弹性力学问题的有限单元法

修订版

华东水利学院

水利电力出版社

弹性力学问题的有限单元法 修订版

内 容 提 要

本书主要介绍平面问题的有限单元法，空间问题的有限单元法，板壳问题的有限单元法和动力问题的有限单元法。为了照顾初学者的需要，书中还对弹性力学、矩阵代数、结构动力学等基础知识作了扼要的介绍。

本书内容比较通俗，附有一些实例，可供水利土建设计人员学习和参考，亦可作为水利、土建类专业的参考教材。

弹性力学问题的有限单元法（修订版）
华东水利学院

*

水利电力出版社出版
（北京德胜门外六铺炕）
新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售
水利电力出版社印刷厂印刷

*

1978年10月北京第一版
1978年10月北京第一次印刷
印数 00001—23220 册　每册 1.30 元
书号 15143·3356

关于修订版的说明

在修订版中，我们对本书的内容作了一些调整和补充，主要在以下几个方面：

（一）删去了有限单元法的计算机程序一章，因为我院已另行编写了《程序设计》一书，仍由水利电力出版社出版，不久就可以和读者见面。

（二）在动力问题的有限单元法一章中补充了较多的内容，此外并增加了结构动力学基础知识一章。

（三）增加了成层地基的弹性矩阵、平面不稳定温度场的计算、用夹层法解缝隙和软弱夹层的问题、文克勒地基上的薄板等几个专题。

（四）对于各种问题的有限单元法，都增添了一些计算实例，并针对几个基本问题的有限单元法介绍了计算成果的整理方法。

1977年12月

序

1972年5月至9月，我们在湖南省水利电力勘测设计院结合生产实际，用有限单元法对混凝土坝的变温应力进行了分析和计算。在此期间，为了便于该院的同志们和我们一起学习讨论，曾向他们汇报了我们以前学习过的一部分内容，并编写了关于有限单元法的一份资料。后来，有不少水利工程设计单位的同志，要求我们把那份资料重新印发，以适应他们工作上的需要。为此，我们对上述资料加以修改和补充，编出一本《弹性力学问题的有限单元法》，从1973年年初开始进行交流。

在此后的一年中间，我们又先后接受或参加了一些生产科研工作，从而有机会向工程设计单位、计算技术研究单位和兄弟院校学习，对有限单元法的计算方案和计算程序共同进行一些探索，实践和讨论。特别是，由于上海市计算技术研究所和我们协作，试编出几套通用程序，才比较有效地解决了生产上提出的一些计算问题。现在把这一期间所得的成果并入上述的那份交流资料，加以整理，编成这本书，供读者参考。

在弹性力学问题的有限单元法中，对于原理的阐述和公式的推导，虽然可以应用结构力学，但很多文献的作者应用了变分法。鉴于大多数读者对结构力学比较熟悉，我们就一律沿用或改用结构力学来说明。关于温度场和流场的问题，却不得不例外地用了变分原理，因为这两方面的问题不属于结构力学的范围。

在现有的文献中，不同的作者对于同一类型的问题，或者同一作者对于不同类型的问题，有时采用不同的单元标记或不同的坐标系统。在编写本书时，我们统一了单元的标记，并统一采用了右手坐标系。这样，不但使读者会感到方便一些，而且有利于日后编制一套各种单元都可以联合使用、各种结构物都可以通用的计算程序。

估计有些读者没有接触过弹性力学，或者没有接触过矩阵代数，所以在本书的第一章中简单介绍了弹性力学的有关内容，在第七章中附录了有关的矩阵代数知识，以便读者先自学或复习一下这些内容。尚有不足之处，请分别参阅这方面的参考书籍。

由于我们的理论水平不高，实践经验又少，书中必然会有不少的缺点和错误。恳切希望读者热情地帮助我们，对本书进行严格的审查，把发现的缺点和错误及时地通知我们，以便加以修改或更正。此外，还希望兄弟单位的同志们及早编写出质量较高的资料和书籍，供大家学习。

1974年3月

目　　录

第　一　章

弹 性 力 学 简 介

用有限单元法求解弹性力学问题，虽然并不需要掌握弹性力学中很多的理论，但须对其中的某些基本概念和基本方程有所了解。为此，本章中将简单介绍这些概念和方程，作为介绍弹性力学有限单元法的导引。

§1-1　应 力 的 概 念

弹性体受外力以后，其内部将发生应力。为了描述弹性体内某一点P的应力，在这一点从弹性体内割取一个微小的平行六面体$PABC$，它的六面垂直于坐标轴，如图 1-1。将每一面上的应力分解为一个正应力和两个剪应力，分别与三个坐标轴平行。正应力用字母σ表示。为了表明这个正应力的作用面和作用方向，加上一个角码，例如，正应力σ_x是作用在垂直于x轴的面上同时也沿着x轴方向作用的。剪应力用字母τ表示，并加上两个角码，前一个角码表明作用面垂直于哪一个坐标轴，后一个角码表明作用方向沿着哪一个坐标轴。例如，剪应力τ_{xy}是作用在垂直于x轴的面上而沿着y轴方向作用的。

如果某一个面上的外法线是沿着坐标轴的正方向，这个面上的应力就以沿坐标轴正方向为正，沿坐标轴负方向为负。相反，如果某一个面上的外法线是沿着坐标轴的负方向，这个面上的应力就以沿坐标轴负方向为正，沿坐标轴正方向为负。图上所示的应力全都是正的。注意，虽然上述正负号规定，对于正应力说来，结果是和材料力学中的规定相同（拉应力为正而压应力为负），但是，对于剪应力说来，结果是和材料力学中的规定不完全相同的。

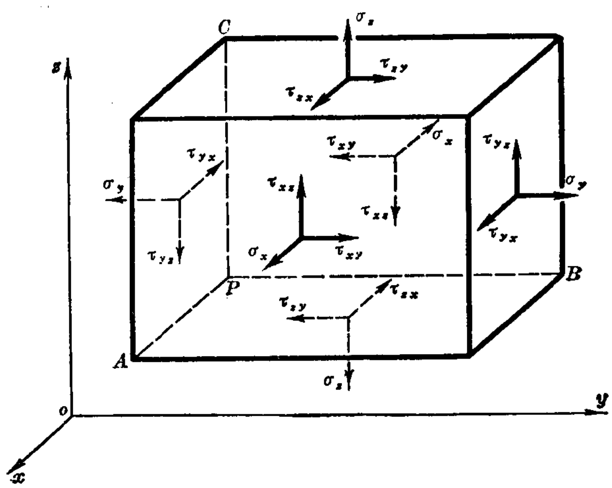

图 1-1

六个剪应力并不是互不相关而是两两相等的。根据图中微小平行六面体的平衡条件，可以得到

$$\tau_{xy}=\tau_{yx},\quad \tau_{yz}=\tau_{zy},\quad \tau_{zx}=\tau_{xz}.$$

这就表示剪应力互等定律：作用在两个互相垂直的面上并且垂直于该两面交线的剪应力是

互等的（大小相等，正负号也相同）。因此，剪应力记号的两个角码可以任意对调。通常用τ_{xy}统一地代表τ_{xy}和τ_{yx}，用τ_{yz}统一地代表τ_{yz}和τ_{zy}，用τ_{zx}统一地代表τ_{zx}和τ_{xz}。

下一节中将要说明，如果σ_x、σ_y、σ_z、τ_{xy}、τ_{yz}、τ_{zx}这六个量在P点是已知的，就可以求得该点的任何面上的正应力和剪应力。因此，这六个量可以完全确定该点的应力状态，它们就称为在该点的应力分量。

一般说来，弹性体内各点的应力状态都不相同，因此，描述弹性体内应力状态的上述六个应力分量并不是常量，而是坐标x、y、z的函数。

六个应力分量的总体，可以用一个列阵$\{\sigma\}$来表示：

$$\{\sigma\}=\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\\ \tau_{xy}\\ \tau_{yz}\\ \tau_{zx}\end{Bmatrix}=[\sigma_x\ \sigma_y\ \sigma_z\ \tau_{xy}\ \tau_{yz}\ \tau_{zx}]^T. \qquad (1\text{-}1)$$

§1-2 主应力及应力主向

现在，假定弹性体内任意一点P的六个应力分量σ_x、σ_y、σ_z、τ_{xy}、τ_{yz}、τ_{zx}为已知，试求经过P点的任一斜面上的应力。为此，在P点附近取一个平面QRS，图1-2，它平行于这一斜面，与经过P点而垂直于坐标轴的三个平面形成一个微小的四面体$PQRS$。当平面QRS趋近于P点时，平面QRS上的应力就趋近于该斜面上的应力。

命斜面QRS的向外法线为N，而N的方向余弦为

$$\cos(N,x)=l,\ \cos(N,y)=m,\ \cos(N,z)=n.$$

设三角形QRS的面积为ΔA，则三角形PRS、PSQ、PQR的面积分别为$l\Delta A$、$m\Delta A$、$n\Delta A$。命三角形QRS上的全应力在坐标轴上的投影为X_N、Y_N、Z_N。由该四面体的平衡条件$\sum F_x=0$得

$$X_N\Delta A-\sigma_x l\Delta A-\tau_{yx}m\Delta A-\tau_{zx}n\Delta A=0.$$

此外还可以由平衡条件$\sum F_y=0$及$\sum F_z=0$得出与上相似的两个方程。简化以后，这三个方程成为

$$\begin{aligned}X_N&=l\sigma_x+m\tau_{yx}+n\tau_{zx},\\ Y_N&=m\sigma_y+n\tau_{zy}+l\tau_{xy},\\ Z_N&=n\sigma_z+l\tau_{xz}+m\tau_{yz}.\end{aligned} \qquad (a)$$

这里没有考虑作用于微小四面体的体力，因为它和应力相比，是高一阶的微量。

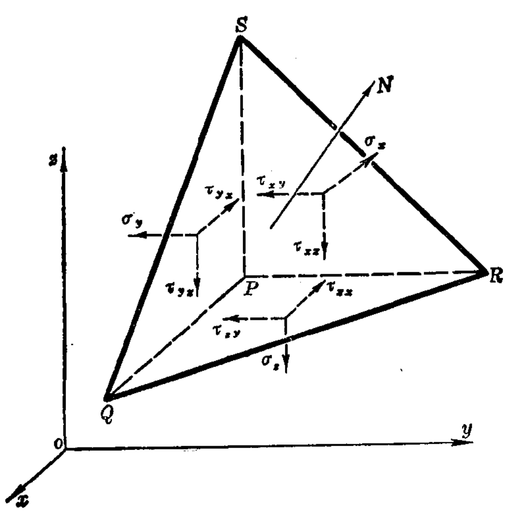

图 1-2

命斜面 QRS 上的正应力为 σ_N，则通过投影可得

$$\sigma_N=lX_N+mY_N+nZ_N.$$

将式（ a ）代入，并分别用 τ_{xy}、τ_{yz}、τ_{zx} 代替 τ_{yx}、τ_{zy}、τ_{xz}，即得

$$\sigma_N=l^2\sigma_x+m^2\sigma_y+n^2\sigma_z+2lm\tau_{xy}+2mn\tau_{yz}+2nl\tau_{zx}. \tag{b}$$

命斜面QRS上的剪应力为τ_N，则有

$$\tau_N^2=X_N^2+Y_N^2+Z_N^2-\sigma_N^2. \tag{c}$$

于是可见，在弹性体的任意一点，如果已知六个应力分量，就可以求得任一斜面上的正应力和剪应力。

设经过P点的某一斜面上的剪应力等于零，则该斜面上的正应力称为P点的一个主应力，该斜面称为P点的一个应力主面，而该斜面的法线方向（即该主应力的方向）称为P点的一个应力主向。

现在，假定在P点有一个应力主面存在，于是该面上的剪应力等于零，而该面上的全应力就等于该面上的正应力，也就等于主应力σ。这时，该面上的全应力在坐标轴上的投影成为

$$X_N=l\sigma,\ Y_N=m\sigma,\ Z_N=n\sigma.$$

将式（ a ）代入，就得到

$$\begin{aligned}&l\sigma_x+m\tau_{yx}+n\tau_{zx}=l\sigma,\\&m\sigma_y+n\tau_{zy}+l\tau_{xy}=m\sigma,\\&n\sigma_z+l\tau_{xz}+m\tau_{yz}=n\sigma.\end{aligned} \tag{d}$$

此外还有几何关系式

$$l^2+m^2+n^2=1. \tag{e}$$

如果把式（ d ）和式（ e ）联立求解，能够得出σ、l、m、n的一组解答，就得到一个主应力以及与之对应的应力主面和应力主向。用下述方法求解，比较简捷。

将式（ d ）移项，并用τ_{xy}、τ_{yz}、τ_{zx}分别代替τ_{yx}、τ_{zy}、τ_{xz}，得到

$$\begin{aligned}&(\sigma_x-\sigma)l+\tau_{xy}m+\tau_{zx}n=0,\\&\tau_{xy}l+(\sigma_y-\sigma)m+\tau_{yz}n=0,\\&\tau_{zx}l+\tau_{yz}m+(\sigma_z-\sigma)n=0.\end{aligned} \tag{f}$$

这是l、m、n的一组三个齐次线性方程。因为由式（ e ）可见，l、m、n不能全都等于零，所以这一组方程的系数行列式应该等于零：

$$\begin{vmatrix}\sigma_x-\sigma & \tau_{xy} & \tau_{zx}\\ \tau_{xy} & \sigma_y-\sigma & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z-\sigma\end{vmatrix}=0.$$

将行列式展开，得到σ的三次方程

$$\begin{aligned}&\sigma^3-(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)\sigma^2+(\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_x-\tau_{xy}^2-\tau_{yz}^2-\tau_{zx}^2)\sigma\\&\quad-(\sigma_x\sigma_y\sigma_z-\sigma_x\tau_{yz}^2-\sigma_y\tau_{zx}^2-\sigma_z\tau_{xy}^2+2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx})=0.\end{aligned} \tag{g}$$

求解这个方程，如果得出三个实根σ_1，σ_2，σ_3，那么，这就是在P点的三个主应力。命

主应力σ_1的方向余弦为l_1、m_1、n_1，则由式（f）及式（e）有

$$\tau_{xy}\frac{m_1}{l_1}+\tau_{zx}\frac{n_1}{l_1}+(\sigma_x-\sigma_1)=0,$$

$$(\sigma_y-\sigma_1)\frac{m_1}{l_1}+\tau_{yz}\frac{n_1}{l_1}+\tau_{xy}=0, \qquad (h)$$

$$\tau_{yz}\frac{m_1}{l_1}+(\sigma_z-\sigma_1)\frac{n_1}{l_1}+\tau_{zx}=0,$$

$$l_1=\pm\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{m_1}{l_1}\right)^2+\left(\frac{n_1}{l_1}\right)^2}}. \qquad (i)$$

由（h）中的任意二式求出比值$\frac{m_1}{l_1}$及$\frac{n_1}{l_1}$以后，即可由式（i）求出l_1，从而求得m_1及n_1。同样可以求得与σ_2相对应的l_2、m_2、n_2，以及与σ_3相对应的l_3、m_3、n_3。

可以证明，不论六个应力分量的数值如何，方程（g）的三个根σ_1、σ_2、σ_3都是实根，而且与这三个主应力相对应的三个应力主向总是互相垂直的。这就是说，在弹性体的任意一点，一定存在三个互相垂直的应力主面以及和它们对应的三个主应力。

还可以证明，任何斜面上的正应力都不会大于三个主应力中最大的一个，也不会小于三个主应力中最小的一个。这就是说，在弹性体的任意一点，三个主应力中最大的一个就是该点的最大正应力，三个主应力中最小的一个就是该点的最小正应力。

§1-3 位移及形变.几何方程.刚体位移

弹性体在受外力以后，还将发生位移和形变，也就是位置的移动和形状的改变。

弹性体内任一点的位移，用它在坐标轴x、y、z上的投影u、v、w来表明，以沿坐标轴正方向为正，沿坐标轴负方向为负。这三个投影称为该点的位移分量。当然，一般说来，位移分量也是坐标x、y、z的函数。

为了描述弹性体内任一点P的形变，在这一点沿着坐标轴的正方向取三个微小线段$PA=\Delta x$，$PB=\Delta y$，$PC=\Delta z$，如图1-1。弹性体变形以后，这三个线段的长度以及它们之间的直角都将有所改变。线段的每单位长度的伸缩称为正应变，线段之间的直角的改变称为剪应变。正应变用字母ε表示：ε_x表示x方向的线段（即PA）的正应变，其余类推。正应变以伸长时为正，缩短时为负，与正应力的正负号规定相对应。剪应变用字母γ表示：γ_{xy}表示x与y两方向的线段（PA与PB）之间的直角的改变，其余类推。剪应变以直角变小时为正，变大时为负，与剪应力的正负号规定相对应（正的τ_{xy}引起正的γ_{xy}，等等）。

可以证明，如果ε_x、ε_y、ε_z、γ_{xy}、γ_{yz}、γ_{zx}这六个量在P点是已知的，就可以求得经过该点的任一微小线段的正应变，以及经过该点的任意两个微小线段之间的夹角的改变。因此，这六个量可以完全确定该点的形变状态，它们就称为在该点的形变分量。当然，一般说来，形变分量也是坐标x、y、z的函数。

六个形变分量的总体，可以用一个列阵$\{\varepsilon\}$来表示：

$$\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\\ \gamma_{xy}\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{zx}\end{Bmatrix}=[\varepsilon_x\quad \varepsilon_y\quad \varepsilon_z\quad \gamma_{xy}\quad \gamma_{yz}\quad \gamma_{zx}]^T. \tag{1-2}$$

形变分量与位移分量之间有一定的几何关系。如果我们只考虑微小的形变和位移，不计它们的二次幂和更高次幂，则此种关系可以表示成为

$$\begin{aligned}&\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}, &&\varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y}, &&\varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z},\\ &\gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}, &&\gamma_{yz}=\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}, &&\gamma_{zx}=\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}.\end{aligned} \tag{1-3}$$

这就是所谓几何方程，它们的推导可以在任一本弹性力学教程中找到。

通过表达式（1-2），六个几何方程的总体可以用一个矩阵方程来表示：

$$\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x}\\ \dfrac{\partial v}{\partial y}\\ \dfrac{\partial w}{\partial z}\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\\ \dfrac{\partial v}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial y}\\ \dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\end{Bmatrix}=\left[\frac{\partial u}{\partial x}\quad \frac{\partial v}{\partial y}\quad \frac{\partial w}{\partial z}\quad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\quad \frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\quad \frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right]^T. \tag{1-4}$$

由几何方程（1-3）可见，当弹性体的位移分量完全确定时，形变分量是完全确定的。反过来，当形变分量完全确定时，位移分量却不完全确定，这是因为，具有确定形状的物体，可能发生不同的刚体位移。为了说明这一点，试在（1-3）中命

$$\varepsilon_x=\varepsilon_y=\varepsilon_z=\gamma_{xy}=\gamma_{yz}=\gamma_{zx}=0,$$

从而有

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial x}=0, &&\frac{\partial v}{\partial y}=0, &&\frac{\partial w}{\partial z}=0,\\ &\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=0, &&\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}=0, &&\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}=0.\end{aligned}$$

积分以后，得

$$\begin{aligned}u&=u_0+\omega_y z-\omega_z y,\\ v&=v_0+\omega_z x-\omega_x z,\\ w&=w_0+\omega_x y-\omega_y x.\end{aligned} \tag{1-5}$$

式中的u_0、v_0、w_0、ω_x、ω_y、ω_z是积分常数。下面来说明这六个常数的几何意义。

当六个常数中只有u_0不为零时，由（1-5）可见，弹性体中任意一点的位移分量是$u=u_0$，$v=0$，$w=0$，这就是说，弹性体的所有各点只沿x方向移动同样的距离u_0。由此可见，u_0代表弹性体沿x方向的刚体移动。同样可见，v_0及w_0分别代表弹性体沿y方向及z方向的刚体移动。当只有ω_z不为零时，由(1-5)可见，弹性体中任意一点的位移分量是$u=-\omega_z y$，$v=\omega_z x$，$w=0$。据此，坐标为（x，y，z）的任意一点P沿着y方向移动$\omega_z x$，并沿着负x方向移动$\omega_z y$，如图1-3所示，而合成位移为

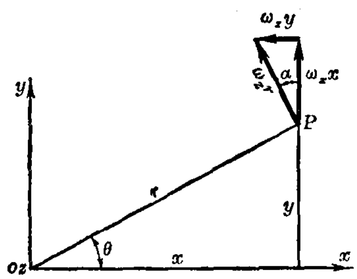

图 1-3

$$\sqrt{u^2+v^2}=\sqrt{(-\omega_z y)^2+(\omega_z x)^2}$$
$$=\omega_z\sqrt{x^2+y^2}=\omega_z r.$$

命合成位移的方向与y轴的夹角为α，则

$$\mathrm{tg}\alpha=\omega_z y/\omega_z x=y/x=\mathrm{tg}\theta.$$

可见合成位移的方向与径向线OP垂直，也就是沿着切向。既然弹性体的所有各点移动的方向都是沿着切向，而且移动的距离等于径向距离r乘以ω_z，可见（注意位移是微小的）ω_z代表弹性体绕z轴的刚体转动。同样可见，ω_x及ω_y分别代表弹性体绕x轴及y轴的刚体转动。

为了完全确定弹性体的位移，必须有六个适当的约束条件来确定这六个刚体位移u_0、v_0、w_0、ω_x、ω_y、ω_z。

§1-4 物理方程.弹性矩阵

假定所论弹性体是连续的、均匀的、完全弹性的，而且是各向同性的。这样，应力分量与形变分量之间的关系式就极为简单，已在材料力学中推导出来，抄写如下：

$$\begin{aligned}\varepsilon_x&=\frac{\sigma_x}{E}-\mu\frac{\sigma_y}{E}-\mu\frac{\sigma_z}{E},\\ \varepsilon_y&=\frac{\sigma_y}{E}-\mu\frac{\sigma_z}{E}-\mu\frac{\sigma_x}{E},\\ \varepsilon_z&=\frac{\sigma_z}{E}-\mu\frac{\sigma_x}{E}-\mu\frac{\sigma_y}{E},\end{aligned}\tag{1-6}$$

$$\gamma_{xy}=\frac{\tau_{xy}}{G},\qquad \gamma_{yz}=\frac{\tau_{yz}}{G},\qquad \gamma_{zx}=\frac{\tau_{zx}}{G}.\tag{1-7}$$

式中的E是拉压弹性模量（或简称为弹性模量），G是剪切弹性模量，μ是泊松系数，而三者之间有如下的关系：

$$G=\frac{E}{2(1+\mu)}.\tag{1-8}$$

这些弹性常数都不随应力的大小而变，不随位置坐标而变，也不随方向而变。式（1-6）及（1-7）是物理方程的第一种形式。

由（1-6）求解σ_x、σ_y、σ_z，由（1-7）求解τ_{xy}、τ_{yz}、τ_{zx}，并将（1-8）代入，得出物理方程的第二种形式如下：

$$\begin{aligned}
\sigma_x&=\frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left(\varepsilon_x+\frac{\mu}{1-\mu}\varepsilon_y+\frac{\mu}{1-\mu}\varepsilon_z\right),\\
\sigma_y&=\frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left(\frac{\mu}{1-\mu}\varepsilon_x+\varepsilon_y+\frac{\mu}{1-\mu}\varepsilon_z\right),\\
\sigma_z&=\frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left(\frac{\mu}{1-\mu}\varepsilon_x+\frac{\mu}{1-\mu}\varepsilon_y+\varepsilon_z\right),
\end{aligned}\tag{1-9}$$

$$\tau_{xy}=\frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy},\tau_{yz}=\frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{yz},\tau_{zx}=\frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{zx}.\tag{1-10}$$

这些方程可以合并起来，用矩阵方程表示为

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\\ \tau_{xy}\\ \tau_{yz}\\ \tau_{zx}\end{Bmatrix}=\frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}\begin{bmatrix}1 & & & \text{对} & & \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & & & & \\ \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & & & \text{称}\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\\ \gamma_{xy}\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{zx}\end{Bmatrix}.$$

这个矩阵方程又可以简写成为

$$\{\sigma\}=[D]\{\varepsilon\},\tag{1-11}$$

其中的

$$[D]=\frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}\begin{bmatrix}1 & & & \text{对} & & \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & & & & \\ \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & & & \text{称}\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}\end{bmatrix}.\tag{1-12}$$

称为弹性矩阵，它完全决定于弹性常数E和μ。

在某些文献里，用来表征弹性体的弹性的，不是拉压弹性模量E和泊松系数μ，而是剪切弹性模量G和所谓拉密常数

$$\lambda=\frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}.$$

这样，注意到

$$\lambda+2G=\frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)},\qquad G=\frac{E}{2(1+\mu)},$$

可以把物理方程（1-9）及（1-10）改写为

$$
\begin{aligned}
\sigma_x&=(\lambda+2G)\varepsilon_x+\lambda\varepsilon_y+\lambda\varepsilon_z,\\
\sigma_y&=\lambda\varepsilon_x+(\lambda+2G)\varepsilon_y+\lambda\varepsilon_z,\\
\sigma_z&=\lambda\varepsilon_x+\lambda\varepsilon_y+(\lambda+2G)\varepsilon_z,\\
\tau_{xy}&=G\gamma_{xy},\quad \tau_{yz}=G\gamma_{yz},\quad \tau_{zx}=G\gamma_{zx}.
\end{aligned}
$$

于是方程（1-11）中的弹性矩阵$[D]$成为

$$
[D]=\begin{bmatrix}
\lambda+2G & & & \text{对} & & \\
\lambda & \lambda+2G & & & & \\
\lambda & \lambda & \lambda+2G & & & \text{称}\\
0 & 0 & 0 & G & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & G & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G
\end{bmatrix}.
$$

这种形式的物理方程和弹性矩阵，数学工作者用得较多，力学工作者用得较少，而在工程文献中则用得很少。

§1-5 虚功及虚功方程

设有受外力作用的弹性体，如图1-4，它在 i 点所受的外力沿坐标轴分解为分量 U_i、V_i、W_i，在j点所受的外力沿坐标轴分解为分量U_j、V_j、W_j，等等，总起来用列阵$\{F\}$表示，而这些外力引起的应力用列阵$\{\sigma\}$表示：

$$
\{F\}=\begin{Bmatrix} U_i\\ V_i\\ W_i\\ U_j\\ V_j\\ W_j\\ \vdots \end{Bmatrix},\qquad
\{\sigma\}=\begin{Bmatrix} \sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\\ \tau_{xy}\\ \tau_{yz}\\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}.
$$

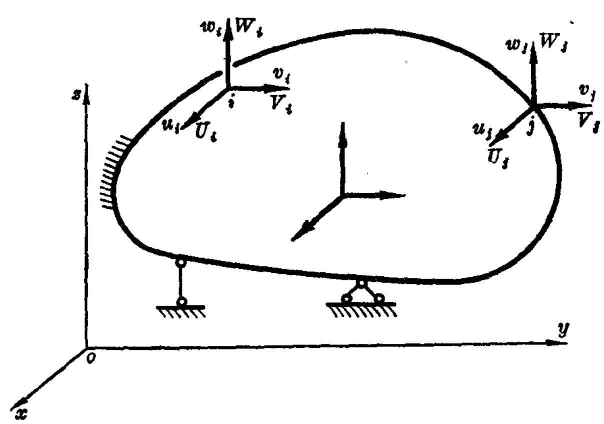

图 1-4

现在，假设弹性体发生了某种虚位移，与各个外力分量相应的虚位移分量为u_i^*、v_i^*、w_i^*、u_j^*、v_j^*、w_j^*，等等，总起来用列阵$\{\delta^*\}$表示，而引起的虚应变用列阵$\{\varepsilon^*\}$表示：

$$\{\delta^*\}=\begin{Bmatrix} u_i^* \\ v_i^* \\ w_i^* \\ u_j^* \\ v_j^* \\ w_j^* \\ \vdots \end{Bmatrix}, \qquad \{\varepsilon^*\}=\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^* \\ \varepsilon_y^* \\ \varepsilon_z^* \\ \gamma_{xy}^* \\ \gamma_{yz}^* \\ \gamma_{zx}^* \end{Bmatrix}.$$

这个虚位移和虚应变一般并不是上述实际外力引起的，而是另外的外力或其他原因引起的，更多的是我们为了分析问题而假想在弹性体中发生的。

把虚位移原理应用于连续弹性体，可以导出这样的引理：如果在虚位移发生之前，弹性体是处于平衡状态，那末，在虚位移发生时，外力在虚位移上的虚功就等于（整个弹性体内）应力在虚应变上的虚功。

在虚位移发生时，外力在虚位移上的虚功是

$$U_iu_i^*+V_iv_i^*+W_iw_i^*+U_ju_j^*+V_jv_j^*+W_jw_j^*+\cdots=\{\delta^*\}^T\{F\}.$$

在弹性体的单位体积内，应力在虚应变上的虚功是

$$\sigma_x\varepsilon_x^*+\sigma_y\varepsilon_y^*+\sigma_z\varepsilon_z^*+\tau_{xy}\gamma_{xy}^*+\tau_{yz}\gamma_{yz}^*+\tau_{zx}\gamma_{zx}^*=\{\varepsilon^*\}^T\{\sigma\},$$

因此，在整个弹性体内，应力在虚应变上的虚功是

$$\iiint\{\varepsilon^*\}^T\{\sigma\}dxdydz.$$

于是由上述推理得到

$$\{\delta^*\}^T\{F\}=\iiint\{\varepsilon^*\}^T\{\sigma\}dxdydz. \qquad (1\text{-}13)$$

这就是弹性体的虚功方程，它通过虚位移和虚应变表明外力与应力之间的关系。

应当指出：在虚位移发生时，约束力（支座反力）是不做功的，因为约束力在其所约束的方向是没有位移的。但是，如果我们解除了某一个约束，而代之以相应的约束力，那么，在虚位移发生时，这个约束力就要在相应的虚位移上做虚功，而这个约束力的分量及其相应的虚位移分量就应当作为列阵$\{F\}$及$\{\delta^*\}$中的元素进入虚功方程（1-13）。

§1-6 两种平面问题

任何一个弹性体都是空间物体，一般的外力都是空间力系，因此，严格地说，任何实际问题都是空间问题，都必须考虑所有的位移分量，形变分量和应力分量。但是，如果所考虑的弹性体具有特殊的形状，并且承受的是特殊外力，就有可能把空间问题简化为近似的平面问题，不考虑某些位移分量，形变分量或应力分量。这样处理，分析和计算的工作量将大大地减少（当然，精确度将不免有所降低）。

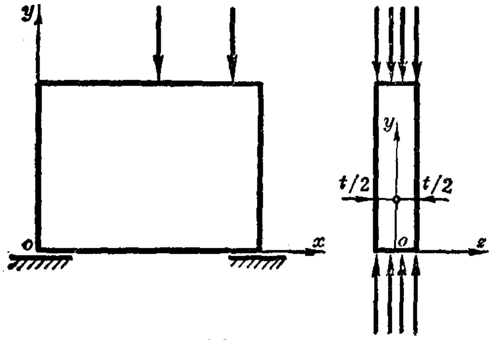

图 1-5

1.平面应力问题

设有很薄的均匀薄板，图 1-5，只在板边上受有平行于板面并且不沿厚度变化的面力，同时，体力也平行于板面并且不沿厚度变化。例如平板坝的平板支墩，以及图中所示的深梁，都属于此类。

设薄板的厚度为 t。以薄板的中面为 xy 面，以垂直于中面的任一直线为 z 轴。由于板面上不受力，所以有

$$(\sigma_z)_{z=\pm\frac{t}{2}}=0,\quad (\tau_{zx})_{z=\pm\frac{t}{2}}=0,\quad (\tau_{zy})_{z=\pm\frac{t}{2}}=0.$$

又因为板很薄，外力又不沿厚度变化，所以，可以认为在整个薄板的所有各点都有（注意到剪应力互等定律）：

$$\sigma_z=0,\quad \tau_{zx}=\tau_{xz}=0,\quad \tau_{zy}=\tau_{yz}=0.$$

这样就只剩下平行于 xy 面的三个应力分量，即 σ_x、σ_y、τ_{xy}，所以这种问题就称为平面应力问题，而应力的矩阵表示简化成为

$$\{\sigma\}=\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}. \tag{1-14}$$

由物理方程（1-7）中的后二式可见，这时的剪应变

$$\gamma_{yz}=0,\quad \gamma_{zx}=0.$$

由物理方程（1-6）中的第三式可见

$$\varepsilon_z=-\frac{\mu}{E}(\sigma_x+\sigma_y),$$

它一般并不等于零，但可由 σ_x 及 σ_y 求得，在分析问题时不必考虑。于是只需要考虑三个形变分量 ε_x、ε_y、γ_{xy}，而物理方程简化为

$$\begin{aligned}\varepsilon_x&=\frac{\sigma_x}{E}-\mu\frac{\sigma_y}{E},\\ \varepsilon_y&=\frac{\sigma_y}{E}-\mu\frac{\sigma_x}{E},\\ \gamma_{xy}&=\frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}.\end{aligned} \tag{1-15}$$

将应力分量用形变分量表示，上式成为

$$\begin{aligned}\sigma_x&=\frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x+\mu\varepsilon_y),\\ \sigma_y&=\frac{E}{1-\mu^2}(\mu\varepsilon_x+\varepsilon_y),\\ \tau_{xy}&=\frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy}=\frac{E}{1-\mu^2}\cdot\frac{1-\mu}{2}\gamma_{xy},\end{aligned} \tag{1-16}$$