们会作介绍。

§ 1.3 muMATH 基本概念

muMATH 和大多数计算机代数系统一样,实际上也是一种计算机语言。因此,它具有通常的计算机语言所具有的基本特征。

§ 1.3.1 基本符号

muMATH 能使用可以从键盘上输入的所有字符,用得最多的是二十六个英文字母和十个阿拉伯数字。一些特别重要的字符和他们的意义如下所示:

? ——muMATH 提示符。在 ? 状态,可以在键盘上使用各种 muMATH 命令;

@ ——muMATH 运算结果提示符。在 @ 内存储每次命令调用的结果;

, ——muMATH 命令的终极符。它要求计算机显示运算结果;

\$ ——muMATH 命令的终极符。它要求计算机不显示运算结果;

(——左圆括号,分隔符;

) ——右圆括号,分隔符。

在适当的时候,我们将指出其它一些字符以及它们的意义。

§ 1.3.2 变量和数

1. 变量

muMATH 中的变量由变量名表示。变量名是以字母开头的由字母和数字组成的序列。

例如 A , A_1 , ABC , X_{111} , X_{11} 等都是合乎语法的变量名。但是,象 $2A$, $A+B$, $-X$, $\langle A \rangle$, $\sin(X)$ 等就不能作为变量名。