函數構造論

下冊

И. П. 納唐松著

科学出版社

函數構造論

下冊

И. П. 納唐松著
何旭初　唐述釗譯

科学出版社

И. П. НАТАНСОН

КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ

Государственное издательство технико-теоретической литературы

Москва 1949 Ленинград

內容簡介

本书利用最简单的分析工具(代数多项式与三角多项式)来讨论(实变)函数的逼近理论. 共分三部分:第一篇为最佳一致逼近理论,书中限于用古典分析的方法来处理函数逼近问题. 在第二篇里,讨论了直交多项式、平方逼近及矩量问题. 最后一篇研究內插过程与机械求积的收敛性问题. 本书叙理详明,取材丰富,特别是对苏联数学家在这方面的成就进行较多叙述,同时书中几乎未用到复变函数论方法.

译本下册相当于原书的第三篇.

函数構造論

下册

И. П. 纳唐松著

何旭初 唐述钊译

*

科学出版社出版

北京朝阳門内大街 117 号

北京市书刊出版业营业許可証出字第 061 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1959年 9 月第一版　开本:850×1168 1/32

1965年 4 月第二次印刷　印张:6 1/16

印数:5,501—7,250　字数:149,000

统一书号:13031·1144

本社书号:1857·13—1

定价:[科七] 0.90 元

目　　录

第 三 篇　内插法与机械求积

第 三 篇

内插法与机械求积

第 一 章

内插法的各种形式

§1. 問題的提出

在以前几篇中我們熟悉了构成代数多項式与三角多項式的各种各样的方法,借以給出指定連續函数 $f(x)$ 的近似表达式. 这就是白恩斯坦多項式,函数 $f(x)$ 的直交展式的部分和,傅立叶和,費叶和与瓦勒-布然和等等. 在这一篇中,我們还要講一种求得近似多項式的方法:**内插方法**. 現在的問題在于作出这样的多項式 $P(x)$,使它在一些預先給定的点("内插結点")处的值与函数 $f(x)$ 的值相符合. 如果指的是通常的代数多項式的話,则从几何的观点来看,問題便归結为作出經过諸点 $(x_i, f(x_i))$ 的具适当次数的抛物綫,其中的 x_i 为内插結点. 根据这种理由,作出所述多項式的方法,便叫做抛物綫内插法. 本章所講的,主要是問題的形式方面. 在以下各章我們将研究結点无限增多时,内插多項式 $P(x)$ 的性态. 如果对于函数 $f(x)$ 不加任何限制的話,则它在結点(这些点只是确定了多項式 $P(x)$)处的值与这函数在其他点处的值便沒有絲毫关系,所以使結点个数增多,根本就不会使多項式 $P(x)$ 在内插結点以外的点处与函数 $f(x)$ 近似. 为了避免这种情形,虽然

以下所讲的很多东西可以用于更广泛的黎曼可积的函数类上[1]，而我們还是象第一篇那样只限于考虑連續函数.

因此，我們的兴趣主要是研究內插多項式 $P(x)$ 一致逼近求插函数 $f(x)$ 的問題；除此以外，我們也要講到 $P(x)$ 平均平方逼近 $f(x)$ 的問題.

象以下所看到的那样，光是函数 $f(x)$ 的連續性，还不足以使內插多項式在結点增多时就逼近 $f(x)$. 在下一章中，将举出一些具有反面性質的結果以說明这个論断. 但是，若对函数 $f(x)$ 加上补充的限制，則在适当选择扩大結点集合的規律时，就能够得出正面的結果.

对于使用不是代数多項式而是三角多項式的內插法的情形，也发生同样的問題. 如果求插函数是以 2π 为週期，則使用三角多項式的內插法是十分自然的.

§2. 拉格朗日公式

我們来考虑下述問題：給定了两組 n 个实数

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \tag{1}$$

$$y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n, \tag{2}$$

(1)中各数都不相同(关于(2)中的数不作这种假定). 今要求作出一个次数尽可能为最低的多項式 $L(x)$，使得

$$L(x_i) = y_i \ (i = 1, 2, \cdots, n). \tag{3}$$

要解这个問題，只需指出，多項式

$$l_k(x) = \frac{(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\cdots(x - x_n)}{(x_k - x_1)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdots(x_k - x_n)} \tag{4}$$

具有性質

1) 如所週知，这种函数的間断点組成的集合，其測度恒为零.

$$l_k(x_i)=\begin{cases}0, & 若\quad i\neq k,\\ 1, & 若\quad i=k.\end{cases}$$

因此多項式

$$L(x)=\sum_{k=1}^{n} y_k l_k(x) \tag{5}$$

便滿足条件(3). 这个多項式的次数不高于 $n-1$. 另一方面,满足条件(3)而次数不高于 $n-1$ 的其他多項式 $M(x)$ 不可能存在,因为否則的話,$L(x)-M(x)$ 便是一个不恆等于零的多項式,其次数不高于 $n-1$,而有 n 个根(1). 这是不可能的. 因此,多項式 $L(x)$ 便是所述問題的唯一的解. 用 x_i 与 y_i 給出的公式(5),便叫做**拉格朗日內插公式**.

多項式 $l_k(x)$(叫做**基本**多項式)可賦予更紧凑的形式,就是若令

$$\omega(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n), \tag{6}$$

就有

$$(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)=\frac{\omega(x)}{x-x_k},$$

$$(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)=$$
$$=\lim_{x\to x_k}\frac{\omega(x)}{x-x_k}=\omega'(x_k);$$

因而

$$l_k(x)=\frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x-x_k)}. \tag{7}$$

如果 $P(x)$ 是次数不超过 $n-1$ 的某一个多項式, 而 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是变元的相异值,則恆等式

$$P(x)=\sum_{k=1}^{n} P(x_k) l_k(x) \tag{8}$$

成立, 因为两端都是次数低于 n 的多項式, 而在 n 个点 x_i 处相等

的緣故；特别可得

$$\sum_{k=1}^{n} l_k(x) = 1. \tag{9}$$

設 $f(x)$ 为定义在某閉区間 $[a,b]$ 上的一个任意的函数，且結点又取自这个閉区間，則多項式

$$L(x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) l_k(x) \tag{10}$$

便是次数不超过 $n-1$ 并在諸結点 x_i 处与 $f(x)$ 重合的唯一的多項式．当然，在 $x \neq x_i$ 时 $L(x)$ 可能不与 $f(x)$ 相合．多項式(10)就叫做函数 $f(x)$ 的**拉格朗日內插多項式**．为了強調它与这个函数的依賴关系，常常把它記成 $L[f;x]$．公式(8)表示

$$L[P;x] = P(x), \tag{11}$$

如果 $P(x)$ 是一个次数低于 n 的多項式的話．

設 $f(x)$ 为定义在 $[a,b]$ 上的函数，它在那里具有 n 阶有限导数．这时对于异于全部結点 x_i 的 x 可以求得差 $f(x)-L(x)$ 的便利的表达式．实际上，对于这样的 x（把它当作是固定在閉区間 $[a,b]$ 之內的），令[1]

$$K = \frac{f(x)-L(x)}{\omega(x)}, \tag{12}$$

并設

$$\varphi(z) = f(z) - L(z) - K\omega(z).$$

这个函数定义在 $[a,b]$ 上并在那里有 n 阶有限导数，而且

$$\varphi^{(n)}(z) = f^{(n)}(z) - Kn!, \tag{13}$$

因为 $L(z)$ 是次数低于 n 的多項式，而 $\omega^{(n)}(z) = n!$．显然

$$\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = \cdots = \varphi(x_n) = 0.$$

1) 因为 $x \neq x_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$，故 $\omega(x) \neq 0$.

此外,据(12)知

$$\varphi(x)=0.$$

这就是説,导数 $\varphi'(z)$ 在 $n+1$ 个点 $x,x_1,x_2,\cdots,x_n$ 之間的 n 个区間內有 n 个根而且它們都是互异的(罗尔定理).

重复应用罗尔定理,就証明二阶导数 $\varphi''(z)$ 在 $\varphi'(z)$ 的 n 个根之間的 $n-1$ 个区間內有 $n-1$ 个(相异的!)根. 継續这种推理便可証实,在諸数 $x,x_1,\cdots,x_n$ 的最大者与最小者之間,n 阶导数 $\varphi^{(n)}(z)$ 必有一根. 我們用 ξ 来表示它,由(13)便得

$$K=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!},$$

这时公式(12)就化为带余項的拉格朗日內插公式

$$f(x)=L(x)+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\omega(x). \tag{14}$$

指出 $a<\xi<b$ 是重要的.

由公式(14)便推得了以下的簡单

定理. 設 $f(x)$ 为定义在 $[a,b]$ 上的整函数,則不論引进結点的法則怎样,只要它們的个数无限增大并且不超出 $[a,b]$ 的范围,在 $[a,b]$ 上一致有

$$\lim_{n\to\infty}L(x)=f(x).$$

实际上,若 $x\in[a,b]$,則有 $|\omega(x)|\leqslant(b-a)^n$; 另一方面,如果合

$$M_n=\max|f^{(n)}(x)|,$$

則由(14)得

$$|f(x)-L(x)|\leqslant\frac{M_n}{n!}(b-a)^n.$$

但是在第一篇第九章 §1 中,我們曾証明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{M_n}}{n}=0,$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sqrt[n]{M_n}}{n}e(b-a)\right]=0.$$

更有

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{M_n}{n^n}e^n(b-a)^n\right]=0. \qquad (15)$$

因为

$$\frac{n^n}{n!}<e^n,$$

故由(15)得

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{M_n}{n!}(b-a)^n\right]=0.$$

定理得証.

§3. 拉格朗日公式的其他形式. 牛頓公式

我們設想,已知某一函数在諸結点 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 处的值 $f(x_1)$, $f(x_2),\cdots,f(x_n)$, 并打算求出这函数在結点之外的点处的值. 如我們所知, 若这函数的构造性質十分良好,只要結点个数足够大,拉格朗日內插多項式 $L(x)$ 便是它的很好的表示. 因此自然便取 $L(x)$ 的值作为 $f(x)$ 的未知的值.

例如,設 $f(x)$为在温度为 x 时,汽鍋中蒸汽的压力. 当温度为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 时对压力进行測量并作出內插多項式,我們便得到用来計算在其他温度时的压力的公式[1]. 但是由这个例就可以看出把內插多項式写成(10)的形式是不方便的. 实际上,如果我們在温度为 x_{n+1} 时,再对压力作一次測量,則在和(10)中全部加数都改变了,而整个計算就必須从头做起. 因此就产生了牛頓的想法,把

1) 我是故意把这种情况作成公式. 实际上,直接利用內插公式来构成"經驗公式"是很少有的.

多項式 $L(x)$ 不写成(10)的形式而写成

$$L(x) = A_0 + A_1(x - x_1) + A_2(x - x_1)(x - x_2) + \cdots + \\ + A_{n-1}(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}). \tag{16}$$

在这里逐次令 $x = x_1, x = x_2, \cdots, x = x_n$,并注意到 $L(x_i) = y_i$, 我們便求得全部系数 $A_0, A_1, \cdots, A_{n-1}$. 直接看出, A_{k-1} 只依賴于 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 以及 $y_1, y_2, \cdots, y_k$, 而不依賴于 x_i 与 $y_i (i > k)$. 所以,添加新的結点只需在(16)中引进一項新的加数,而将原有的全部保留.

我們来导出計算 A_{k-1} 的公式. 因为多項式

$$L_k(x) = A_0 + A_1(x - x_1) + \cdots + \\ + A_{k-1}(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1})$$

对于 $x = x_1, x_2, \cdots, x_k$ 諸值取值 $y_1, y_2, \cdots, y_k$, 所以可以把它写成拉格朗日形式(5):

$$L_k(x) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\omega_k(x)}{\omega_k'(x_i)(x - x_i)} y_i,$$

其中

$$\omega_k(x) = (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_k).$$

这就是說,它的最高次項系数 A_{k-1} 是

$$A_{k-1} = \sum_{i=1}^{k} \frac{y_i}{\omega_k'(x_i)}. \tag{17}$$

余下只須指出

$$\omega_k'(x_i) = (x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{i-1}) \times \\ \times (x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_k). \tag{18}$$

例如

$$A_0 = y_1, \quad A_1 = \frac{y_1}{x_1 - x_2} + \frac{y_2}{x_2 - x_1},$$

$$A_2=\frac{y_1}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+\frac{y_2}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+$$
$$+\frac{y_3}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}.$$

我們較詳細地来講一講当結点构成算术級数时的特殊情形。为此目的，我們来定义差分的概念．設

$$y_0, y_1, y_2, y_3, \cdots \tag{19}$$

为某一有限或无限数列；令[1)]

$$\begin{aligned}
&\Delta y_k = y_{k+1}-y_k,\\
&\Delta^2 y_k = \Delta y_{k+1}-\Delta y_k,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\Delta^{n+1} y_k = \Delta^n y_{k+1}-\Delta^n y_k,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,
\end{aligned}$$

不难看出

$$\begin{aligned}
&\Delta^2 y_k = y_{k+2}-2y_{k+1}+y_k,\\
&\Delta^3 y_k = y_{k+3}-3y_{k+2}+3y_{k+1}-y_k.
\end{aligned}$$

一般說来

$$\Delta^n y_k=\sum_{r=0}^{n}(-1)^{n-r}C_n^r y_{k+r}, \tag{20}$$

这一点容易用完全归納法来証实．諸量 $\Delta y_k, \Delta^2 y_k, \cdots$ 便叫做数列(19)的一阶差，二阶差，$\cdots$．

指明了这个以后，我們轉到公式(16)上来，并假定諸結点为

$$x_1=a, x_2=a+h, x_3=a+2h, \cdots, x_n=a+(n-1)h,$$

其中，h 是一个异于零的数．

在这种情形下将有

$$x_i-x_r=(i-r)h,$$

1) 其实，由变数 y 出发我們就构成了新变数 $\Delta y, \Delta^2 y, \cdots$．所以諸記号 $(\Delta y)_k$，$(\Delta^2 y)_k, \cdots$ 便比較自然了．

因而由(18)得

$$\omega_k'(x_i) = (-1)^{k-i} h^{k-1} (i-1)!(k-i)!.$$

代入(17)中,我們便得到

$$A_{k-1} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(-1)^{k-i} y_i}{h^{k-1}(i-1)!\,(k-i)!},$$

或

$$A_{k-1} = \frac{1}{h^{k-1}(k-1)!} \sum_{r=0}^{k-1} (-1)^{k-1-r} C_{k-1}^{r} y_{r+1}.$$

将这个結果与(20)比較,最后便得

$$A_{k-1} = \frac{\Delta^{k-1} y_1}{h^{k-1}(k-1)!},$$

而公式(16)便呈下形:

$$L(x) = y_1 + \frac{\Delta y_1}{h}\frac{x-a}{1!} + \frac{\Delta^2 y_1}{h^2}\frac{(x-a)(x-a-h)}{2!} + \cdots +$$

$$+ \frac{\Delta^{n-1} y_1}{h^{n-1}} \frac{(x-a)(x-a-h)\cdots[x-a-(n-2)h]}{(n-1)!}. \quad (21)$$

公式(21)叫做**牛頓內插公式**.

当

$$y_k = f[a+(k-1)h]$$

时,便可以应用記号

$$\Delta^n y_k = \Delta^n f[a+(k-1)h].$$

在这种記号下,牛頓公式呈下形[1]:

$$L[f;x] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Delta^k f(a)}{h^k} \frac{(x-a)(x-a-h)\cdots[x-a-(k-1)h]}{k!}. \quad (22)$$

1) 这时 $\Delta^0 y_k = y_k$, $\Delta^0 f(a) = f(a)$.

特别,若$P(x)$为低于n次的多項式,則对任意的a与h,恆等式

$$P(x) = \\ = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Delta^k P(a)}{h^k} \frac{(x-a)(x-a-h)\cdots[x-a-(k-1)h]}{k!}. \tag{23}$$

都成立.

例. 設

$$P(x) = \frac{(n-x)(n-1-x)\cdots(2-x)}{n!}, \quad a = 0, \quad h = 1.$$

在这种情形下

$$P(a) = 1, \quad P(a+h) = \frac{1}{n},$$

$$P(a+2h) = \cdots = P[a+(n-1)h] = 0,$$

所以

$$\Delta^k P(a) = \sum_{r=0}^{k} (-1)^{k-r} C_k^r P(a+rh) = (-1)^k \frac{n-k}{n}.$$

因而

$$\frac{(n-x)(n-1-x)\cdots(2-x)}{n!} = \\ = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{n-k}{n} \frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}.$$

其中令$x = n + m$,我們便得到有用的恆等式:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{n-k}{n} C_{n+m}^k = (-1)^{n-1} \frac{(n+m-2)!}{(m-1)!n!}. \tag{24}$$

以后,还必須在另外的形式下来使用这个恆等式.

那就是,在(24)中把k換成$n-i$并交換n和m的位置,我們便得到

$$\sum_{i=0}^{m} (-1)^{m-i} \frac{i}{n} C_{n+m}^{n+i} = (-1)^{m-1} \frac{(m+n-2)!}{(m-1)!n!}. \tag{25}$$

§ 4. 具多重結点的內插法

在以前各节中，內插多項式是根据它自己在結点处的值构成的，現在我們提出更一般的問題：給定了結点(1)以及諸数

$$
\begin{array}{l}
y_1, y_1', \cdots, y_1^{(a_1-1)}, \\
y_2, y_2', \cdots, y_2^{(a_2-1)}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_n, y_n', \cdots, y_n^{(a_n-1)}.
\end{array}
$$

要求作出滿足条件：

$$H^{(r)}(x_i) = y_i^{(r)} \quad (i = 1,2,\cdots,n; r = 0,1,\cdots,a_i - 1) \tag{26}$$

的次数最低的多項式 $H(x)$.

額尔米特 (Hermite)[2]曾研究过这种形式的內插法.

容易看出，所提出的問題有解，而且还是唯一的. 实际上，令

$$P_i(x) = A_0^{(i)} + A_1^{(i)}(x - x_i) + \cdots + A_{a_i-1}^{(i)}(x - x_i)^{a_i-1},$$

并設

$$
\begin{aligned}
H(x) = P_1(x) + (x - x_1)^{a_1}P_2(x) + \cdots + \\
+ (x - x_1)^{a_1}(x - x_2)^{a_2}\cdots(x - x_{n-1})^{a_{n-1}}P_n(x).
\end{aligned} \tag{27}
$$

因为 $H(x) - P_1(x)$ 以 x_1 为 a_1 重根，故将(27)連續微分 $a_1 - 1$ 次并在(27)及所得諸等式中令 $x = x_1$，我們便求得多項式 $P_1(x)$ 的全部系数. 在这之后，根据等式

$$\frac{H(x) - P_1(x)}{(x - x_1)^{a_1}} = P_2(x) + \cdots + (x - x_2)^{a_2}\cdots(x - x_{n-1})^{a_{n-1}}P_n(x),$$

用同样的方法我們便求得多項式 $P_2(x)$ 的系数；余类推. 最后，$H(x)$的所有系数便都确定了. 显然，$H(x)$的次数将不高于 $m-1$，在这里 $m = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$；另一方面，次数不高于 $m - 1$ 的任何其他的多項式 $M(x)$，都不会滿足(26)中的全部条件，因为

否則的話，差 $H(x)-M(x)$ 便要有 m 个根（它們的重数要計算在內）.

可以求出用所述条件来表示多項式 $H(x)$ 的系数的公式，但是我們不就一般形式来考虑这个問題，而只限于下列三种特例：

I. 設 $a_1=a_2=\cdots=a_n=1$，則所述問題就化为构成拉格朗日內插多項式的問題；

II. 設 $n=1$，即只有一个結点，則泰勒（Taylor）多項式

$$H(x)=y_1+\frac{y_1'}{1!}(x-x_1)+\cdots+\frac{y_1^{(a_1-1)}}{(a_1-1)!}(x-x_1)^{a_1-1}$$

便是問題的解；

III. 設 $a_1=a_2=\cdots=a_n=2$，則問題的解可由公式

$$H(x)=\sum_{k=1}^{n}y_k\left[1-\frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x-x_k)\right]l_k^2(x)+$$
$$+\sum_{k=1}^{n}y_k'(x-x_k)l_k^2(x) \tag{28}$$

給出，其中象以前一样

$$\omega(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n),\; l_k(x)=\frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x-x_k)}.$$

为了証明公式(28)，我們首先指出多項式 $H(x)$ 的次数不高于 $2n-1$；另一方面，容易証明

$$H(x_i)=y_i,\quad H'(x_i)=y_i'\quad(i=1,2,\cdots,n). \tag{29}$$

实际上

$$l_k'(x)=\frac{\omega'(x)(x-x_k)-\omega(x)}{\omega'(x_k)(x-x_k)^2}.$$

这就表示，根据洛毕达（L'Hospital）法則

$$l_k'(x_k)=\lim_{x\to x_k}l_k(x)=$$
$$=\lim_{x\to x_k}\frac{\omega''(x)(x-x_k)+\omega'(x)-\omega'(x)}{2\omega'(x_k)(x-x_k)}=\frac{\omega''(x_k)}{2\omega'(x_k)}.$$