工 程 数 学

复 变 函 数

王省富 编

11
599

国防工业出版社

工程数学

复变函数

王省富 编

国防工业出版社

内 容 简 介

本书是西北工业大学、北京航空学院、南京航空学院等三院校数学教研室合编的"工程数学"七个分册之一。本分册介绍复变函数的导数与积分、无穷级数、留数理论、保角变换、黎曼曲面等内容，且着重于基本概念、基本理论及某些应用。书中附有适量习题，书后附习题答案。

本书可作为高等工科院校试用教材，也可供有关科技人员参考。

2P74/23 07

工 程 数 学
复 变 函 数
王省富 编
*
国防工业出版社出版
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
国防工业出版社印刷厂印装
*
787×1092 1/32　印张 $6^3/_8$　134千字
1982年7月第一版　1982年7月第一次印刷　印数：00,001—23,400册
统一书号：15034·2310　定价：0.68元

前　言

本书是西北工业大学、北京航空学院、南京航空学院等三院校数学教研室合编的"工程数学"教材之一。全套教材共分七册出版：矢量分析、复变函数、积分变换、线性代数、计算方法、数学物理方程与特殊函数、概率论与数理统计。

本册介绍复变函数的导数与积分、无穷级数、留数理论、保角变换、黎曼曲面等内容，并着重于基本概念、基本理论及某些应用。

书中加有"*"号的内容可根据情况予以取舍，排小字的内容供阅读时参考。书中附有适量习题，书后附有习题答案。阅读本书只需具备一般高等数学知识。

本册由西北工业大学王省富编写，由北京航空学院周德润主审。参加本书审稿的还有西北工业大学、北京航空学院、南京航空学院、沈阳航空工业学院、南昌航空工业学院等院校数学教研室的同志。我们对在本书编写过程中给予大力支持和提供宝贵意见的所有同志，在此致以衷心的感谢。

由于编者的水平所限，书中缺点和错误在所难免，诚望同志们批评指正。

编　者

目　录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

复变函数

第一章 复　数

关于复数，在初等代数中已有论述，但是为了有利于我们今后的讨论，这里再给出系统的叙述和补充，还是很必要的。

§1.1 复数的表示及其几何意义

设 x 和 y 是两个实数，i 表示虚数单位 $\sqrt{-1}$，$x+iy$ 通常称为复数，记为

$$z=x+iy \tag{1.1.1}$$

当 x 和 y 均为常数时，称 $z=x+iy$ 为复常数。当 x、y 之一或者均为变数时，称 $z=x+iy$ 为复变数。当 $y=0$ 时，$z=x$ 表示实数，故称 x 为复数 z 的实部，记为 $\mathrm{Re}z=x$；当 $x=0$ 时，$z=iy$ 表示虚数，故称 y 为复数 z 的虚部，记为 $\mathrm{Im}z=y$；当 $x=y=0$ 时，$z=0$，故零可看作实数也可看作虚数。

根据复数的上述定义，可知复数 $z=x+iy$ 与一对有序的实数 (x,y)，有着一对一的对应关系。而一对有序的实数与引入直角坐标系的平面上的点，有着一对一的对应关系。因此可以把平面上的点 $M(x,y)$ 看作是复数 $z=x+iy$ 的几何表示（图 1-1）。复数 $z=x+iy$ 称为点 $M(x,y)$ 的附标。这样就建立了复数与平面上点的对应关系。实数 x 对应于横坐标轴上的点，故称横坐标轴为实轴；虚数 iy 对应于纵坐标轴上的点，故称纵坐标轴为虚轴；实轴与虚轴的交

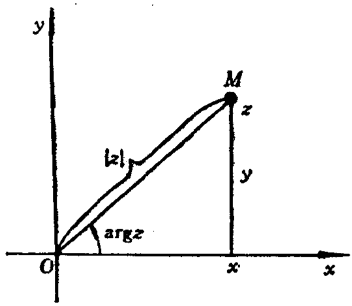

图 1-1

点称为原点。将引入了实轴、虚轴及原点的平面称为复平面。今后约定将复数 $z=x+iy$ 与点 z（指 z 的几何表示）用作同义词。此外，还可将复数 $z=x+iy$ 理解为复平面上起点在原点，终点是以 z 为附标的点 $M(x, y)$ 的向量（图 1-1），因此也把复数 z 与向量 z 用作同义词。这个向量的长度称为复数 z 的模，记为 $|z|$ 或 r。向量 z 与实轴正方向的夹角，称为复数 z 的辐角，记为 $\mathrm{Arg}z$ 或 Φ；辐角的正负，视正向实轴是按逆时针方向还是顺时针方向转至向量 z 而定，即逆时针转至向量 z 时，z 的辐角取正值，顺时针转至向量 z 时，z 的辐角取负值。如同在极坐标系中一点的极角一样，任何一个复数的辐角有无穷多个，其中只有一个辐角在 $-\pi$ 与 π 之间，称为主辐角（或辐角的主值），记为 $\arg z$ 或 φ。于是有

$$-\pi<\arg z\leqslant\pi$$

及

$$\varphi=\arg z=\begin{cases}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x} & (\text{当 } z \text{ 在第一象限})\\ \operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}+\pi & (\text{当 } z \text{ 在第二象限})\\ \operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}-\pi & (\text{当 } z \text{ 在第三象限})\\ \operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x} & (\text{当 } z \text{ 在第四象限})\end{cases}$$

$\mathrm{Arg}\, z = \arg z + 2k\pi$（$k$ 表示任意的整数）
值得注意的是当 z 为零时，它的辐角不能确定，但是可以取作任意的实数，这与极坐标系中极点的极角相类似。此外复数 $z = x + iy$ 的实部、虚部与其模及辐角满足下列关系：

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

于是复数 z 可用三角函数表示如下：

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \qquad (1.1.2)$$

根据欧拉（Euler）公式：$\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$，复数 z 又可用指数函数表示如下：

$$z = re^{i\varphi} \qquad (1.1.3)$$

复数 $x + iy$ 和 $x - iy$ 称为是相互共轭的，如果前者用 z 表示，后者就用 $\bar{z}$ 表示。显然 z 和 $\bar{z}$ 关于实轴是对称的（图1-2），且有 $|z| = |\bar{z}|$，$\arg z = -\arg\bar{z}$ ($\arg z \neq \pi$)。当 z 为实数时，它的共轭数也是它自己。

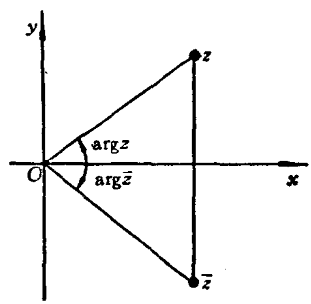

图 1-2

实数的几何表示是实轴上的点，而且全体实数正好布满实轴，因而可以比较大小，位置靠左的数小，靠右的数大。复数的几何表示是复平面上的点，难以规定一个孰大孰小的原则，所以复数不能比较其大小。

这里再约定 $\arg z$ 除表示 $\mathrm{Arg}\, z$ 的主值外，在我们需要时还将用 $\arg z$ 表示 $\mathrm{Arg}\, z$ 中的某一个值，在必要时，并将特别指明所表示的是那一个值。

§1.2 复数的运算

（一） 相 等

两个复数 $z_1=x_1+iy_1$ 和 $z_2=x_2+iy_2$，当且仅当 $x_1=x_2$，$y_1=y_2$ 时，称这两个复数 z_1 与 z_2 是相等的，记为 $z_1=z_2$。

（二） 加 法

两个复数 $z_1=x_1+iy_1$ 与 $z_2=x_2+iy_2$ 的和，我们作如下的规定：

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2) \tag{1.2.1}$$

于是，两个相互共轭的复数的和，显然是实数，即

$$z+\bar{z}=x+iy+(x-iy)=2x=2\mathrm{Re}z=2\mathrm{Re}\bar{z}$$

依据加法的规定，容易证明，复数加法遵循交换律与结合律，即

$$z_1+z_2=z_2+z_1 \text{ 与 } (z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$$

成立。

（三） 减 法

两个复数 $z_1=x_1+iy_1$ 与 $z_2=x_2+iy_2$ 的差，我们作如下的规定：

$$z_1-z_2=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2) \tag{1.2.2}$$

于是，两个相互共轭复数的差，显然是虚数。即

$$z-\bar{z}=x+iy-(x-iy)=i2y=i2\mathrm{Im}z$$

根据复数加法与减法的规定，易见它们是符合向量加法与向量减法的平行四边形规则的（图 1-3）。由此可见，前面将复数 z 理解为向量也是有道理的。

由于复数的模等于对应向量的长度，参看（图 1-3）易

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

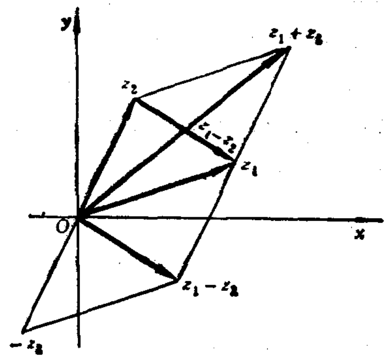

图 1-3

知下面的两个不等式是成立的：

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$$

$$|z_1-z_2|\geqslant|z_1|-|z_2|$$

（四） 乘 法

两个复数的乘法与两个二项式的乘法类似，只不过要把 i 的平方取为 -1。于是两个复数 $z_1=x_1+iy_1$ 与 $z_2=x_2+iy_2$ 的积，我们作如下的规定：

$$z_1\cdot z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1) \quad (1.2.3)$$

特别，两个相互共轭复数的积，等于二者之一的模的平方，即

$$z\cdot\bar{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2=|z|^2=|\bar{z}|^2$$

如果采用三角函数表示式，$z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$，$z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$，可借助于三角恒等式得

$$z_1\cdot z_2=r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)] \quad (1.2.4)$$

如果采用指数函数表示式，$z_1=r_1e^{i\varphi_1}$，$z_2=r_2e^{i\varphi_2}$，则有

$$z_1\cdot z_2=r_1e^{i\varphi_1}\cdot r_2e^{i\varphi_2}=r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \quad (1.2.5)$$

由式（1.2.4）或式（1.2.5）显见，两复数相乘，所得积的

模等于原来两复数模的积，积的辐角等于原来两复数辐角的和，即

$$|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|,\quad \arg(z_1\cdot z_2)=\arg z_1+\arg z_2$$

根据乘法与加法的规定推得乘法遵循下列规律：

$$z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1 \qquad \text{(交换律)}$$

$$(z_1\cdot z_2)\cdot z_3=z_1\cdot(z_2\cdot z_3) \qquad \text{(结合律)}$$

$$z_1(z_2+z_3)=z_1\cdot z_2+z_1\cdot z_3 \qquad \text{(分配律)}$$

（五） 除 法

两个复数 $z_1=x_1+iy_1$ 与 $z_2=x_2+iy_2(z_2\neq 0)$ 的商，我们作如下的规定：

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}$$

$$=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2} \qquad (1.2.6)$$

若采用三 角 函 数 表 示 式，$z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$，$z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_1)$，则有

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_1\sin\varphi_2)}{r_2^2}$$

$$+\,i\,\frac{r_1r_2(\cos\varphi_2\sin\varphi_1-\cos\varphi_1\sin\varphi_2)}{r_2^2}$$

$$=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)] \qquad (1.2.7)$$

若采用指数函数表示式，$z_1=r_1e^{i\varphi_1}$，$z_2=r_2e^{i\varphi_2}$，则有

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1e^{i\varphi_1}}{r_2e^{i\varphi_2}}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} \qquad (1.2.8)$$

由式（1.2.7）或式（1.2.8）显见，两个复数相除，所得商的模等于分子的模除以分母的模，商的辐角等于分子的辐角

减去分母的辐角，即

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|},\quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\arg z_1-\arg z_2$$

（六） 乘 幂

n 个相同的复数 z 的乘积，称为 z 的 n 次幂，记为

$$z^n=\underbrace{z\cdot z\cdots z}_{n\text{个}}$$

取 $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=re^{i\varphi}$ 即有

$$\begin{aligned}z^n&=[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^n=(re^{i\varphi})^n=r^ne^{in\varphi}\\&=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)\end{aligned}$$

在上式中令 $r=1$，即得众所周知的棣美弗（Demoivre）公式如下：

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi$$

（七） 开 方

若 $w^n=z$，则称 $w=\rho e^{i\theta}$ 为复数 $z=re^{i\varphi}$ 的 n 次方根，记为 $\sqrt[n]{z}$ 或 $z^{\frac{1}{n}}$。于是有

$$(\rho e^{i\theta})^n=\rho^ne^{in\theta}=re^{i\varphi}$$

即 $\rho^n=r,\quad n\theta=\varphi+2k\pi$（$k$ 为任意整数）

于是 $\sqrt[n]{z}=z^{\frac{1}{n}}=w=\rho e^{i\theta}=r^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}$

其中 $r^{\frac{1}{n}}$ 只取一个算术根，当取 $k=0,1,2,\cdots,n-1$ 时，即得 $z^{\frac{1}{n}}$ 的 n 个不同的值：

$$r^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\varphi}{n}},\ r^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\varphi+2\pi}{n}},\cdots,\ r^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\varphi+2(n-1)\pi}{n}}$$

当 k 取其他的整数值时，所得 $z^{\frac{1}{n}}$ 的值，必与上述这 n 个值中的某一个值相重合。因此 $z^{\frac{1}{n}}$ 只取这 n 个不相同的值，即

$$\sqrt[n]{z}=z^{\frac{1}{n}}=r^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}$$

$$(k=0,\ 1,\ 2,\cdots,\ n-1) \qquad (1.2.9)$$

例如 $z=1+i=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$ 的 4 次方根，有 4 个值，它们分别为：

$$w_0=(\sqrt[4]{1+i})_0=2^{\frac{1}{8}}e^{i\frac{\pi}{16}}\ (k=0\text{ 的情形})$$

$$w_1=(\sqrt[4]{1+i})_1=2^{\frac{1}{8}}e^{i\left(\frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$=iw_0\quad (k=1\text{ 的情形})$$

$$w_2=(\sqrt[4]{1+i})_2=2^{\frac{1}{8}}e^{i\left(\frac{\pi}{16}+\pi\right)}$$

$$=-w_0\quad (k=2\text{ 的情形})$$

$$w_3=(\sqrt[4]{1+i})_3=2^{\frac{1}{8}}e^{i\left(\frac{\pi}{16}+\frac{3\pi}{2}\right)}$$

$$=-iw_0\quad (k=3\text{ 的情形})$$

这四个方根均匀地分布在以原点为中心，以 $2^{\frac{1}{8}}$ 为半径的圆周上(图 1-4)。

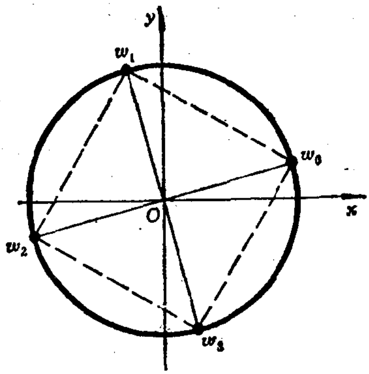

图 1-4

§1.3 复平面上的曲线

在笛卡尔（Descartes）坐标平面 xOy 上，曲线的参数方程为：

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (a \leqslant t \leqslant b) \qquad (1.3.1)$$

在 y 轴上引入虚单位 $i=\sqrt{-1}$ 后，xOy 平面就成为复平面了，曲线（1.3.1）上的点$[x(t),\ y(t)]$，也就成为复平面上以 $z(t)=x(t)+iy(t)$ 为附标的点了，因而在复平面上，曲线的参数方程，可以表为复数形式：

$$z=z(t)=x(t)+iy(t) \quad (a \leqslant t \leqslant b) \qquad (1.3.2)$$

当 $x(t)$，$y(t)$ 都是 t 的连续函数时，称 $z(t)$ 是 t 的连续函数，这时式（1.3.2）表示一条连续曲线。若$t_1 \neq t_2$且 $a<t_1$，$t_2<b$ 时，有 $z(t_1) \neq z(t_2)$，则曲线（1.3.2）自己不相交。再若 $z(a)=z(b)$ 则曲线（1.3.2）成为自己不

相交的连续闭曲线，这种曲线称为简单闭曲线。

如果$x(t)$，$y(t)$有连续的导函数$x'(t)$，$y'(t)$，则$z(t)$有连续的导函数$z'(t)=x'(t)+iy'(t)$。再若$z'(t)\neq 0$则曲线（1.3.2）有连续变动的切线。有连续变动切线的曲线，称为光滑曲线。由几段光滑曲线连接组成的曲线，称为逐段光滑曲线。

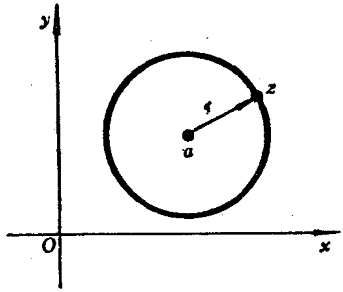

图 1-5

复平面上的曲线，也可以看作满足某种条件的点z的几何轨迹，这种条件通常可以表示为z的某种方程。例如$|z-a|=r$（r为正实常数，a为复常数）表示以点a为中心，r为半径的圆周（图 1-5）。又如$\arg(z-1)=\theta_0>0$表示由点1射出，与实轴的夹角为θ_0的半射线（图 1-6）。又如关系式$|z|=1-\mathrm{Re}z$表示动点z至原点的距离，等于该动点至定直线$x=1$的距离，因而轨迹为一抛物线（图 1-7）。

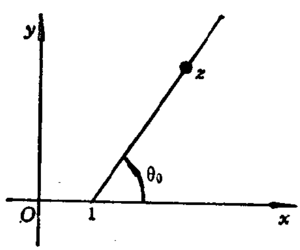

图 1-6

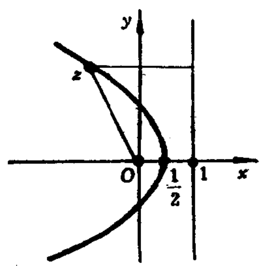

图 1-7

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com