SHISHI TONGJI CHANGLUN

实时统计场论

编著／徐宏华

上海交通大学出版社

实时统计场论

上海交通大

上海交通大学“九五”重点教材

实时统计场论

徐宏华 编著

上海交通大学出版社

内 容 提 要

本书着重阐述了场的正则量子化;真空场论的微扰论和费曼图;闭路格林函数理论;实时温度格林函数的微扰理论;多体问题中的应用。

本书可供高等院校有关理论物理(非粒子物理)、凝聚态物理、量子光学专业研究生之用,也可供研究所及有关科技人员参考。

实时统计场论

徐宏华 编著

上海交通大学出版社出版发行

上海市番禺路 877 号 邮政编码 200030

电话 64281208 传真 64683798

全国新华书店经销

常熟市印刷二厂·印刷

开本:787×1092(mm) 1/16 印张:10 字数:244 千字

版次:1999 年 3 月 第 1 版

印次:1999 年 3 月 第 1 次

ISBN 7－313－02135－6/O·145

定价:17.00 元

前　　言

1986 年以来笔者给理论物理研究生讲授了量子场论，后期又给研究生开设了温度场论选修课，本书是根据这两门课的讲课笔记整理补充而成。在讲授温度场论时采用了实时形式的温度场论，这是一种建立在闭路格林函数理论基础上的实时温度场论。在闭路格林函数理论的发展和推广过程中，我国学者曾经作出过重要贡献，特别是苏肇冰院士等人发现并证明了闭路格林函数和费曼路径积分中的影响泛函实际上是等价的，这就为这种形式的实时温度场论提供了坚实的理论根据。由于教材中的应用实例基本上是凝聚态物理中的量子统计问题，因此本书取名实时统计场论。本书内容曾作为量子场论和量子统计两门课程的统一教材试用过。

目前，国内已经出版的量子多体理论教材中，几乎都采用虚时形式的温度场论方法，也即松原格林函数方法。这种现状是有其历史原因的：一方面，虚时温度场论起始于 50 年代，已有长期历史，是一个成熟的理论，大家已习惯于这种方法；另一方面，人们还不太了解或不太相信近年来已经出现了一个成功的实时温度场论，它不仅可以得到虚时温度场论的相同结果，而且它的应用范围比虚时温度场论更广。这是因为：其一，虚时温度场论一般需要对离散频率求和，但不是所有的离散频率求和都能够最终完成；其二，虚时温度场论的时间变量是虚的，这大大限制了它的应用范围。本书旨在向读者介绍上述实时温度场论的基本方法，对于已经熟悉虚时温度场论的读者，通过比较可以更快地掌握这种实时温度场论方法。对于初学者，则可以直接进入这种实时方法，无须花更多的时间去学习虚时方法。笔者相信，读者在学完本书后会逐渐熟悉这种实时方法并在实际应用中获益。

本书前四章讲的是通常的量子场论，对凝聚态物理以及其他相关学科的学生，这些场论知识恐怕是必需的，但在表达方式上和其他的教材有所不同。其一是用了较多的泛函方法，这是由于泛函方法是强有力的运算工具，且表达简洁，例如通常的图形求和，采用泛函方法往往可以通过解析运算来完成，同时也便于学生阅读文献，因为在文献中泛函方法用的甚多；其二是第三章中引入了一种新的相互作用绘景，称为入射绘景，这个相互作用绘景是笔者和已故蔡建华教授在 80 年代中期建立起来的。对零温度场论，入射绘景与通常的相互作用绘景没有本质上的区别，但在入射绘景中，借助于闭路格林函数方法可以把零温度场论直接推广到有限温度情形，使零温度场论和实时温度场论能够平行地进行表述。读者在阅读时需要注意这一特点。因为在第五章中讲述闭路格林函数形式的实时温度场论时，不少关系式的推导已经省略掉，而是由零温度场论的表达式直接写出有限温度时的相应表达式，这是因为这些推导完全是平行形式的重复。

第六章中介绍了实时温度场论的简单应用，主要是为了演示这种实时温度场论的方法。内容取材于笔者和蔡建华教授的部分文章，有些结果是第一次出现。目前这种实时温度场论方法还正在发展之中，书中的一些应用实例仅供读者在具体应用时参考，目的是抛砖引玉，期望读者能得到更多、更好的结果。限于笔者的水平，书中难免有错，欢迎读者批评指正。

最后笔者要感谢马红孺教授，他为我提供和安装了带有费曼图功能的 LaTex 软件，极大地方便了本书在计算机上的输入和打印过程。

徐宏华

1998 年 7 月

目　　录

第 1 章　经典场和量子化条件

1.1　经典力学的量子化

为了讨论经典场的量子化，首先回顾一下由经典力学过渡到量子力学的量子化过程是有启发意义的。经典力学的处理方法是引入以时间 t 为变量的广义坐标 $q_i(t)$ 以及相应的广义速度 $\dot{q}_i(t)$，$i=1, 2, \cdots, f$，f 是质点系统的自由度，再由 $q_i(t)$、$\dot{q}_i(t)$ 建立系统的拉氏量（Lagrange 函数）$L(t)=L(q(t), \dot{q}(t))$。由作用量的变分原理

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L(t)\mathrm{d}t = 0, \tag{1.1}$$

导出 f 个拉氏方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0。 \tag{1.2}$$

再定义广义动量

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \tag{1.3}$$

并通过变量变换，通常称为勒让德(Lagendre) 变换，建立系统的哈密顿量

$$H(q_i, p_i) = \sum_i p_i\dot{q}_i - L(q, \dot{q}), \tag{1.4}$$

于是 f 个欧拉方程(1.2) 可用 $2f$ 个等价的正则运动方程

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \tag{1.5}$$

来代替，上面的正则运动方程也可用泊松(Poisson) 括号来表述

$$\dot{p}_i = [p_i, H]_{P.B.}, \quad \dot{q}_i = [q_i, H]_{P.B.}, \tag{1.6}$$

其中泊松括号 $[A, B]_{P.B}$ 定义为

$$[A, B]_{P.B.} = \sum_i\left[\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial q_i}\right], \tag{1.7}$$

特别有

$$[q_i(t), p_i(t)]_{P.B.} = \delta_{ii}, \tag{1.8}$$

$$[q_i(t), q_j(t)]_{P.B.} = [p_i(t), p_j(t)]_{P.B.} = 0。 \tag{1.9}$$

尽管量子力学有其深刻的物理内涵，在概念上与经典力学有本质上的差别，但从形式上看，由经典力学过渡到量子力学，即量子化过程，却是很简单的：即把正则坐标和正则动量

$q_i(t)$，$p_i(t)$用相应的算符$\hat{q}_i(t)$，$\hat{p}_i(t)$来代替，同时将泊松括号代以量子括号，即量子对易式

$$[\hat{q}_i(t),\ \hat{p}_j(t)] = i\hbar\delta_{ij}, \tag{1.10}$$

$$[\hat{q}_i(t),\ \hat{q}_j(t)] = [\hat{p}_i(t),\ \hat{p}_j(t)] = 0, \tag{1.11}$$

其中量子括号的定义为$[A,\ B] = AB - BA$。以上的量子化过程通常称之为正则量子化过程，普朗克(Planck)常数$\hbar$是量子化后的特征。但为了书写简单，与大多数量子场论书籍一样，以后本书也将采用自然单位制，即取$\hbar = c = 1$，这里c是指光速。当然在实际问题中，最后的结果往往需要用$\hbar$和c的适当组合来恢复量纲。

1.2 经典场的正则运动方程

1.2.1 数学准备——泛函导数

无论在量子场论还是在量子统计中，泛函导数都是一个强有力的数学工具，它不仅能简明地表达一些重要的物理关系，还往往能使运算过程大大简化。因此我们首先介绍一下泛函的定义及其求导规则。设S是一个广义函数空间，$\phi \in S$，定义由S到实数域R(也可扩充到复数域，但我们这里仅考虑实数域)的映射F，即$F[\phi] \in R$，$F[\phi]$就称为定义在S上的泛函数，因此通常又称泛函为函数的函数。将它的线性增量部分表示为积分形式

$$\delta F[\phi] = F[\phi + \delta\phi] - F[\phi] = \int_\Omega A[\phi,\ x]\delta\phi(x)\mathrm{d}x, \tag{1.12}$$

其中Ω为函数的定义域。于是$A[\phi,\ x]$就被定义为泛函$F[\phi]$对函数ϕ在x处的导数，简称泛函导数，记作

$$\frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(x)} \equiv A[\phi,\ x]。 \tag{1.13}$$

泛函听起来有点抽象，实际上我们经常碰到，下面举几个例子。

例 1　函数$f(x)$对于给定的x是个数值，因而可以定义映射F_x，使得

$$F_x[f] = f(x),\ x \in \Omega, \tag{1.14}$$

其线性增量部分为

$$\begin{aligned}\delta F_x[f] &= F_x[f + \delta f] - F_x[f] = \delta f(x)\\ &= \int_\Omega \delta(x - y)\delta f(y)\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

由定义，我们可得到求导公式

$$\frac{\delta f(x)}{\delta f(y)} = \frac{\delta F_x[f]}{\delta f(y)} = \delta(x - y)。 \tag{1.15}$$

这个公式是泛函求导中的一个基本公式，经常用到。

例 2　函数$f(x)$的定积分是个数值，因此也可看作是一个泛函数$F[f] = \int_\Omega f(y)\mathrm{d}y$。

根据其线性增量部分

$$F[f+\delta f]-f[f]=\int_{\Omega}\delta f(y)\mathrm{d}y, \tag{1.16}$$

可知其泛函导数为

$$\frac{\delta\int_{\Omega}f(y)\mathrm{d}y}{\delta f(x)}=1。 \tag{1.17}$$

如果将上式与式(1.15)相比较,我们不难得到这样的结论:泛函求导与通常的积分运算可交换次序。实际上根据泛函求导的定义,泛函求导与通常的求导运算也是可交换的,读者可自己证明之。下面将给出一些常用的求导规则,它们与通常的求导运算很相似。

(1) 对于两个互相独立的函数 f、$g\in S$,它们之间的泛函导数为零,即 $\delta f(x)/\delta g(y)=0$,这表明互相独立的函数在泛函求导时当作常数处理。

(2) 泛函积的求导规则:设 $F[\phi]$、$G[\phi]$为两个泛函,则它们乘积的线性增量部分可表示为(以下我们略去定义域 Ω 不写)

$$\begin{aligned}&F[\phi+\delta\phi]G[\phi+\delta\phi]-F[\phi]G[\phi]\\&\quad=F[\phi]\int\frac{\delta G[\phi]}{\delta\phi(y)}\delta\phi(y)\mathrm{d}y+\int\frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(y)}\delta\phi(y)\mathrm{d}yG[\phi],\end{aligned} \tag{1.18}$$

考虑到 $F[\phi]$ 和 $G[\phi]$ 都是数值,可放到积分号里面去,于是我们得到

$$\frac{\delta}{\delta\phi(x)}(F[\phi]G[\phi])=\frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(x)}G[\phi]+F[\phi]\frac{\delta G[\phi]}{\delta\phi(x)}。 \tag{1.19}$$

其直接推论为

$$\frac{\delta}{\delta\phi(x)}(F[\phi])^n=n(F[\phi])^{n-1}\frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(x)},$$

$$\frac{\delta}{\delta\phi(x)}\exp(F[\phi])=\exp(F[\phi])\frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(x)}。$$

(3) 复合泛函求导规则:设 $F[G[\phi]]$是一个复合泛函,这里 ϕ, $G[\phi]$都是广义函数空间中的元,即 G 是 $S\to S$ 的映射。我们要求的是泛函 F 对函数 ϕ 在 x 处的导数,记 $\psi=G[\phi]$,则 F 的线性增量部分可写为

$$\delta F[\psi]=\int\frac{\delta F[\psi]}{\delta\psi(y)}\delta\psi(y)\mathrm{d}y。 \tag{1.20}$$

另一方面,对固定的 y, $\psi(y)$ 也是一个泛函,其线性增量部分又可表示为

$$\delta\psi(y)=\int\frac{\delta\psi(y)}{\delta\phi(x)}\delta\phi(x)\mathrm{d}x。 \tag{1.21}$$

合并以上两式便得到复合泛函求导公式

$$\frac{\delta F[G[\phi]]}{\delta\phi(x)}=\int\frac{\delta F[G[\phi]]}{\delta G[\phi](y)}\frac{\delta G[\phi](y)}{\delta\phi(x)}\mathrm{d}y。 \tag{1.22}$$

(4) 高阶导数和泰勒(Taylor)级数:定义(1.13)中的 $A[\phi,x]$对于给定的 x 仍然是 ϕ 的泛

函，其线性增量部分同样可写成

$$A[\phi+\delta\phi,\ x]-A[\phi,\ x]=\int\frac{\delta A[\phi,\ x]}{\delta\phi(y)}\delta\phi(y)\mathrm{d}y, \tag{1.23}$$

从而可定义二阶泛函导数

$$\frac{\delta^2 F[\phi]}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)}\equiv\frac{\delta A[\phi,\ x]}{\delta\phi(y)}。 \tag{1.24}$$

高阶泛函导数的定义可以类推。但为了简洁地推导泛函泰勒级数，让我们把式(1.13)定义的形式改变一下。命 $\delta\phi=\varepsilon g$，则泛函导数可等价地表示为

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{F[\phi+\varepsilon g]-F[\phi]}{\varepsilon}=\int\frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(x)}g(x)\mathrm{d}x, \tag{1.25}$$

现在把 $F[\phi+\lambda g]$ 看作是 λ 的函数，记作 $f(\lambda)$，然后作泰勒展开

$$f(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}f^{(n)}(0), \tag{1.26}$$

于是有

$$\begin{aligned}
f(0)&=F[\phi],\\
f^{(1)}(0)&=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(\varepsilon)-f(0)}{\varepsilon}\\
&=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{F[\phi+\varepsilon g]-F[\phi]}{\varepsilon}\\
&=\int\frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(x_1)}g(x_1)\mathrm{d}x_1,\\
f^{(2)}(0)&=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f^{(1)}(\varepsilon)-f^{(1)}(0)}{\varepsilon}\\
&=\int\mathrm{d}x_1 g(x_1)\frac{\delta}{\delta\phi(x_1)}\left[\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{F[\phi+\varepsilon g]-F[\phi]}{\varepsilon}\right]\\
&=\int\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 g(x_1)g(x_2)\frac{\delta^2 F[\phi]}{\delta\phi(x_1)\delta\phi(x_2)},
\end{aligned}$$

依次类推便得到

$$F[\phi+\lambda g]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\int\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n\frac{\delta^n F[\phi]}{\delta\phi(x_1)\cdot\delta\phi(x_n)}g(x_1)\cdots g(x_n)。 \tag{1.27}$$

假定 $f(\lambda)$ 在 $\lambda=1$ 处收敛，先取 $\phi=0$，再命 $g=\phi$，我们便由上式得到泛函的泰勒级数

$$F[\phi]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n\left[\frac{\delta^n F[\phi]}{\delta\phi(x_1)\cdots\delta\phi(x_n)}\right]_{\phi=0}\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)。 \tag{1.28}$$

1.2.2 经典场的欧拉(Euler)方程

经典场与经典力学的差别仅在于自由度的不同：在经典力学中广义坐标是离散的，自由度

是有限的；而在经典场论中广义坐标是场量 $\phi(\vec{x}, t) \equiv \phi(x)$，$\vec{x}$ 的变化是连续的，自由度是无限的，相应的广义速度 $\dot{\phi}(x)$ 也是如此。因此只要在数学上作适当的处理，经典力学中的有关物理结果在经典场论中可以被借用。为此我们首先把场空间离散化，即把场空间分割成许多个小区域。记第 i 个小区域的体积为 ΔV_i，用 $\phi_i(t)$ 和 $\dot{\phi}_i(t)$ 分别表示 $\phi(x)$ 和 $\dot{\phi}(x)$ 在体积元 ΔV_i 中的平均值，并记 ΔV_i 中场的拉氏量为 $L_i[\phi_i(t), \dot{\phi}_i(t)]$，于是整个场的拉氏量可写成

$$L(t) = \sum_i L_i[\phi_i(t), \dot{\phi}_i(t)]。 \tag{1.29}$$

在场论中一般不考虑显含时间的情形，因此上式中的 $L(t)$ 仅是 t 的隐函数，即通过 $\dot{\phi}_i(t)$，$\dot{\phi}_i(t)$ 依赖于时间 t。对相对论场还需考虑到相对论协变性，于是从物理上考虑，上面的拉氏量应代以

$$L(t) = \sum_i L_i[\phi_i(t), \dot{\phi}_i(t), \nabla\phi_i(t)] = \sum_i L_i[\phi(t), \partial_\mu\phi_i(t)], \tag{1.30}$$

这里 $\partial_\mu = \left(\nabla, \dfrac{\partial}{\partial(it)}\right)$。在上述处理下场的自由度也是有限的，从而可以借用经典力学中的作用量变分原理来推导场的正则运动方程。引入体积元ΔV_i中的平均拉氏密度$\mathscr{L}_i[\phi_i(t), \partial_\mu\phi_i(t)] = L_i[\phi_i(t), \partial_\mu\phi_i(t)]/\Delta V_i$，利用变分原理由式(1.1)可得到

$$\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t \sum_i \Delta V_i\left[\frac{\partial\mathscr{L}_i}{\partial\phi_i}\delta\phi_i + \frac{\partial\mathscr{L}_i}{\partial\dot{\phi}_i}\delta\dot{\phi}_i + \frac{\partial\mathscr{L}_i}{\partial(\nabla\phi_i)}\delta(\nabla\phi_i)\right] = 0, \tag{1.31}$$

现在取连续极限 $\Delta V_i \to 0$，对体积元的求和变成对体积的积分，平均拉氏密度变成拉氏密度 $\mathscr{L}[\phi(x), \dot{\phi}(x)]$，从而上式可改写为

$$\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\int\mathrm{d}^3x\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi(x)}\delta\phi(x) + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}(x)}\delta\dot{\phi}(x) + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\nabla\phi(x))}\delta(\nabla\phi(x))\right] = 0, \tag{1.32}$$

对上式进行分部积分并考虑到场量在边界上为零便可立即得到经典场的欧拉方程

$$\partial_\mu\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi(x)} - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi(x)} = 0。 \tag{1.33}$$

同时由上面的讨论可知，相应的变分原理可表示为

$$\delta\int\mathrm{d}^4x\mathscr{L}[\phi(x), \partial_\mu\phi(x)] = 0, \tag{1.34}$$

其中 $\mathrm{d}^4x = \mathrm{d}t\mathrm{d}^3x$。实际上，场的欧拉方程往往是预先知道的，例如描述标量粒子运动的克拉因-高登(Klein-Gordon)方程，描述旋量粒子运动的狄拉克(Dirac)方程等。因此在场论中往往是由场的欧拉方程倒过来求场的拉氏密度的。由欧拉方程求场的拉氏密度简便的方法是利用前面讲过的泛函导数，作用量也是个泛函，记作

$$I[\phi] = \int\mathrm{d}^4x\mathscr{L}[\phi(x), \partial_\mu\phi(x)], \tag{1.35}$$

由泛函导数的定义

$$\delta I[\phi] = \int \mathrm{d}^4 x \, \frac{\delta I[\phi]}{\delta\phi(x)} \delta\phi(x), \tag{1.36}$$

于是作用量的变分原理式(1.34)等价于

$$\frac{\delta I[\phi]}{\delta\phi(x)} = 0, \tag{1.37}$$

它正是用泛函导数表示的欧拉方程式(1.33)。于是由克拉因 - 高登方程

$$(\partial_\mu \partial_\mu - m^2)\phi(x) = 0, \tag{1.38}$$

便得到标量场的作用量

$$I[\phi] = -\int \mathrm{d}^4 x \, \frac{1}{2}[\partial_\mu \phi(x) \partial_\mu \phi(x) + m^2 \phi^2(x)], \tag{1.39}$$

上式积分号下的表达式正是标量场的拉氏密度。

1.2.3 经典场的正则运动方程

为了得到经典场的运动方程,我们还是从离散化的场量开始。首先引入正则动量

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_i} = \frac{\partial L_i}{\partial \dot{\phi}_i}, \tag{1.40}$$

并进而定义场的哈密顿量

$$H = \sum_i [p_i \dot{\phi}_i - L_i] = \sum_i H_i[\phi_i, p_i], \tag{1.41}$$

便得到离散化的正则运动方程

$$\dot{\phi}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\partial H_i}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial \phi_i} = -\frac{\partial H_i}{\partial \phi_i}. \tag{1.42}$$

现在命 $\pi_i(t) = p_i(t)/\Delta V_i$,再取极限

$$\pi(x) = \lim_{\Delta V_i \to 0} \frac{p_i(t)}{\Delta V_i}, \quad \mathscr{H}[\phi(x), \pi(x)] = \lim_{\Delta V_i \to 0} \frac{H_i[\phi_i, \pi_i]}{\Delta V_i}, \tag{1.43}$$

离散的正则运动方程式(1.42)就过渡到连续形式

$$\dot{\phi}(x) = \frac{\partial \mathscr{H}[\phi(x), \pi(x)]}{\partial \pi(x)}, \quad \dot{\pi}(x) = -\frac{\partial \mathscr{H}[\phi(x), \pi(x)]}{\partial \phi(x)}, \tag{1.44}$$

其中 $\mathscr{H}[\phi(x), \pi(x)]$ 为哈密顿密度,即 $H = \int \mathrm{d}^3 x \mathscr{H}[\phi(x), \pi(x)]$。由式(1.40)

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathscr{L}[\phi(x), \partial_\mu \phi(x)]}{\partial \dot{\phi}(x)}, \tag{1.45}$$

为连续形式的正则动量。这里我们需指出,在上面的求导运算 ∂ 中,场量 $\phi(x)$ 和 $\pi(x)$ 整体地被当作是一个变量,类似于对多项式的求导。若用泛函导数来表达,则正则运动方程可写成

$$\dot{\phi}(x)=\frac{\delta H}{\delta\pi(\vec{x},t)},\ \dot{\pi}(x)=-\frac{\delta H}{\delta\phi(\vec{x},t)},\tag{1.46}$$

这里我们把时间 t 和空间坐标 $\vec{x}$ 分开写出是因为 t 不参与上面的泛函求导，仅作为参量看待。类似于经典力学，上面泛函形式的正则运动方程也可用泛函形式的泊松括号来表达

$$\dot{\phi}(x)=[\phi(x),H]_{P.B.},\ \dot{\pi}(x)=[\pi(x),H]_{P.B.}。\tag{1.47}$$

这里泛函泊松括号的定义是

$$[A,B]_{P.B.}=\int d^3x\left[\frac{\delta A}{\delta\phi(x)}\frac{\delta B}{\delta\pi(x)}-\frac{\delta A}{\delta\pi(x)}\frac{\delta B}{\delta\phi(x)}\right]。\tag{1.48}$$

特别有基本泊松括号

$$[\phi(\vec{x},t),\pi(\vec{y},t)]_{P.B.}=\delta^3(\vec{x}-\vec{y}),\tag{1.49}$$

$$[\phi(\vec{x},t),\phi(\vec{y},t)]_{P.B.}=[\pi(\vec{x},t),\pi(\vec{y},t)]_{P.B.}=0。\tag{1.50}$$

下面我们举两个例子。首先考虑狄拉克场，它的作用量是

$$I[\psi]=-\int d^4x\,\bar{\psi}(x)(\gamma_\mu\partial_\mu+m)\psi(x),\tag{1.51}$$

因为由泛函形式的欧拉方程式(1.37)可得到狄拉克方程的共轭方程，即

$$\frac{\delta I[\psi]}{\delta\psi_\alpha(x)}=\bar{\psi}_\beta(\gamma_\mu\overleftarrow{\partial}_\mu-m)_{\beta\alpha}=0,\tag{1.52}$$

箭头表示算符向左作用，由此得到场的正则动量

$$\pi_\alpha(x)=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\psi}_\alpha(x)}=i\psi^+_\beta(x)(\gamma_4^2)_{\beta\alpha}=i\psi^+_\alpha(x),\tag{1.53}$$

以及场的哈密顿密度

$$\mathscr{H}=\pi(x)\dot{\psi}(x)-\mathscr{L}=\psi^+(x)(\gamma_4\vec{\gamma}\cdot\nabla+m\gamma_4)\psi(x),\tag{1.54}$$

相应的泊松括号为

$$\begin{aligned}[\psi_\alpha(\vec{x},t),\psi^+_\beta(\vec{y},t)]_{P.B.}&=-i[\psi_\alpha(\vec{x},t),\pi_\beta(\vec{y},t)]_{P.B.}\\&=-i\delta_{\alpha\beta}\delta^3(\vec{x}-\vec{y}),\end{aligned}\tag{1.55}$$

$$[\psi_\alpha(\vec{x},t),\psi_\beta(\vec{y},t)]_{P.B.}=[\psi^+_\alpha(\vec{x},t),\psi^+_\beta(\vec{y},t)]_{P.B.}=0。\tag{1.56}$$

电磁场的四维矢量是 $A_\mu(x)=(\mathbf{A}(x),i\phi(x))$，其中 $\mathbf{A}(x)$ 是矢量势，$\phi(x)$ 是标量势。

电磁场的麦克斯韦尔(Maxwell)方程具有规范不变性，因而有多余的自由度，因此为了把麦克斯韦尔方程纳入正则运动方程的轨道，需要引入约束条件 $\partial_\mu A_\mu(x)=0$，称为罗仑兹(Lorentz)条件，在罗仑兹条件下场的运动方程为

$$\partial^2A_\mu(x)=0,\tag{1.57}$$

这里 $\partial^2 = \partial_\mu \partial_\mu$，从而由欧拉方程的泛函表示式(1.37)得到场的拉氏密度

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}\partial_\nu A_\mu(x)\partial_\nu A_\mu(x), \tag{1.58}$$

进而得到正则动量

$$\pi_\mu(x) = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{A}_\mu(x)} = \dot{A}_\mu(x), \tag{1.59}$$

以及场的哈密顿密度

$$\mathscr{H} = \pi_\mu(x)\dot{A}_\mu(x) - \mathscr{L} = \frac{1}{2}[\pi_\mu(x)\pi_\mu(x) + \nabla A_\mu(x)\nabla A_\mu(x), \tag{1.60}$$

泊松括号为

$$[A_\mu(\vec{x}, t), \pi_\nu(\vec{y}, t)]_{P.B.} = \delta_{\mu\nu}\delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \tag{1.61}$$

$$[A_\mu(\vec{x}, t), A_\nu(\vec{y}, t)]_{P.B.} = [\pi_\mu(\vec{x}, t), \pi_\nu(\vec{y}, t)]_{P.B.} = 0。 \tag{1.62}$$

1.3 对称性和守恒定律

1.3.1 诺特(Noether)定理

诺特定理揭示了守恒流与对称变换不变性之间的联系。由于场的运动方程是由作用量的变分原理所决定的，若场的运动规律在某种对称变换下不变，则场的作用量在此对称变换下也应不变，由此可导出相应流的守恒方程。现在我们来考虑一般的时空变换

$$x_\mu \rightarrow x'_\mu = x_\mu + \delta x_\mu, \tag{1.63}$$

并设场量的相应变换为

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x') = \phi(x) + \mathrm{i}\delta S\phi(x), \tag{1.64}$$

其中 δS 对标量场为零，对旋量场是一个无限小变换矩阵。取至一阶无限小，由上式可得到在同一时空点场量的变化

$$\delta\phi(x) = \phi'(x) - \phi(x) = (-\delta x_\mu \partial_\mu + \mathrm{i}\delta S)\phi(x)。 \tag{1.65}$$

若场的欧拉运动方程在上述变换下不变，则首先场的拉氏量形式不变(注意，并不要求拉氏量不变)。由于运动方程是由作用量的变分原理所决定的，因此很自然地假定场的作用量不变，即

$$\int_{\Omega'} \mathrm{d}^4 x' \mathscr{L}[\phi'(x')] = \int_{\Omega} \mathrm{d}^4 x \mathscr{L}[\phi(x)], \tag{1.66}$$

其中 Ω、Ω' 分别为变换前后场的时空区域，于是我们得到

$$\int_{\Omega} \mathrm{d}^4 x \left\{ \mathscr{L}[\phi'(x')]\det\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right) - \mathscr{L}[\phi(x)] \right\} = 0。 \tag{1.67}$$

由于积分区域 Ω 是任意的，上式的被积函数恒为零，取至 δx_μ 的一次项，雅可比(Jacobi)行列式

$$\det\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right) = 1 + \partial_\mu \delta x_\mu, \tag{1.68}$$

于是我们得到

$$\mathscr{L}[\phi'(x')]\partial_\mu\delta x_\mu + \mathscr{L}[\phi'(x') - \mathscr{L}[\phi(x')] + \mathscr{L}[\phi'(x)] - \mathscr{L}[\phi(x)] = 0。 \tag{1.69}$$

记 $\mathscr{L} = \mathscr{L}[\phi(x)]$，取至一阶无限小，有

$$\mathscr{L}[\phi'(x')]\delta_\mu x_\mu = \mathscr{L}\partial_\mu\delta x_\mu,$$

$$\mathscr{L}[\phi'(x')] - \mathscr{L}[\phi'(x)] = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x_\mu}\delta x_\mu,$$

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[\phi'(x)] - \mathscr{L}[\phi(x)] &= \left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi(x)} - \partial_\mu\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi(x))}\right]\delta\phi(x) + \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi(x))}\delta\phi(x)\right] \\ &= \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi(x))}\delta\phi(x)\right],\end{aligned}$$

这里已利用了欧拉方程(1.33)。将上面的结果代入式(1.69)便立即得到下面微分形式的守恒流

$$\partial_\mu j_\mu(x) = 0, \tag{1.70}$$

$$j_\mu(x) = \mathscr{L}\delta x_\mu + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi(x))}\delta\phi(x), \tag{1.71}$$

这就是诺特定理的一般形式，记 $j_\mu = (\vec{j}, j_4) \equiv (\vec{j}, \mathrm{i}\rho)$，式(1.70)实际上是一个连续性方程

$$\frac{\partial\rho(x)}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{j}(x) = 0。 \tag{1.72}$$

对式(1.70)进行空间积分，将散度项的空间积分化成对场空间的表面积分，考虑到场空间是有限的，其贡献为零，这样我们就可得到相应的守恒量 $\int \mathrm{d}^3x\rho(x)$。下面我们考虑几个具体的守恒量。

1.3.2 时空平移变换

考虑场的无限小时空平移变换

$$x'_\mu = x_\mu + \delta\varepsilon_\mu, \tag{1.73}$$

在平移变换下场量不变，$\phi'(x') = \phi(x)$，从而

$$\delta\phi(x) = -\partial_\mu\phi(x)\varepsilon_\mu。 \tag{1.74}$$

把式(1.73)和式(1.74)代入式(1.71)并考虑到 ε_μ, $\mu = 1, 2, 3, 4$ 是独立变化的，便得到守恒流

$$\partial_\mu\left[\mathscr{L}\delta_{\mu\nu}-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial[\partial_\mu\phi(x)]}\partial_\nu\phi(x)\right]=0,\ \nu=1,2,3,4。\tag{1.75}$$

根据前面的讨论，这里的守恒量可表示为 $\mathscr{P}_\nu=\int d^3x\mathscr{P}_\nu(x)$，其中

$$\mathscr{P}_\nu(x)=-i\mathscr{L}\delta_{4\nu}-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}(x)}\partial_\nu\phi(x),\ \nu=1,2,3,4。\tag{1.76}$$

取 $\nu=4$，守恒量即是哈密顿量

$$H=-iP_4=\int d^3x[\pi(x)\dot{\phi}(x)-\mathscr{L}]。\tag{1.77}$$

由相对论知道，与能量一起构成四维矢量的应是动量，因此取 $\mu=1, 2, 3$ 必然给出场的动量表达式

$$\boldsymbol{P}=\int d^3x\mathscr{P}(x)=-\int d^3x\pi(x)\nabla\phi(x),\tag{1.78}$$

在物理上这个结论是大家熟知的，即如果系统具有时间和空间的平移不变性，则系统的能量和动量守恒。这里的附加收获是我们还得到了场动量的一般表达式，它对自由场和有相互作用的场都成立。

1.3.3 时空旋转变换

时空旋转变换构成罗仑兹群。考虑无限小正规罗仑兹变换

$$x'_\mu=a_{\mu\nu}x_\nu=(\delta_{\mu\nu}+\varepsilon_{\mu\nu})x_\nu。\tag{1.79}$$

由正规条件 $a_{\mu\nu}a_{\mu\lambda}=\delta_{\nu\lambda}$，取至一阶无限小得到 $\varepsilon_{\mu\nu}=-\varepsilon_{\nu\mu}$，即 $\varepsilon_{\mu\nu}$是反对称的张量。我们知道时空旋转变换是与系统的角动量相联系的，因此需要区分标量场和旋量场，因为后者还有内禀角动量——自旋。我们首先考虑标量场，标量场在时空旋转下场量不变，即 $\phi'(x')=\phi(x)$，于是由式(1.65)可知

$$\delta\phi(x)=-\partial_\mu\phi(x)\varepsilon_{\mu\nu}x_\nu,\tag{1.80}$$

把上式代入式(1.70)和式(1.71)可得到

$$\partial_\mu\left[\mathscr{L}\varepsilon_{\mu\nu}x_\nu-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial[\partial_\mu\phi(x)]}\partial_\lambda\phi(x)\varepsilon_{\lambda\nu}x_\nu\right]=0,\tag{1.81}$$

改写上式中的 $\varepsilon_{\mu\nu}=\delta_{\mu\lambda}\varepsilon_{\lambda\nu}$，考虑到 $\varepsilon_{\lambda\nu}=-\varepsilon_{\nu\lambda}$ 并将它们的系数项合并后便得到

$$\partial_\mu m_{\mu,\lambda\nu}(x)=0,\tag{1.82}$$

其中

$$m_{\mu,\lambda\nu}=-\mathscr{L}[\delta_{\mu\lambda}x_\nu-\delta_{\mu\nu}x_\lambda]+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial[\partial_\mu\phi(x)]}[\partial_\lambda\phi(x)x_\nu-\partial_\nu\phi(x)x_\lambda],\tag{1.83}$$

由前面的讨论知道，这里的守恒量是