

化工自动化丛书

现代控制理论基础

中 册

最优控制

涂肇生 王翼 编

化学工业出版社

化工自动化丛书

现代控制理论基础

中 册

最优控制

涂肇生 王 翼 编

化 工 部 出 版 社

《现代控制理论基础》一书分上、中、下三册出版。本分册为中册第三篇最优控制部分，共包括七章。第十章叙述最优控制问题的提法，介绍状态空间方法的一些基本知识，如可控与可观性等；第十一章阐述解决最优控制的一个基本方法——最小值原理，第十二、十三章是利用最小值原理，解决两类在线控制问题，即快速最优控制和状态最优调节器问题；第十四章讨论最优控制的数值计算方法，介绍了梯度法和共轭梯度法；第十五章叙述离散系统的最优控制，着重介绍离散系统的动态规划方法；第十六章在第十五章的基础上，扼要地介绍处理连续系统最优控制的另一个重要方法——连续系统的动态规划。

本书供化工和其它工业部门自动化专业的工程技术人员阅读，也可作为高等院校控制理论和自动化专业高年级学生、研究生的教学参考书。也可供从事化工及其它系统工程工作和做最优化设计时参考。

本书第十、十一、十二、十三章由涂肇生编写，第十四、十五、十六章由王翼编写。由厦门大学李文清教授审阅。

化工自动化丛书
现代控制理论基础
中 册
最 优 控 制
涂肇生 王 翼 编

化学工业出版社出版

(北京和平里七区十六号楼)

化学工业出版社印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行

开本 $787 \times 1092^{1/32}$ 印张 $9^{1/16}$ 字数200千字 印数1—6,000

1981年12月北京第1版1981年12月北京第1次印刷

统一书号15063·3313 定价0.95元

编写说明

近年来，随着化学工业和自动化科学技术的迅速发展，化工自动化技术有了新的进展。以现代控制理论为基础的各种新型控制方法和调节系统相继成功地应用于化工生产，新型的自动控制技术工具以及电子计算机也日益广泛地用于化工自动化领域。

为了总结交流我国化工生产应用自动化技术的经验，介绍新的调节理论和控制方法，提高从事化工自动化工作的工人和技术人员的理论和技术水平，促进化工自动化工作的发展。一九七五年，在《炼油、化工自动控制设计业务建设会议》上，决定由化工部炼油、化工自动控制设计技术中心站负责，组织有关院校、科研设计单位和工厂，编写一套《化工自动化丛书》。

《化工自动化丛书》是在普及基础上侧重提高的一套读物，主要包括经典和现代控制理论，各类调节系统和化工单元操作控制等方面的题材。“丛书”内容力求密切反映化工应用的特点，做到理论联系实际，既阐明基本概念，作出理论分析，又叙述工程应用方法和应用实例，说明具体实施方案和现场运行经验。

《化工自动化丛书》编审组成员

兰州化学工业公司设计院（组长）

浙江大学化工自动化教研组（组长）

兰州化学工业公司石油化工厂

上海炼油厂

北京化工学院

上海化工学院

化学工业部第三设计院

化学工业部化工设计公司

数学符号说明

\mathbf{x}		n 维状态向量
\mathbf{y}		r 维输出向量
\mathbf{u}		m 维控制向量
λ		n 维协状态向量
\mathbf{o}		零向量
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{P}$		矩阵
\mathbf{O}		零矩阵
\mathbf{A}^{-1}		\mathbf{A} 的逆矩阵
$\mathbf{A}^T, \mathbf{x}^T$		矩阵 \mathbf{A} 的转置, 向量 \mathbf{x} 的转置
\mathbf{R}^n		n 维欧氏空间
$\dot{\mathbf{x}}(t)$		$\mathbf{x}(t)$ 对时间的导数 $\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}$
$\dot{\mathbf{A}}(t)$		矩阵 $\mathbf{A}(t)$ 对时间的导数
$ \mathbf{a} $		\mathbf{a} 的绝对值
$ \mathbf{A} , \det \mathbf{A}$		方阵 \mathbf{A} 的行列式
$\exp \mathbf{A}$		指数矩阵 $e^{\mathbf{A}}$
$\operatorname{sgn} \sigma$	符号函数, $\operatorname{sgn} \sigma =$	$\begin{cases} 1 & \text{当 } \sigma > 0 \text{ 时} \\ -1 & \text{当 } \sigma < 0 \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } \sigma = 0 \text{ 时} \end{cases}$
SGNb		向量符号函数
	$\mathbf{b} =$	$\operatorname{SGNb} =$
	$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \operatorname{sgnb}_1 \\ \operatorname{sgnb}_2 \\ \vdots \\ \operatorname{sgnb}_m \end{pmatrix}$

ReS

复数 S 的实部

$\sigma(A)$

方阵 A 的特征值的集合

$\frac{\partial H}{\partial u}$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial u_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial u_m} \end{pmatrix}$$

max

最大

min

最小

\in

属于

\subset

包含

\cup

集合的并

\triangleq

规定

目 录

第三篇 最优控制

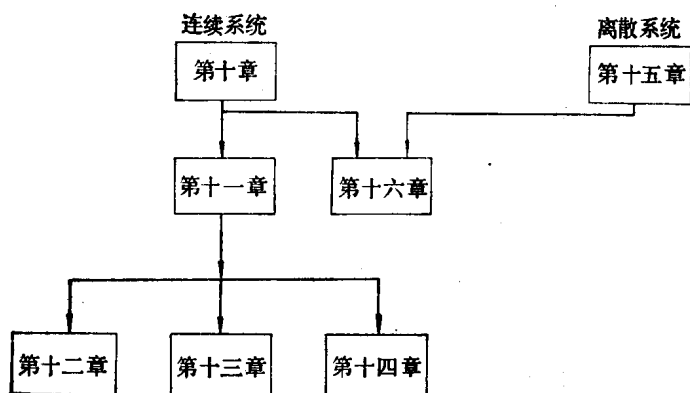
第十章 最优控制问题的提法	3
第一节 状态方程	3
第二节 状态方程与传递函数	8
第三节 可控性与可观测性	23
第四节 最优控制问题的提法	39
第十一章 最小值原理	48
第一节 最小值原理的引进	48
第二节 最小值原理	56
第三节 数值的例子	60
*第四节 几点说明	68
第十二章 快速最优控制	77
第一节 快速最优控制原理	77
第二节 快速最优控制系统的设计	88
第三节 在阶跃干扰作用下的快速最优控制	112
*第四节 例子	124
第十三章 线性二次型最优控制问题	139
第一节 状态调节器问题	141
第二节 非时变状态调节器	152
第三节 状态调节器的频率特性	162
第四节 具有指定的稳定度的最优调节	169
第五节 在阶跃干扰作用下的状态调节器问题	175
第六节 带有观测器的最优调节	184

*第七节	最优调节器在鲁棒控制器设计中的应用	195
第十四章	最优控制的数值计算	213
第一节	梯度法	214
第二节	共轭梯度法	224
第三节	一维寻找	227
第四节	约束条件	230
第五节	例子	234
第十五章	离散系统的最优控制	
	——动态规划法	239
第一节	离散系统最优控制问题的提法	239
第二节	动态规划	245
第三节	线性二次型问题的解	258
第四节	非时变控制器	265
*第五节	例子	269
*第十六章	连续系统的动态规划法	277
第一节	连续系统的动态规划法	277
第二节	线性二次型问题的解	279
参考文献	281

第三篇 最优控制

利用电子计算机对化工生产过程进行控制，总的说来是为了解决两个问题：一、寻找设定值，或者说是寻找工况；二、在线控制，即设计控制器，保证工况稳定在设定值上。利用最优控制的办法，可以寻找最优的设定值，即寻找生产过程的最优工况，同时也可以构造最优控制器，对生产过程进行直接控制。最优控制是研究探索解决这两个任务的有力工具。

本篇力图简明扼要地介绍最优控制的一些基本理论和方法，通过一些例子说明这些方法在实际中的应用。本篇的安排如下。第十章介绍什么是最优控制，并将它抽象成为一个数学问题。在此之前，本章还介绍了有关状态空间方法的一些必要知识，如线性系统的可控性与可观测性等。第十一章叙述解决最优控制问题的一个基本方法——最小值原理。第十二、十三章利用最小值原理分别解决经常遇见的两类控制问题：快速最优控制和状态调节器问题。在第四章状态调节器问题中着重介绍现代控制论和经典自动调节理论的一些相互联系。这两章的重点是解决在线控制问题。第十四章介绍最优控制的数值方法，利用它通过离线计算，可以得到生产过程的最优工况。第十五章利用动态规划的方法，解决离散系统的最优控制问题，重点是线性二次型最优控制问题。在第十六章扼要地介绍连续系统最优控制的动态规划方法。各章的关系如下表所示：



本书打有“*”号的一些章节初读时可以略去，不会影响对后面内容的阅读。

第十章 最优控制问题的提法

本篇所讨论的最优控制问题，都是建立在状态方程的基础上，因此在讨论它之前，有必要先对状态方程再作些研究。

第一节 状态方程

一般来说，对于一个被控过程的动态模型可用如下方程描述

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_m; t) \quad (10 \cdot 1 \cdot 1)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

$$y_j = h_j(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_m; t) \quad (10 \cdot 1 \cdot 2)$$

$$(j = 1, 2, \dots, r)$$

方程 (10·1·1) 称为状态方程，(10·1·2) 称为输出方程或者观测方程。其中 x_1, \dots, x_n 是状态变量； u_1, \dots, u_m 是控制变量或输入变量； y_1, \dots, y_r 是输出变量。

我们可以采用向量表示，令

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_r \end{pmatrix},$$

那么 (10·1·1)，(10·1·2) 化为向量形式

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t) \quad (10.1.3)$$

$$y = h(x, u, t) \quad (10.1.4)$$

其中 x 为 n 维状态向量, u 为 m 维控制向量, y 为 r 维输出向量 (参看第二篇第四章第三节)。

例1 RLC电路

如图10.1.1所示, $u(t)$ 是外加在 a, b 两点处的电压, $v(t)$ 是电容上的电压, $i(t)$ 是电路上的电流。在这里, 考虑 u 作为我们电路的输入, v 作为输出。根据电学知识可以列出下面微分方程

$$\begin{cases} L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + v(t) = u(t) \\ C \frac{dv(t)}{dt} = i(t) \end{cases} \quad (10.1.5)$$

上两式可化为

$$\begin{cases} \frac{di(t)}{dt} = -\frac{R}{L} i(t) - \frac{1}{L} v(t) + \frac{1}{L} u(t) \\ \frac{dv(t)}{dt} = \frac{1}{C} i(t) \end{cases} \quad (10.1.6)$$

选择 $i(t), v(t)$ 作为状态变量。令 $x_1 = i(t), x_2 = v(t)$, 由 (10.1.6) 得电路的状态方程为

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -\frac{R}{L} x_1 - \frac{1}{L} x_2 + \frac{1}{L} u \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{C} x_1 \end{cases} \quad (10.1.7)$$

由于 $x_2 = v(t)$ 是输出变量, 所以输出方程为

$$y = x_2(t) \quad (10.1.8)$$

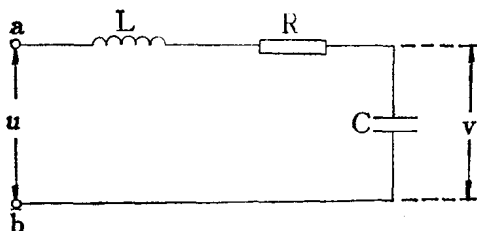


图 10.1.1 RLC电路

例2 聚合釜的数学模型

在第二篇第四章第二节的例5中，研究了氯乙烯聚合釜在升温期间，冷水对釜温影响的数学模型，其形式如下：

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + a \frac{dx(t)}{dt} = ku(t - \tau) \quad (10.1.9)$$

其中 $x(t)$ 是釜温的偏差， $u(t)$ 是冷水阀的开度， τ 是滞后时间， a 、 k 是常数。如果令 $x_1 = x$ ， $x_2 = \frac{dx_1}{dt} = \frac{dx}{dt}$ 作为状态变量，那么上式化为

$$\frac{dx_2}{dt} + ax_2 = ku(t - \tau)$$

由此得聚合釜的状态方程为

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -ax_2 + ku(t - \tau) \end{cases} \quad (10.1.10)$$

釜温的偏差是输出变量，因此输出方程为

$$y = x_1(t) \quad (10 \cdot 1 \cdot 11)$$

例3 流化床合成醋酸乙烯的数学模型

在第二篇第四章第二节中研究了流化床合成醋酸乙烯的数学模型，其形式为

$$\begin{cases} \frac{dC_c}{dt} = \frac{v_0 C_{c0} - v C_c}{V_r} + a k_0 e^{-\frac{E}{RT}} C_A \\ \frac{da}{dt} = \tau a_g - \left(\tau + k_d e^{-\frac{E_d}{RT}} \right) a \end{cases} \quad (10 \cdot 1 \cdot 12)$$

其中 C_c 是流化床反应器的醋酸乙烯的千克分子浓度， a 是催化剂的活性， T 是反应器中部温度（绝对温度）， C_c 、 a 这两个量决定了反应器在反应过程中的状态，因此可选它们作为状态变量。 T 的改变直接影响到 C_c 、 a 的变化，可以控制 T 来改变 C_c 、 a ，所以 T 是控制变量。 C_c 这个量直接反映醋酸乙烯的产量，是我们最关心的量，如果有在线色谱仪的话，它也是可以检测的，所以 C_c 是输出变量。其它符号含义如下：

- v_0 ——反应器入口混合气体体积流量；
- C_{c0} ——入口时醋酸乙烯千克分子浓度；
- V_r ——反应体积；
- k_0 ——醋酸乙烯生成反应频率因子；
- E ——醋酸乙烯生成反应活化能；
- τ ——催化剂交换率；
- E_d ——催化剂活性衰减活化能；
- k_d ——催化剂活性衰减频率因子；
- a_g ——加入的催化剂的活性；
- R ——气体常数。

上面这些量，在整个反应中均看作是常量。式中 v 是出口气体体积流量， C_A 是乙炔在反应器中的浓度。 v 和 C_A 不是常

量，它与 C_c 、 T 的关系如下：

$$\begin{cases} v = \frac{P_0 T}{P T_c} v_0 - \frac{R T V_r}{P} a k_0 e^{-\frac{E}{RT}} C_A \\ C_A = \frac{M_r}{1 + M_r} \cdot \frac{P}{RT} - \frac{C_c}{1 + M_r} = \left(\frac{P M_r}{RT} - C_c \right) / (1 + M_r) \end{cases} \quad (10.1.13)$$

另外，根据气体方程又有

$$v = \frac{P v_0}{R T_0} / \left(\frac{P}{RT} + C_c \right)$$

式中 $P_0 = 1$ (标准大气压), $T_0 = 273^\circ\text{K}$, P 为反应器内平均压力, M_r 为入口处乙炔对醋酸的克分子比, 它们均看作是常量。用 (10.1.13) 代入 (10.1.12) 中, 则得

$$\begin{cases} \frac{dC_c}{dt} = \frac{v_0}{V_r} \left(C_{c0} - \frac{P_0 T}{P T_0} C_c \right) + \left(\frac{RT}{P} C_c + 1 \right) a k_0 e^{-\frac{E}{RT}} \\ \quad \left(\frac{P M_r}{RT} - C_c \right) / (1 + M_r) \\ \frac{da}{dt} = \tau a_g - \left(\tau + k_d e^{-\frac{E_d}{RT}} \right) a \end{cases} \quad (10.1.14)$$

如果令 $x_1 = C_c$, $x_2 = a$, $T = u$, 以及

$$B_1 = \frac{v_0 C_{c0}}{V_r}, \quad B_2 = \frac{P_0 v_0}{P T_0 V_r}, \quad B_3 = k_0, \quad B_4 = \frac{E}{R}$$

$$B_5 = \tau, \quad B_6 = k_d, \quad B_7 = \frac{E_d}{R}, \quad B_8 = \frac{R}{P}$$

则由 (10.1.14), 得流化床合成醋酸乙烯的状态方程为

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = B_1 - B_2 x_1 u + (B_3 x_1 u + 1) B_3 x_2 e^{-\frac{B_4}{u}} \left(\frac{M_r}{B_8 u} - x_1 \right) / (1 + M_r) \\ \frac{dx_2}{dt} = B_5 a_k - (B_5 + B_6 e^{-\frac{B_7}{u}}) x_2 \end{cases} \quad (10 \cdot 1 \cdot 15)$$

$$\text{输出方程为} \quad y = x_1 \quad (10 \cdot 1 \cdot 16)$$

从上面三个例子可以看出，状态变量无非是能够确定被控生产过程内部的动态特性的一组变量，它反映了生产过程的内部状态。生产过程的数学模型可用状态变量的一阶方程组来描述，这样的一阶微分方程组称为状态方程。所谓输入变量，是指外界引起被控生产过程状态（亦即状态变量）发生变化的量，如例 1 中的电压 u ，例 2 中的冷水阀开度 u ，例 3 中的中部温度 T 等。输入变量包括控制变量和干扰变量两种。如果不考虑干扰，则输入变量就是控制变量，上面三个例子都是这种情形。被控过程的输出变量是指生产过程中可以被检测的量，这些量通常也就是被调参数或者是要被控制的量。如例 1 中电容上的电压 v ，例 2 中釜温偏差 x ，例 3 中醋酸乙烯的浓度 C_c 。在许多情形，输出方程右端不包含输入量 u ，即为如下形式：

$$y = h(x) \quad (10 \cdot 1 \cdot 17)$$

上面三个例子，也都是这种情形。

第二节 状态方程与传递函数

设被控生产过程^①的状态方程和输出方程为

① 有时也称为被控对象，被控系统，或简称为系统。