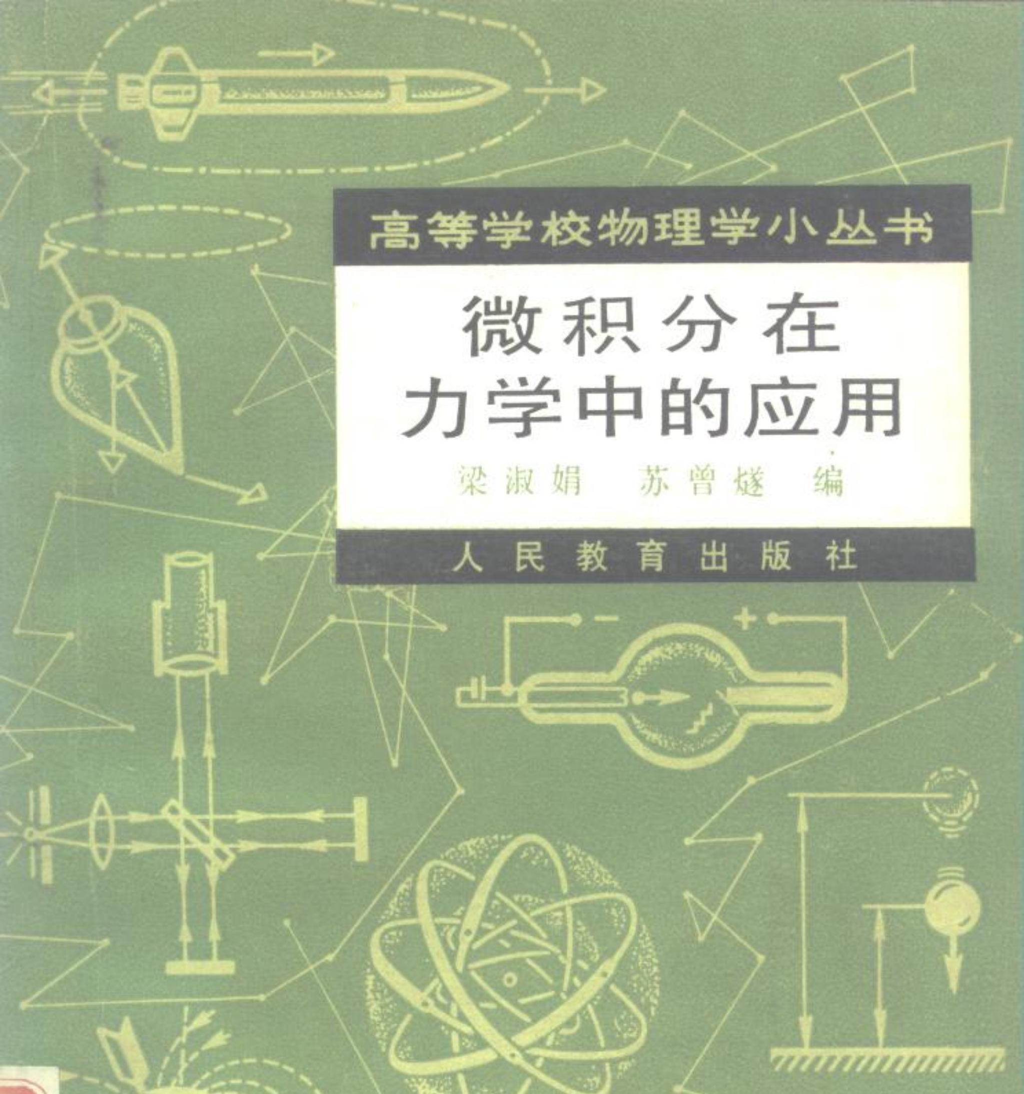

高等学校物理学小丛书

微积分在力学中的应用

梁淑娟　苏曾燧　编

人民教育出版社

高等学校物理学小丛书

微积分在力学中的应用

梁淑娟 苏曾燧 编

人民教育出版社

本书是《物理学小丛书》的一个分册，是为高等学校普通物理课教学需要编写的参考读物．

本书对普通物理力学部分所用到的微积分、微分方程的大部分内容，作了较详细的讨论和推导，并通过例题指出如何应用微积分分析和解决力学问题的方法．本书可供高等院校师生和有关读者参考．

高等学校物理学小丛书

微积分在力学中的应用

梁淑娟 苏曾燧 编

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32 印张 5 字数 130,000

1980 年 1 月第 1 版 1980 年 8 月第 1 次印刷

印数 00,001—22,500

书号 13012·0425 定价 0.38 元

前　言

本书可作为普通物理力学部分的参考书。在学习力学部分的过程中，若能掌握微积分及微分方程的基本知识，则对于分析和解决力学中的问题，对于力学中的基本概念和规律的深入理解是很有好处的。所以在编写过程中，我们对力学部分要用到微积分、微分方程的大部分内容，都作了较为详细的讨论和推导，并通过例题，给出如何应用微积分去分析和解决力学问题的方法。

在编写过程中，曾得到我校物理教研组的支持及郑荫教授的鼓励和帮助；书稿完成之后，又承西安交通大学赵富鑫教授予以审阅，赵先生提出了宝贵的意见，为此，编者对他们表示衷心的感谢。此外，书中全部例题最后由谢萍荪同学复算过一次，在此，编者也对她表示感谢。

由于我们水平有限，经验不足，书中一定会有不少的缺点和错误，诚恳地希望读者提出批评和意见。

编　者

1978 年 7 月于华南工学院

目　　录

第一章　微分的应用

§ 1·1　标量的微分

1·1·1　导数和微分

在开始讨论微分应用之前，我们先简要地复习一下导数和微分的有关概念.

在研究物体的运动时，我们常常引用距离、时间、速度等各种物理量，在一定情况下，它们彼此间存在着一定的联系. 例如，在匀速直线运动中，物体运动的位移 x 与运动时间 t 有如下的关系

$$x=vt,$$

式中 v 为物体运动的速度. 在数学上，这种依赖的关系，就是函数关系.

数学中函数的概念是这样定义的：在某一变化过程中，有两个互相联系着的变量 x 和 y，如果 x 在其变化范围内每取一个值，y 就按照确定的法则有确定的值和它对应，我们就称 y 是 x 的函数，并记为

$$y=f(x), \tag{1}$$

其中 x 叫自变量，y 叫因变量.

当变量 x 由一个数值 x_0 变到另一个数值 x_1 时，后者减去前者，叫做 x 的增量，表示为

$$\Delta x=x_1-x_0.$$

与之相对应的因变量 y 的数值将由 $y_0=f(x_0)$ 变到 $y_1=f(x_1)$，于是它的增量为

$$\Delta y=y_1-y_0=f(x_1)-f(x_0).$$

因为 $\Delta x=x_1-x_0$，即 $x_1=x_0+\Delta x$，所以

$$\begin{aligned}\Delta y&=f(x_1)-f(x_0)\\&=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).\end{aligned}$$

上式表明，函数的增量 Δy 与自变量的增量 Δx 有密切关系，两者的比，即

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}, \tag{2}$$

叫做自变量由 $x=x_0$ 到 $x=x_0+\Delta x$ 区间内函数的平均变化率。本章内将要讨论到的平均速度、平均加速度等都属于平均变化率的例子。

当 Δx 越小，$\frac{\Delta y}{\Delta x}$就越能精确反映出函数 $y=f(x)$在 x_0 这一点附近的变化率。然而当 Δx 趋近于零时，Δy 也随着趋近于零，这时单纯考虑 Δx 或 Δy 都是没有意义的，因为都不是一个有限值，但它们依赖的关系(比值)$\frac{\Delta y}{\Delta x}$在 Δx 趋于零时往往具有确定的有限值(极限值)(在物理上，这个极限值在一定情况下就具有一定的意义)，通常把$\Delta x\to 0$ 时比值$\frac{\Delta y}{\Delta x}$的极限值叫做函数$y=f(x)$对 x 的导数，并记作 y' 或 $f'(x)$，即

$$y'=f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \tag{3}$$

这时，我们也说函数 $f(x)$在 x 处可导。

在微分学中，我们把趋近于零的变量的增量 Δx 表示为 dx，而相应的函数 y 的增量 Δy 表示为 dy，dx 叫做自变量的微分，dy 叫做函数 $y=f(x)$ 在 x 处的微分。引入微分概念以后，导数则可用微分的商来表示，即

$$y'=f'(x)=\frac{dy}{dx}. \tag{4}$$

$f'(x)$ 叫做函数 $f(x)$ 对自变量 x 的一阶导数。

如果导数 $f'(x)$ 本身也是 x 的函数，我们就可以再取它对 x 的导数，这叫做函数 $f(x)$ 的二阶导数，记作 y'' 或 $f''(x)$、$\frac{d^2y}{dx^2}$ 等，即

$$y''=f''(x)=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}f'(x). \tag{5}$$

在本章内将要讨论的瞬时速度、瞬时加速度都是导数的例子.

1·1·2 直线运动中的速度和加速度

在直线运动的情况中，物体的位移、速度、加速度等物理量的方向，都在一直线上，因此，下面我们利用导数来建立速度，加速度的关系式时，对它们的方向不作考虑.

当一物体作直线运动时，它的位置可用它到坐标原点 O 的距离 x 来描述。在运动过程中 x 是随时间 t 变化的，所以 x 是 t 的函数，即

$$x=x(t). \tag{1}$$

为了建立速度的概念，我们来研究 $t=t_0$ 到 $t=t_1$ 时间间隔内物体位置的改变情况，如图1·1. 这段时间间隔为

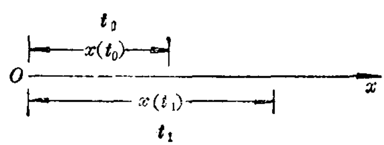

图 1·1

$$\Delta t=t_1-t_0.$$

根据 x 和 t 的关系 $x(t)$ 可知，在 t_0 和 $t_1=t_0+\Delta t$ 两个时刻，x 的数值分别为 $x(t_0)$ 和 $x(t_1)=x(t_0+\Delta t)$，因此在 $t_0\to t_1$ 这段时间间隔内，x 改变了

$$\Delta x=x(t_1)-x(t_0)=x(t_0+\Delta t)-x(t_0).$$

我们把 Δx 与 Δt 的比叫做这段时间的平均速度，用 $\bar{v}$ 表示，记作

$$\bar{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}. \tag{2}$$

平均速度 $\bar{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$反映了物体在一段时间间隔内运动的快慢．除了匀速运动的特殊情况外，$\frac{\Delta x}{\Delta t}$的数值与 Δt 大小有关，所以用 $\bar{v}$ 来描述变速直线运动是粗略的，Δt 取得愈短，则愈能精确地反映物体在 $t=t_0$时刻的运动情况．理论上，我们可以取 Δt 为无限小，即令 $\Delta t\to 0$，这时 Δt 内的平均速度就趋于一个极限值，这个极限值叫做物体在 $t=t_0$ 时刻的瞬时速度，即

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t}.$$

用导数表示为

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{dx}{dt}. \tag{3}$$

上式表示瞬时速度是函数 x 对时间 t 的一阶导数．

一般来说，物体作直线运动时，其瞬时速度也是随时间 t 变化的，即 v 也是时间 t 的函数，即

$$v=v(t).$$

在许多实际问题中，只有速度的概念还不够，我们还需要知道速度随时间变化的情况，即要建立“加速度”的概念．

平均加速度 $\bar{a}$ 和瞬时加速度 a 的概念建立与 $\bar{v}$ 和 v 相类似，首先取一段时间间隔 $\Delta t=t_1-t_0$，根据瞬时速度 v 和时间 t 的函数关系 $v(t)$ 可知，在 $t=t_0$ 和 $t=t_1$ 两时刻的瞬时速度分别为 $v(t_0)$ 和 $v(t_1)=v(t_0+\Delta t)$，因此在 $t_0\to t_1$ 这段时间间隔里 v 改变了

$$\Delta v=v(t_0+\Delta t)-v(t_0),$$

我们把 Δv 与 Δt 之比$\frac{\Delta v}{\Delta t}$叫做这段时间间隔内的平均加速度，用 $\bar{a}$ 表示，则

$$\bar{a}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v(t_0+\Delta t)-v(t_0)}{\Delta t}. \tag{4}$$

在一般变速运动中，$\bar{a}$ 与 Δt 有关，类似前面引入瞬时速度时所作的分析，当 Δt 取得愈短，则愈能反映其速度变化的情况，若取$\Delta t\to 0$，则平均加速度就趋于一个确定的极限，这个极限就是物体在 $t=t_0$ 时的瞬时加速度 a，表达式为

$$a=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v(t_0+\Delta t)-v(t_0)}{\Delta t}.$$

用导数表示为

$$a=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)=\frac{d^2x}{dt^2}. \tag{5}$$

上式表示瞬时加速度 a 是瞬时速度 $v=v(t)$ 对时间 t 的导数，而瞬时速度 v 又是函数 $x=x(t)$对 t 的导数，所以 a 是函数$x=x(t)$对 t 的二阶导数.

例 1 一球沿斜面向上滚动，经过 t 秒后与出发点的距离为 $s=3t-t^2$，式中的 s 以米为单位，t 以秒为单位. 问球的初速度是多少？何时开始下滚？

解 将运动方程 $s=3t-t^2$ 对 t 求导数，得速度

$$v=\frac{ds}{dt}=3-2t. \tag{a}$$

当 $t=0$，由上式得球的初速度

$$v_0=3\text{ 米/秒}.$$

球开始下滚时，速度 $v=0$，代入式(a)，得开始下滚的时间为

$$t=\frac{3}{2}=1.5\text{ 秒}.$$

例 2 设一质点沿 x 轴的运动规律为 $x=x_0+v_0t+\frac{1}{2}a_0t^2$，其中 x_0、v_0、a_0 均为常数，求质点在 5 秒内增加的速度和第 5 秒末的加速度.

解 将运动方程 $x=x_0+v_0t+\frac{1}{2}a_0t^2$ 对 t 求导数，便得速度

$$v=\frac{dx}{dt}=v_0+a_0t. \tag{a}$$

由此可知,当 $t=0$ 时,$v=v_0$,所以 v_0 就是初速度. 当 $t=5$ 秒时,由式(a)得

$$v=v_0+5a_0,$$

即
$$v-v_0=5a_0,$$

所以 5 秒内增加的速度为 $5a_0$.

将式(a)再对 t 求导数,得加速度

$$a=\frac{d^2x}{dt^2}=a_0.$$

这表明质点的加速度为常量,即在任何时刻其加速度为 a_0,故第 5 秒末加速度当然也是 a_0,由此可见质点的加速度与增加的速度完全是两回事,不能混为一谈.

例 3 在堤岸顶上用绳子拉小船,绳子的速度保持 3 米/秒不变,岸顶离水面的高度为20米. 当把船拉到与岸顶距离 $s_0=40$米时开始计算时间(如图 1·2). 问经过 5 秒钟后,小船的速度和加速度各是多少?

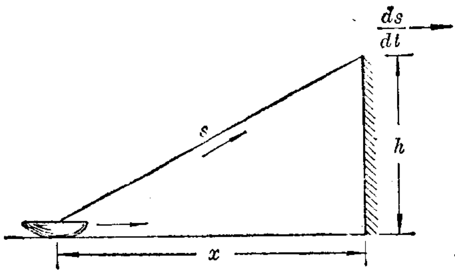

图 1·2

解 已知 $h=20$ 米

$$\frac{ds}{dt}=3\text{ 米/秒}$$

$$t=0\text{ 时},s_0=40\text{ 米}$$

求 当 $t=5$ 秒时,

$$v_x=\frac{dx}{dt}=?$$

$$a_x=\frac{d^2x}{dt^2}=?$$

设在某一时刻小船的位置如图 1·2 所示，由图得

$$s^2=h^2+x^2 \tag{a}$$

x 是小船到堤岸的水平距离，将式(a)对 t 求导数得

$$2s\frac{ds}{dt}=2x\frac{dx}{dt}, \tag{b}$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{s}{x}\cdot\frac{ds}{dt}. \tag{c}$$

因为绳子的速度为$\frac{ds}{dt}$，故在 t 秒时小船与岸顶距离为

$$s=s_0-\frac{ds}{dt}t, \tag{d}$$

当 $t=5$ 秒时，得

$$s=40-3\times5=25\text{ 米}.$$

将 s、h 值代入式(a)得

$$x=\sqrt{25^2-20^2}=15\text{米}.$$

将s、$\frac{ds}{dt}$、x 的值代入式(c)得

$$\frac{dx}{dt}=\frac{25\times3}{15}=5\text{ 米/秒}.$$

又将式(b)对 t 再求导数，有

$$2s\frac{d^2s}{dt^2}+2\frac{ds}{dt}\,\frac{ds}{dt}=2x\frac{d^2x}{dt^2}+2\frac{dx}{dt}\,\frac{dx}{dt}.$$

因为$\frac{ds}{dt}=3$ 米/秒为一恒量，故

$$\frac{d^2s}{dt^2}=0,$$

所以上式变为

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2-\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}{x},$$

将$\frac{ds}{dt}$、$\frac{dx}{dt}$、x的值代入上式得

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{3^2-5^2}{15}=-\frac{16}{15}\text{米/秒}^2.$$

负号表示加速度的符号与x的符号相反，即船作减速运动.

1·1·3 刚体转动中的角速度和角加速度

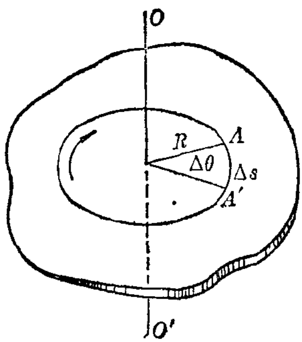

图 1·3

当刚体绕固定轴OO'转动时（图1·3），刚体上各点都绕转轴作圆周运动，但由于各点到转轴的距离不同，因而它们所走过的路程不同，同一时刻各点的速度也不同；但是刚体上每一点到转轴的垂直联线（其长度叫作该点的半径R），在同样时间内都转过相同的角度$\Delta\theta$，因此转角$\theta(t)$作为时间的函数描述了整个刚体转动的过程. 在一段时间Δt内转过的角度$\Delta\theta$叫做在Δt时间内的角位移.

类似直线运动的描述，我们用角速度、角加速度描述刚体绕固定轴的转动.

角速度是描述刚体转动的快慢程度的一个物理量. 假设在任意一段时间$t\to t+\Delta t$内，刚体的角位移是$\Delta\theta$，则角位移与时间间隔Δt的比，定义为刚体在这段时间内的平均角速度，即

$$\overline{\omega}=\frac{\Delta\theta}{\Delta t}. \qquad (1)$$

随着时间Δt趋近于零，角位移$\Delta\theta$也趋近于零，但比值$\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$却趋近于一个极限值，这个极限值定义为刚体在时刻$t$的瞬时角速度，即

$$\omega=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\frac{d\theta}{dt}. \qquad (2)$$

所以瞬时角速度 ω 就是角位移对时间的一阶导数.

刚体转动时，瞬时角速度也常常是变化的，例如启动机器时，机器转动部分的角速度则逐渐加大；制动机器时，转动部分的角速度则逐渐减小，为此我们用角加速度来描述刚体转动角速度随时间的变化情况.

假设在任意一段时间 $t\to t+\Delta t$ 内，刚体瞬时角速度由 ω 变为 $\omega+\Delta\omega$，则瞬时角速度的增量 $\Delta\omega$ 与时间间隔 Δt 的比值叫做刚体在这段时间内的平均角加速度. 当 Δt 趋近于零时，这个比值趋近的极限叫做刚体在时刻 t 的瞬时角加速度。平均角加速度 $\bar{\beta}$ 和瞬时角加速度 β 可分别用下式表示

$$\bar{\beta}=\frac{\Delta\omega}{\Delta t}, \tag{3}$$

$$\beta=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=\frac{d\omega}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)=\frac{d^2\theta}{dt^2}. \tag{4}$$

式(4)表示：瞬时角加速度是瞬时角速度对时间的导数，而瞬时角速度又是函数 $\theta(t)$ 对时间的导数，所以瞬时角加速度 β 是角位移 $\theta(t)$对时间的二阶导数.

下面，我们来确定绕固定轴转动的刚体上某一点的运动与刚体转动的关系. 如图 1·3 所示，当刚体绕固定轴转动时，刚体上任一点都绕这个轴作圆周运动，其中 A 点作半径为 R 的圆周运动，设在 Δt 时间内走过路程（弧长）为 $\overset{\frown}{\Delta s}$，而在此过程中刚体的角位移为 $\Delta\theta$，则

$$\overset{\frown}{\Delta s}=R\Delta\theta.$$

由此可求得 A 点线速度 v 与刚体角速度 ω 之间关系为

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overset{\frown}{\Delta s}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{R\Delta\theta}{\Delta t}=R\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=R\frac{d\theta}{dt}=R\omega. \tag{5}$$

将上式对时间求导数，得

$$\frac{dv}{dt}=R\frac{d\omega}{dt},$$

由于$\frac{dv}{dt}$是A点圆周运动的切向加速度a_t，$\frac{d\omega}{dt}$是刚体的瞬时角加速度β，所以

$$a_t = R\beta. \tag{6}$$

刚体上某一点A作圆周运动的法向加速度$a_n=\frac{v^2}{R}$. 利用$v=R\omega$，又可求得A点的法向加速度与刚体瞬时角速度的关系为

$$a_n=\frac{v^2}{R}=\frac{(R\omega)^2}{R}=R\omega^2. \tag{7}$$

例 1 有一架飞机，在离地面高度为h的上空以速度v飞行，飞行的高度、速度以及航向保持不变，求飞机对于地面上某给定点O的角速度. 设在考察的时刻飞机离O点的水平距离为x.

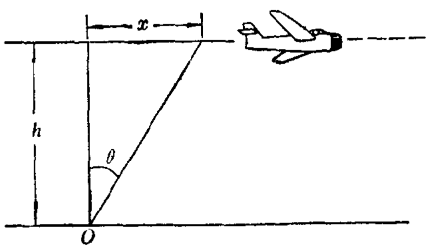

图 1·4

解 如图1·4所示，已知h, v, x，求 $\omega=?$ 从图1·4可知

$$x=h\operatorname{tg}\theta,$$

由此得 $\theta=\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{x}{h}\right)$. 角速度$\omega$等于$\theta$对时间$t$的导数，即

$$\omega=\frac{d\theta}{dt}=\frac{h}{h^2+x^2}\frac{dx}{dt}=\frac{h}{h^2+x^2}v.$$

从上面的结果可知，在头顶上角速度最大，愈远则角速度愈小. 这里只考虑了角速度的大小，而未考虑角速度的方向.

例 2 图1·5表示塔式起重机，$FC=FD=8$米，电动机A转动时，拉动FD绕F点转动，设CD段钢索的速度是-0.1米/秒(负号表示钢索缩短)，当$CD=4$米时，FD绕F点转动的角速度是多少?

解 ΔFCD是等腰三角形，E为CD段的中点，θ为FC与FD间的交角，设$CD=x$，则

$$x=2\,FD\sin\frac{\theta}{2}=16\sin\frac{\theta}{2}.$$

显然，x、θ都是时间t的函数，将上式两边对t求导数，得

$$\frac{dx}{dt}=8\cos\frac{\theta}{2}\,\frac{d\theta}{dt}.$$

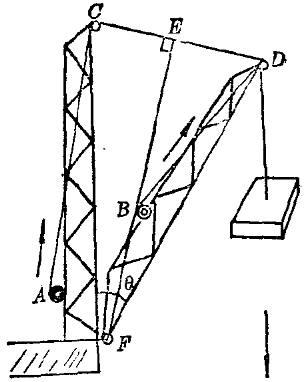

图 1·5

因为$\frac{dx}{dt}=-0.1$米/秒，所以

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{-0.1}{8\cos\frac{\theta}{2}}.$$

当 $CD=4$ 米时，$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{1}{4}$，所以

$$\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{1-\sin^2\frac{\theta}{2}}=\sqrt{1-\frac{1}{16}}=\frac{\sqrt{15}}{4}.$$

在这种情况下，FD绕F点转动的角速度为

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{-0.1}{2\sqrt{15}}=-0.013\text{ 弧度/秒}.$$

例 3 有一转动着的砂轮，当受到摩擦力矩作用的时候，其角位移θ与时间t的函数关系是

$$\theta=\frac{20\pi}{\text{秒}}t-\frac{3\pi}{\text{秒}^2}t^2$$

式中t用秒来计算. 问经过多少时间后砂轮停下来？砂轮转动的角加速度是多少？

解 将$\theta=20\pi t/\text{秒}-3\pi t^2/\text{秒}^2$对$t$求导数，得角速度

$$\omega=\frac{d\theta}{dt}=\frac{20\pi}{\text{秒}}-\frac{6\pi}{\text{秒}^2}t \tag{a}$$