样条理论及其应用

J. H. 阿尔伯格　E. N. 尼尔森　J. L. 沃尔什 著

科 学 出 版 社

样条理论及其应用

J. H. 阿尔伯格　E. N. 尼尔森　J. L. 沃尔什 著

赵根榕　程正兴 译

李岳生 校

科 学 出 版 社

1 9 8 1

内 容 简 介

本书系统总结了1967年以前样条函数的主要研究成果. 全书共分八章. 第一章介绍什么是样条;第二、三章介绍三次样条的插值方法、收敛性及其内在性质; 在第四、五、六章中,把前两章的结果推广到奇次多项式样条及自共轭算子样条; 最后两章介绍二重三次样条及二维广义样条. 这些理论在样条函数和有限元法的研究中起着相当重要的作用. 本书可供大专院校计算数学专业教师、高年级学生以及有关方面的研究工作者参考.

3/52 /1

J. H. Ahlberg, E. N. Nilson, J. L. Walsh

THE THEORY OF SPLINES AND THEIR APPLICATIONS

Academic Press, 1967

样条理论及其应用

J. H. 阿尔伯格 E. N. 尼尔森 J. L. 沃尔什 著

赵根榕 程正兴 译

李岳生 校

*

科学出版社 出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1981年2月第一版 开本：787×1092 1/32

1981年2月第一次印刷 印张：11 1/4

印数：0001—3,870 字数：255,000

统一书号：13031·1466

本社书号：2021·13—1

定价: 1.75 元

序　　言

样条函数构成分析学的一个比较新颖的课题．近十年来样条理论及其在数值分析中的应用两个方面都取得了重要的发展．新的有意义的结果在不断地出现．

尽管如此，在此时机做一些认真的努力来组织并介绍迄今已经发展起来的材料还是有助益的．这些材料的大部分已经变成标准化的了．另一方面，有些地方理论还不完备．本书包含了自 1956 年以来所发表的大部分材料以及作者们自己以前未发表过的大量研究工作，还反映了作者们使用样条的大量实践经验．

为使本书保持适当的篇幅，略去了与样条有关的一些方面．因此，Schoenberg 及其合作者们关于将样条应用在等距数据的修匀方面的工作没有包括进来，也没有复变样条理论的任何论述．然而，我们希望在一个有可能成为非常活跃而又广阔的领域中，所介绍的材料将给读者提供进行理论与应用工作所必要的背景．

第一章先对什么是样条加以简短的说明，然后评述样条理论自 1946 年 Schoenberg 首次引进数学样条的概念以来的发展．第二章与第四章从代数观点分别发展三次样条与高次多项式样条的理论，所用的方法紧紧地依赖于用以定义样条的方程．特别是，这两章包含了对于应用来说是基础的许多材料．第三章与第五章从不同的观点，重新研究了三次样条与高次多项式样条，这个观点更清楚地揭示出它们的更深刻的构造．虽然所得到的定理不象第二章与第四章中相应的定理

那样严谨，但是它们更易于移植到新的提法之中．第六、七、八章就是这样做的，其中依次讨论了广义样条，二重三次样条与二维广义样条．

J. H. 阿尔伯格　E. N. 尼尔森　J. L. 沃尔什

1967 年 5 月

目　　录

第一章　引　　论

1.1. 样条是什么？

一本关于样条理论的书，开始先以最简单、最广泛采用的形式来定义样条，并且还指出导致这种定义的动机，似乎是适当的。多年以来，木质或其他材料的细长条，很象云形规那样，被制图员用以在特定点之间配绘光滑曲线。他们把一些称为“鸭子”的重物[1]放在沿细长条即样条的各点上，从而把这些样条适当地加以固定，改变鸭子与样条本身接触的点和样条与鸭子二者相对于画面的位置，只要用充分多个鸭子，就能使样条通过规定的点。

如果把制图员的样条看成细梁，那末，Bernoulli-Euler定律

$$M(x)=EI[1/R(x)]$$

就会满足。这里，$M(x)$ 是弯矩，E 是杨氏模量，I 是几何惯性矩，而且 $R(x)$ 是弹性线（即梁的变形后的轴所取的曲线）的曲率半径。对于小的挠度，$R(x)$ 可换成 $1/y''(x)$，其中 $y(x)$ 表示弹性线。于是，我们就有

$$y''(x)=(1/EI)M(x).$$

因为鸭子就效果来说，起着简支的作用，故 $M(x)$ 在鸭子位置之间的变化是线性的。

数学样条就是将制图员的样条换成它的弹性线，然后再用逐段三次曲线（通常是在每对相邻鸭子之间用不同的三次

1）这种重物由铅、铁或其合金制成，形状大小不一。也有制成金鱼或卧犬等形状者，因而分别称为“金鱼”或“狗”等；或统称之为“压铁”。——译者注

曲线)逼近后者的结果，这条逐段三次曲线在两个三次曲线连接处的结点(鸭子)上允许有一定的导数的不连续性.

数学样条，就其简单形式来说，是连续的，而且具有连续的一阶和二阶导数. 然而，通常是其三阶导数在结点上有跳跃不连续性. 这相应于制图员的样条有连续曲率，而在鸭子上曲率的变化率出现跳跃. 对于许多重要应用来说，制图员的样条的这个数学模型是高度逼真的.

在实践中，制图员并不把鸭子放在他的样条所必经的指定点上，而且，在指定点与鸭子之间通常也没有一一对应. 另外一方面，当用数学模拟时，通常的作法是在结点上内插指定点，并使指定点的个数与结点(包括端点)的个数保持相同.

在下一节，我们将要略述数学样条逼近最近的历史. 由此历史，数学样条的一些性质就变成显然的了. 此外，样条概念是由逼近制图员工具的概念的重大推广也是清楚的.

1.2. 样条理论的最近发展

样条逼近，以其现在的形式，首先出现在 Schoenberg [1946][1]的一篇论文中. 正如 §1.1 中所指出的，样条理论与梁的理论之间有着很密切的关系. Sokolnikoff[1956, p. 1—4]提供了梁理论发展的一个简短而很值得一读的叙述，从这个叙述中，可以预见到样条理论的一些最近的发展，特别是极小曲率性质. 正如在 Schoenberg [1946] 的论文中所提示的，在实际工作中所用的逼近也常常包括将它们与样条密切联系起来的概念.

1946 年以后，Schoenberg 与他的几位学生一起继续样条

1) 方括号中的数字表示参考文献中的条目.

与单一样条(monosplines)的这些研究. 特别是 Schoenberg 与 Whitney [1949; 1953] 首先获得了判断一些内插样条存在的准则. 就在结点上进行内插的偶次样条的情形来说，现在已有 Ahlberg, Nilson 与 Walsh [1964; 1965] 所提出的对于存在问题的较简单的处理办法;它可用于 Holladay [1957] 就函数 $f(x)$ 的在网 Δ 上的三次内插样条所获得的基本积分关系:

$$\int_a^b |f''(x)|^2 dx = \int_a^b |S''_\Delta(f;x)|^2 dx + \int_a^b |f''(x) - S''_\Delta(f;x)|^2 dx.$$

这里 $S_\Delta(f;x)$ 表示 $f(x)$ 在 Δ 上的内插样条.

在本书中，我们把这个积分关系叫做第一积分关系. 对于一些三次内插样条，第一积分关系的建立是下述定理的 Holladay 的证明.

定理(**Holladay**). 假设给出 Δ: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ 与一组实数 $\{y_i\}(i = 0, 1, \cdots, N)$, 那末在所有于 $[a,b]$ 上有连续二阶导数且使 $f(x_i) = y_i$ $(i = 0, 1, \cdots, N)$ 的函数 $f(x)$ 中,结点在 x_i 且使 $S''_\Delta(f; a) = S''_\Delta(f; b) = 0$ 的样条函数 $S_\Delta(f; x)$ 使积分

$$\int_a^b |f''(x)|^2 dx \tag{1.2.1}$$

取极小.

今天的样条理论大部分都由这个定理及其证明开始. 因为积分(1.2.1)常常是曲线 $y = f(x)$ 的曲率的平方的积分的良好逼近，故 Holladay 定理的内容常常叫做极小曲率性质. 它与弯曲梁的势能的极小化的密切关系是显然的[1].

本书考察简单三次样条的许多推广. 在这些推广中都有

1) 静弯曲梁的势能等于梁产生弯曲时在梁上所作的功; 这又与梁的弹性轴线的曲率的平方的积分成比例(参考 Sokolnikoff [1956, p. 2]).

与 Holladay 定理类似的定理；但因为在这些新提法中与曲率没有关系，所以我们代之而用极小范数性质这个名称. 这是有意义的，因为在各种情况下都有一个连带的 Hilbert 空间，现在用 $\mathscr{H}$ 表示，其中 (1.2.1) 或其类比是 $f(x)$ 的范数的平方.

1964 年以前，还没有发展样条理论的 Hilbert 空间方向. 在那一年作者们(Ahlberg, Nilson 与 Walsh [abs.[1]1964; 1964]) 引进了空间 $\mathscr{H}$ 的一些正交基底，它们完全由样条组成，或更确切地说，由样条的等价类组成. 对于空间 $\mathscr{H}$ 的任何正交基底，$\mathscr{H}$ 中的函数 $f(x)$，对于任何正整数 N，当然都有通过前 N 个基底元素的线性组合的最佳逼近. 如果 $\|\cdot\|_{\mathscr{H}}$ 表示 $\mathscr{H}$ 的范数，$U_i(x)(i=1,2,\cdots)$ 表示基底元素，而且

$$U(x)=\sum_{i=1}^{N} a_i U_i(x), \qquad (1.2.2)$$

那末当 a_i 为 $f(x)$ 的通过完全基底的展式中 $U_i(x)$ 的系数时，$\|f-U\|_{\mathscr{H}}$ 就得以极小化.

希望这个最佳逼近有其他的表征，特别是当别的表征使它容易确定时. 这种表征是有的. 在 1962 年作者们 (Walsh, Ahlberg 与 Nilson [1962]) 曾得到结果: 已知网格 Δ: $a=x_0<x_1<\cdots<x_N=b$，则在 Δ 上的所有简单周期三次样条中，在网点上内插周期函数 $f(x)$ 的样条在上述意义之下给出最佳逼近. 以后，这个结果得到了许多推广: Ahlberg, Nilson 与 Walsh [abs. 1963; abs. 1964 a, b; 1964; 1965], deBoor [1963], Schoenberg [1964c], Greville [1964a] 以及 deBoor 与 Lynch [abs. 1964; 1966].

---

1) abs. 系 abstract (摘要) 的缩写. 为便于检查参考文献，一律不译出. ——译者注

本书第三、五、六各章中，分别阐述三次样条、奇次多项式样条与广义样条的 Hilbert 空间理论. 将 $\mathscr{H}$ 定义为函数类的函数空间；然后证明 $\mathscr{H}$ 关于适当选择的范数是 Hilbert 空间. 但记号 $\mathscr{H}$ 用别的记号替代.

当网格的范数 $\|\Delta\| = \max|x_{j+1} - x_j|$ 趋近于零时，样条逼近 $S_\Delta^{(\alpha)}(f;x)$ 收敛于被逼近函数 $f^{(\alpha)}(x)$，也已精细地研究过. 第一个结果是作者们(Walsh, Ahlberg 与 Nilson [1962])对于三次样条获得的，而且利用了第一积分关系. 在 $f(x)$ 属于 $C^2[a, b]$ 这个假设之下，对于 $f(x)$ 在网点上的内插样条，证明了 $S_\Delta^{(\alpha)}(f;x)$ 当 $\alpha = 0,1$ 时一致收敛于 $f^{(\alpha)}(x)$. Ahlberg 与 Nilson [abs. 1961; 1962; 1963] 作了更详细的分析. 特别是，证明了： 如果 $f(x)$ 属于 $C^2[a,b]$，则 $S_\Delta''(f;x)$ 一致收敛于 $f''(x)$，只要当 $\|\Delta\|$ 趋近于零时网格趋近均匀. 这个网格的限制后来被 Sharma 与 Meir [abs. 1964; 1966] 去掉了.

对于 $C^4[a,b]$ 中的 $f(x)$，Birkhoff 与 deBoor [abs. 1964; 1964] 曾经证明

$$|f^{(\alpha)}(x) - S_\Delta^{(\alpha)}(f;\, x)| < K\|\Delta\|^{4-\alpha} \quad (\alpha = 0,\, 1,\, \cdots,\, 4), \tag{1.2.3}$$

只需比值 $R_\Delta \equiv \max_i\|\Delta\|/|x_i - x_{i-1}|$ 是有界的. 另外一方面，对于给 $f(x)$ 加上的较弱条件，例如 $f(x)$ 属于 $C[a,b]$ 或 $f(x)$ 属于 $C^1[a,b]$，适当的收敛性质已被 Ahlberg, Nilson 与 Walsh [abs, 1966] 获得. 此外，奇次多项式样条的收敛，Ahlberg, Nilson 与 Walsh [abs, 1963; 1965], Schoenberg [1964] 和 Ziegler [abs. 1965] 曾经研究过；多维样条的收敛，Ahlberg, Nilson 与 Walsh [abs. 1964a; 1964; 1965a] 曾经研究过；而且广义样条的收敛，这些作者 [abs. 1964b; 1964; 1965a] 曾经也研究过.

许多收敛结果依赖于定义样条的线性方程组的良好结构. 在第二与四章中，我们由这个观点来发展样条理论. 另

外一方面，许多收敛结果可以不求助于定义方程而确定. 特别是，对于 $2n-1$ 次多项式样条，关于直到 $n-1$ 阶导数的收敛可以做到这一点. 进而，借助于 Ahlberg, Nilson 与 Walsh [1965a] 在种种条件下所建立的积分关系

$$\int_a^b \{f^{(n)}(x) - S_\Delta^{(n)}(f;\ x)\}^2 dx$$
$$= \int_a^b \{f(x) - S_\Delta(f;\ x)\} f^{(2n)}(x) dx \qquad (1.2.4)$$

能建立直到 $2n-2$ 阶导数的收敛. 这对于广义样条（奇次多项式样条是其特殊情形），已经证明过了. 我们把积分关系 (1.2.4) 叫第二积分关系；在适当的函数空间，它是关于线性泛函的表示的 Riesz 定理的说明. 在第三、五、六各章中，这个办法被发展了. 只要 R_Δ 是有界的，基本结果为

$$|f^{(\alpha)}(x) - S_\Delta^{(\alpha)}(f;x)| \leqslant K\|\Delta\|^{2n-\alpha-1}$$
$$(\alpha = 0, 1, \cdots, 2n-1). \qquad (1.2.5)$$

对于三次样条，这个结果弱于 (1.2.3). $2n-\alpha-1$ 一般能不能换成 $2n-\alpha$，还是一个悬而未决的问题.

样条理论已经向许多方向扩展. 相当重要的是向多维扩展. 是 Birkhoff 与 Garabedian [1960] 开始搞的，但第一个真正成功的扩展是 deBoor [abs. 1961; 1962] 作的，他证明了 (deBoor [1962]) 一些双三次内插样条[1)]的存在性与唯一性. 以后，Ahlberg, Nilson 与 Walsh [abs. 1964a; 1965b] 将第一积分关系扩展到多维样条. 对于种种多维样条，获得了存在、唯一、极小范数性质与最佳逼近性质这样一些结果. 因为一维问题的答案是已知的，所以收敛的问题可以化成类似一维的问题.

---

1) 我们以后用术语：$f(t,s)$ 是二重三次的，而不用 $f(t,s)$ 是双三次的. 表示 $f(t,s)$ 对于每个 s，就 t 来说是三次的，而且对于每个 t，就 s 来说是三次的. 二重三次样条在二维网格上所定义的每个子矩形中是二重三次的. ——作者

在第七、八章中考察多维样条.

推广的另一个方向是把连带于 $2n-1$ 次多项式样条的算子 D^{2n}（这里的 $D \equiv d/dx$）换成算子 L^*L，其中

$$L \equiv a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_0(x), \quad (1.2.6)$$

而且 L^* 是 L 的形式伴随算子. 在每个网格区间中，样条 $S(x)$ 都满足方程 $L^*LS=0$，而不是满足方程 $D^{2n}S=0$. 用这种方式定义的样条叫做广义样条. 在这个方向，Schoenberg [1964c] 迈出了第一步，他考察了"三角样条". 随后得到了完全的推广: Greville [1964], Ahlberg, Nilson 与 Walsh [abs. 1964b; 1964; 1965a]; deBoor 与 Lynch [abs. 1964]. 样条理论更抽象的处理办法已经由 Atteia [1965] 及其在 Grenoble 的同事们作出.

算子 $L \equiv D(D-\sigma)$ 曾被 Schweikert [1966] 考察过，他把由此所得到的样条称为"紧张样条". 当 σ 选取得适当时，这些样条比三次样条有利，但也有一些不利之处；尤其是，它们有抑制数据所未指明的拐点发生的倾向，而却使弯曲集中于结点附近. 广义样条是第六、八章的主题.

线性泛函 $\mathscr{L}$ 用第二个线性泛函 $\hat{\mathscr{L}}$ 逼近，而使余项 $\mathscr{R} \equiv \mathscr{L} - \hat{\mathscr{L}}$ 零化 $n-1$ 次多项式这件事，Sard [1963] 曾引起极大的注意. 在合理的限制之下，

$$\mathscr{R}f = \int_a^b \mathscr{K}(\mathscr{R};t)f^{(n)}(t)dt; \quad (1.2.7)$$

核 $\mathscr{K}(\mathscr{R};t)$ 叫 Peano 核. Sard [1963] 曾试探以决定 $\hat{\mathscr{L}}$，使

$$\int_a^b \mathscr{K}(\mathscr{R};t)^2 dt$$

达到极小，而且对于种种不同的泛函 $\mathscr{L}$，他这样地决定了 $\hat{\mathscr{L}}$. 在 1964 年，Schoenberg 成功地证明了：对于形式为

$$\hat{\mathscr{L}}f = a_0f(x_0) + a_1f(x_1) + \cdots + a_Nf(x_N)$$

的 $\hat{\mathscr{L}}$，在给 $\mathscr{L}$ 加上温和的限制之下，当 $\hat{\mathscr{L}}f = \mathscr{L}S_\Delta(f;x)$

时就可以得到最优的 $\hat{\mathscr{L}}$，其中 $S_\Delta(f;x)$ 是在 Δ: $a=x_0<x_1<\cdots<x_N=b$ 上内插 $f(x)$ 的简单的（见下）$(2n-1)$次多项式样条．这个结果已经被（Ahlberg, Nilson 与 Walsh [abs. 1965]; Ahlberg 与 Nilson [1966]）推广为以下形式的 $\hat{\mathscr{L}}$：

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathscr{L}}f = & a_{0,0}f(x_0)+\cdots+a_{N,0}f(x_N) \\
& + a_{0,1}f'(x_0)+\cdots+a_{N,1}f'(x_N) \\
& + \cdots \\
& + a_{0,p}f^{(p)}(x_0)+\cdots+a_{N,p}f^{(p)}(x_N),
\end{aligned}
\tag{1.2.8}
$$

其中，$p\leqslant n-2$，而且自始就有某些 $a_{i,j}=0$．对于广义样条，(1.2.7)变成

$$\mathscr{R}f=\int_a^b \mathscr{K}(\mathscr{R};t)Lf(t)dt,$$

而且核 $\mathscr{K}(\mathscr{R};t)$依赖于 L（并见 deBoor 与 Lynch[1966]）．我们将在第三、五、六与第八章中考察这些内容．推广 Schoenberg 的结果以逼近泛函，需要引进性质稍有不同的样条．下列术语使这些差异的性质的一部分说明变得容易．

$2n$ 次样条，当 $(2n-1)$ 阶导数在网格点上至多有跳跃不连续时，是**简单的**．在大多数情况，所考察的样条是简单样条．当高于 $2n-k-1$ 阶的导数在内部网格点 x_i 上许可有跳跃时，就称样条在 x_i 处是**亏数为 k 的**．如果样条在所有内部网格点上都是亏数为 k 的，就说它是**亏数为 k 的**．然而，要加上限制 $0\leqslant k\leqslant n$．用这个术语，$L^*Lf=0$ 的解在 $[a,b]$ 有亏数 0；而且简单样条有亏数 1．

在 (1.2.8) 中某些 a_{ij} 自一开始为零这个要求常常甚至把更为复杂与不正则的连续性要求加于所使用的样条上．这种样条叫做**异次样条**，将在第六、八章中加以详细考察．它们是 Ahlberg, Nilson 与 Walsh [abs. 1965] 为研究线性泛函的逼近而引进的．