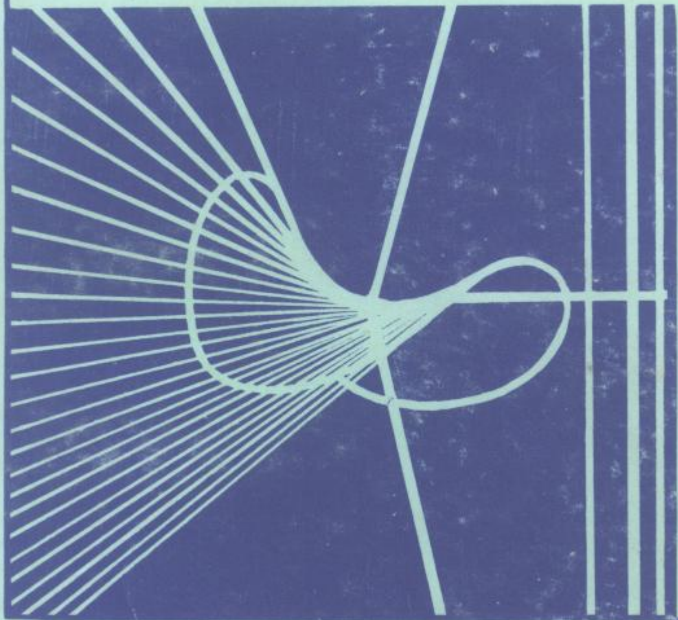
JIDAYUJIXIAO



极大与极小

大连理工大学出版社

极 大 与 极 小

张义燊 编著

大 连 理 工 大 学 出 版 社

内 容 简 介

本书主要介绍了用初等方法求解的极值问题，一元函数的极值问题和多元函数的极值问题，在层次上又对约束（条件）极值和无约束（非条件）极值问题进行了实例研究。最后对应用广泛的线性规划作了初步介绍。各章后均附有习题，书末列有附录，便于读者阅读时翻阅。本书层次清晰，内容简明扼要，所选例题形式多样，可供大、中学生课外阅读和有关教师参考。

2192/03

极大与极小

Jida Yu Jixiao

张义粲 编著

大连理工大学出版社出版发行 辽宁省新华书店经销
（大连市甘井子区凌水河） 大连市科技干部进修学院综合经销处印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32 印张：4 1/2 字数：97千字
1988年12月第1版 1988年12月第1次印刷
印数：0001—3000册

责任编辑：凌 子 封面设计：羊 戈
责任校对：苗 田

ISBN 7-5611-0120-1/O·20 定价：0.81元

前　　言

极大、极小问题（统称极值问题），作为导数的应用，一般微积分教材均有介绍，一般的中学数学教材也有若干用初等方法解极值问题的内容。本书的目的是对极值问题做一较为深入和详细的介绍，为大、中学生提供一本数学补充读物。全书共分三章。

第一章介绍用初等数学方法求解的极值问题，有较多的例题和习题。只用到中学的代数、几何和三角知识，可供中学生阅读。

第二章介绍无约束极值（又称无条件极值）。其中前半部分介绍一元函数极值问题，有较多的例题和习题，只涉及微分学。学过简单微积分的读者就可阅读。后半部分介绍多元函数极值问题，内容比一般的高等数学教材稍丰富。这章还简要地介绍了某些求极值的近似方法，如不用导数的黄金分割法和用导数的牛顿搜索法等。

第三章介绍约束极值（又称条件极值）。前半部分用较多例子介绍著名的拉格朗日乘子法。后半部分对应用广泛的线性规划作了初步介绍。

最后部分是附录，对第二和第三章中涉及的凸集和凸函数概念作了简要介绍。

书中有些地方涉及线性代数，没学过线性代数的读者可以略过不读。

大连理工大学施光燕教授对本书习题做了校核。曹绳武副教授仔细审阅了全部书稿并进行了修改。出版社有关同志和责任编辑高晓凌对本书的写作提出了很多好意见。谨表感谢。

编者　1988年5月

目　　录

引　言

求给定函数的极大值和极小值（统称极值）是个复杂而又实际的问题。在人类生活和生产活动中，经常碰到寻求最优或较优方案的问题。例如，木工要将一根圆木锯成方木，他就会考虑如何锯法才能使废料最少。又如要造一只船，就须考虑船的形状以便在航行时使其所受阻力最小。化工厂的原料配方、铁路调度、交通运输和仓库管理等都需要寻求最优或较优方案。这些问题归结成数学问题都可看作是求函数极值的问题。已故著名数学家华罗庚教授生前提倡的优选法和统筹法都是寻找最优或较优方案的实用方法。

对于一件事情，采用最优方案与否，其结果是大不一样的。如大连理工大学应用数学系教师，1983年用线性规划方法对某钢厂的产品结构进行分析，提出了建议，厂方采纳之后，一年提高产值达五百七十万元（1984年1月部级鉴定）。又如“图论”中的所谓“中国投递员问题”，也是一个寻求最优方案的问题。其内容是：一个投递员应如何选择道路，才能既把所有的信件送到，又使他所走的路程最短？这是现任山东师范大学校长管梅谷教授于1960年根据生产实践提出来的，这一问题至今还未得到完全解决。管教授提出这个问题之后，根据图论的方法，对一些特殊情形给出了解法。

两点之间直线最短，大圆弧是球面上两点间最短的曲线。所有等长闭曲线中，圆的面积最大。所有等面积的闭曲

面中，球的体积最大。这类极大极小问题，在古希腊时人们就知道，不过他们只能说出其结果而未认真加以证明。希腊的发现之中，最重要的一个，要算公元一世纪亚历山大的科学家赫伦所发现的光的直线传播的特性（见本书§1·5中例18）。从17世纪起，极大极小问题才有了一般的理论。费尔马(1601—1665)最早写了一本求函数最大与最小的书，他希望用一般的方法来研究极大极小问题。17世纪后期微积分的出现找到了函数取极值的条件。17世纪以后变分法的创立使极大极小问题的研究范围更加广阔，人们逐渐认识到自然界的物理法则，用极小原理表示最为适宜。利用极小原理，足以使我们能够解决各种特殊的问题。20世纪40年代末出现了电子计算机，随着电子计算机的发展，求函数极值的方法也随之有所丰富和提高，产生了数学规划论，借助电子计算机，人们已经可以解决非常复杂的最优化问题。当今世界，不仅工程技术，就是政治、经济管理、军事和公用事业等方面，都须用到"最优化"方法。

最优化问题虽然是大量而又普遍存在的，但是发现和解决它却是另一回事。许多事情人们习以为常，不去思考，即使是非常简单的事情也提不出什么问题。例如第二次世界大战中，某个阵地士兵就餐之后，排着长队洗涮他们的餐具。一位应用数学工作者到阵地就任第一天就发现了这个问题，他注意到那里有四个盆，两个为洗盆，两个为涮盆，平均起来，士兵洗餐具比涮餐具的速度慢三倍。于是他建议，把四个盆改为三个洗盆，一个涮盆，这样，就解决了士兵排长队的现象。这个例子说明，不一定需要高深的数学工具也能发现和解决问题，但勤于思考和善于思考则是不可少的。

第一章　简单极值问题

我们首先从简单极值问题讲起。所谓简单极值问题是指可用初等数学方法求解的极值问题。在初等数学中，对于不同的极值问题有一些特殊的解法，现介绍如下。

§1·1　配　方　法

此种方法适用于求解二次函数的极值问题。函数$y=3x^2+5x+2$，$y=2x^2-7$和$y=-5x^2+6x$称为二次函数，其一般形式为

$$y=ax^2+bx+c \qquad (a\neq 0) \tag{1-1}$$

它的图形为抛物线（图1.1）。

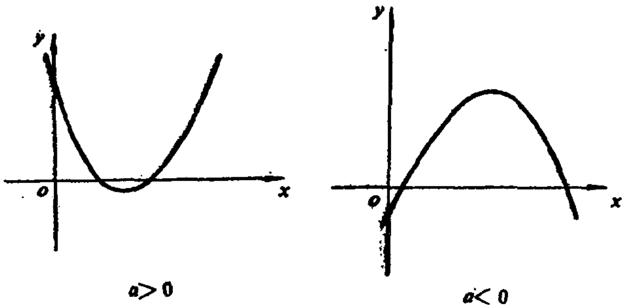


图1.1　二次函数的图形

对(1-1)式右端进行配方，我们有

$$\begin{aligned} y&=ax^2+bx+c \qquad (a\neq 0)\\ &=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c\\ &=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a} \end{aligned}$$

因为对于一切 x 都有

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\geqslant 0$$

所以，若$a>0$，则不管 x 取什么值，都有

$$y\geqslant\frac{4ac-b^2}{4a}$$

若$a<0$，则不管 x 取什么值，都有

$$y\leqslant\frac{4ac-b^2}{4a}$$

当$x=-\dfrac{b}{2a}$时，不论 $a>0$ 或 $a<0$，上面两个不等式都取等号。因此，我们得到如下结论：

对于二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$，若 $a>0$，则$x=-\dfrac{b}{2a}$为极小点，极小值为

$$y=\frac{4ac-b^2}{4a} \tag{1-2}$$

若$a<0$，则 $x=-\dfrac{b}{2a}$为极大点，极大值为

$$y=\frac{4ac-b^2}{4a} \tag{1-3}$$

我们称这种求极值的方法为**配方法**。

例1 将给定正数A分解为两数之和使其乘积最大。

解 令所求两数之一为x，则另一数为$A-x$，它们之积为

$$y=x(A-x)$$

或
$$y=-x^2+Ax$$

这是一个二次函数，可用配方法求极值。

$$y=-\left(x^2-Ax+\frac{A^2}{4}\right)+\frac{A^2}{4}$$

$$=-\left(x-\frac{A}{2}\right)^2+\frac{A^2}{4}\leqslant\frac{A^2}{4}$$

当$x=\frac{A}{2}$时等号成立。故当$x=\frac{A}{2}$时$y=\frac{A^2}{4}$为最大。这表明，将A平分时其乘积最大。

此题也可用公式（1-3）来求解，因为这里

$$a=-1,\ b=A,\ c=0,$$

故当$x=-\frac{b}{2a}=\frac{A}{2}$时，$y=\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{A^2}{4}$为最大。

例2 给定正方形$ABCD$，由它的四个顶点沿每边各取一个长度相等的线段AE，BF，CG和DH。分别用直线联结E，F，G，H四点。问AE取多长才能使正方形$EFGH$的面积最小？（图1.2）

解 设$AE=x$，给定正方形的一边长为l，则

$$EB=l-x$$

$$BF=x$$

由勾股定理知

$$EF=\sqrt{x^2+(l-x)^2}$$

$$=\sqrt{2x^2-2lx+l^2}$$

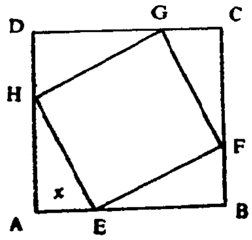


图1.2

容易证明四边形$EFGH$为正方形，因此将EF平方，得正方形$EFGH$的面积为

$$S=2x^2-2lx+l^2$$

这是一个二次函数，可用公式（1-2）或配方法求解。

因为 $$S=2\left(x^2-lx+\frac{l^2}{4}\right)+l^2-\frac{l^2}{2}$$

$$=2\left(x-\frac{l}{2}\right)^2+\frac{l^2}{2}$$

所以，$x=\frac{l}{2}$时，正方形$EFGH$的面积$S=\frac{l^2}{2}$最小。

例3 在给定正圆锥中作一个侧面积最大的正圆柱（图1.3）。

解 设给定圆锥的底半径和高分别为R和H，所作圆柱的底半径和高分别为r和h，则所作圆柱的侧面积为

$$S=2\pi rh$$

r和h的关系可用相似三角形原理求得。因为直角三角形EBC与直角三角形GBF相似，故有

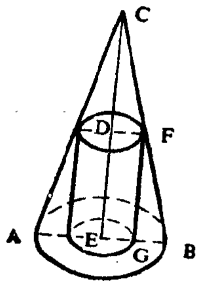


图1.3

$$\frac{h}{H}=\frac{R-r}{R}$$

或
$$h=\frac{H}{R}(R-r)$$

代入S 的表达式中，得

$$S=2\pi\frac{H}{R}(R-r)r$$

$$=-2\pi\frac{H}{R}r^2+2\pi Hr$$

这是一个以 r 为自变量的二次函数，可用公式（1-3）或配方法求解，当$r=\frac{R}{2}$时 $S=\frac{1}{2}\pi RH$ 为最大。

有些极值问题虽然不是二次函数的极值问题，但可经过适当变换化为二次函数的极值问题来求解。

例4 求 x,y,z 值，使之既满足条件

$$2x-y-3=0$$
$$y-z+3=0$$

又使$w=x^2+y^2+z^2$ 取极值。

解 解联立方程式

$$\begin{cases}2x-y-3=0\\ y-z+3=0\end{cases}$$

得
$$\begin{cases}x=\frac{1}{2}z\\ y=z-3\end{cases}$$

代入 $w=x^2+y^2+z^2$，得

$$w=\frac{1}{4}z^2+(z-3)^2+z^2$$

$$=\frac{9}{4}z^2-6z+9$$

这是关于 z 的二次函数。

用公式（1-2）可求得当 $z=\frac{4}{3}$ 时 w 取最小值。将 $z=\frac{4}{3}$ 代入 x 和 y 的表达式中，便得到使 w 取最小值的 x，y 和 z 的值，分别为

$$x=\frac{2}{3}, \quad y=-\frac{5}{3}, \quad z=\frac{4}{3}$$

例5 在半径为 r 之圆内，作一个三角形，以圆心 O 为顶点，弦 AB 为底边，问 $\angle AOB$ 多大时，$\triangle OAB$ 的面积为最大？并求其最大面积。

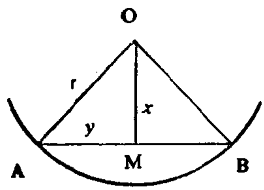


图1.4

解 从 O 作弦 AB 的垂线 OM（图1.4），设 $AM=y$，$OM=x$，则所求 $\triangle OAB$ 的面积为

$$S=xy$$

因为 $$y=\sqrt{r^2-x^2}$$

所以 $$S=x\sqrt{r^2-x^2}$$

这不是二次函数，我们可做如下处理。将 $S=x\sqrt{r^2-x^2}$ 两端平方，得

$$S^2=x^2(r^2-x^2)$$

令 $$x^2=z,\ S^2=w$$
得 $$\begin{aligned} w&=z(r^2-z) \\ &=-z^2+r^2z \end{aligned}$$

这是关于 z 的二次函数，用公式（1-3）可求得当 $z=\frac{r^2}{2}$ 时，w 取最大值，亦即 S 取最大值。因为 $z=x^2$，故得当 $x=\frac{r}{\sqrt{2}}$，$y=\frac{r}{\sqrt{2}}$ 时三角形面积的值最大。即 $\angle AOB=90°$ 时，得最大面积为 $\frac{r^2}{2}$。

§1·2 判别式法

此法用于求解二次分式函数

$$y=\frac{a_1x^2+b_1x+c_1}{a_2x^2+b_2x+c_2}\ (a_1\text{和}a_2\text{不同时为零}) \qquad (1\text{-}4)$$

的极值问题。方法如下：用分母 $a_2x^2+b_2x+c_2$ 乘（1-4)式两端，得

$$(a_2x^2+b_2x+c_2)y=a_1x^2+b_1x+c_1$$

整理为 $$(a_2y-a_1)x^2+(b_2y-b_1)x+(c_2y-c_1)=0 \qquad (1\text{-}5)$$

这是一个关于 x 的二次方程，它有实根的条件是它的判别式

$$\Delta=(b_2y-b_1)^2-4(a_2y-a_1)(c_2y-c_1)\geqslant 0 \qquad (1\text{-}6)$$

若能由这个不等式解出 y 的取值范围，便可求出 y 的极值。我们称这一求极值方法为判别式法。

例6 求二次分式函数

$$y=\frac{x^2+x+1}{x^2+2x+2}$$

的极值。

解 将所给的二次分式函数化为关于x的二次方程

$$(y-1)x^2+(2y-1)x+(2y-1)=0 \qquad (1\text{-}7)$$

方程 (1-7) 有实根的条件为

$$(2y-1)^2-4(y-1)(2y-1)\geqslant 0$$

化简，得

$$-4y^2+8y-3\geqslant 0$$

或 $$4y^2-8y+3\leqslant 0$$

或 $$(2y-3)(2y-1)\leqslant 0$$

欲使这个不等式成立须其中两个因子异号，故这个不等式等价于下列两个不等式组：

$$\begin{cases}2y-3\leqslant 0\\2y-1\geqslant 0\end{cases}$$

和

$$\begin{cases}2y-3\geqslant 0\\2y-1\leqslant 0\end{cases}$$

后一不等式组无解，前一不等式组的解为

$$\frac{1}{2}\leqslant y\leqslant\frac{3}{2}$$

故y的最小值为$\frac{1}{2}$，最大值为$\frac{3}{2}$。相应的x值可将$y=\frac{1}{2}$和$y=\frac{3}{2}$分别代入 (1-7) 式后，解一个二次方程求得