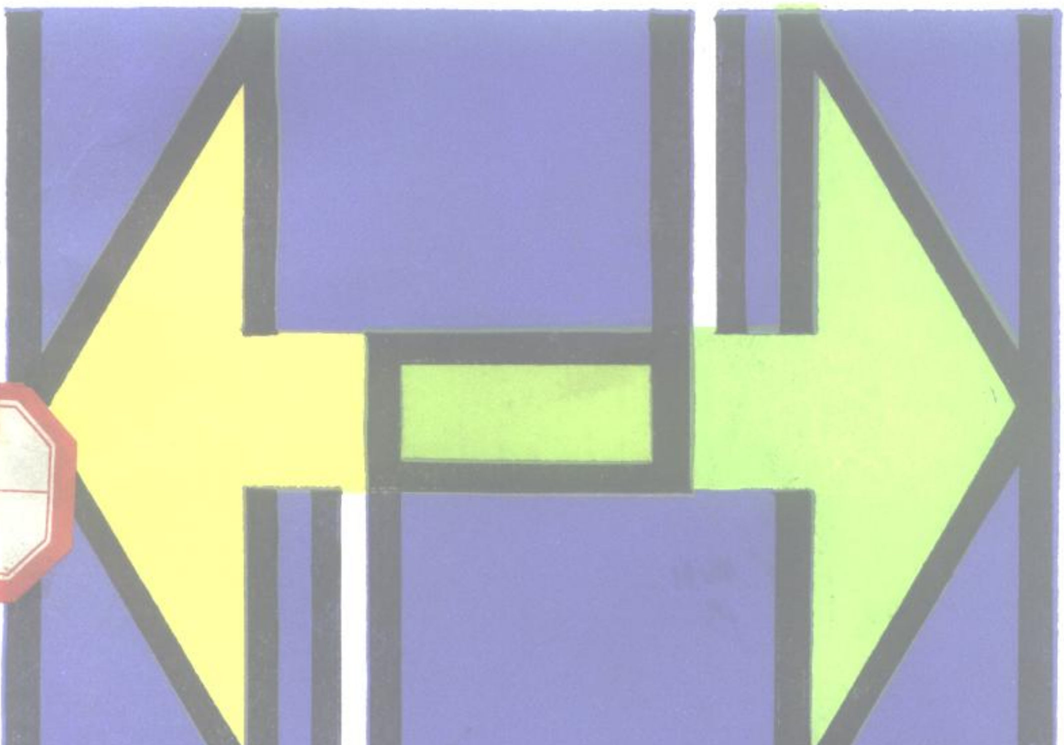
高等学校教材

分析力学

许庆余　吴慧中　编

高等教育出版社



高等学校教材

分析力学

许庆余　吴慧中　编

高等教育出版社

(京)112号

内容简介

本书是作者在西安交通大学授课讲义的基础上改编而成. 内容以完整系为主,主要包括: 虚功原理; 拉格朗日方程; 拉格朗日方程的应用(系统的小振动、对称重刚体绕定点运动和质点在有心力场中运动); 哈密顿正则方程; 哈密顿原理;哈密顿-雅可比理论;正则变换等. 每章后附有小结、习题. 书末附有补充数学知识的附录和习题答案.

本书由全国工科物理课程教学指导委员会组织评选通过, 吴百诗教授主审,可作为工科分析力学课程的教材. 也可供有关科技人员参考.

高等学校教材
分析力学
许庆余 吴慧中 编
*
高等教育出版社出版
新华书店总店北京科技发行所发行
人民教育出版社印刷厂印装
*
开本 850×1168 1/32 印张 8 字数 190 000
1992年6月第1版 1992年6月第1次印刷
印数 0001—1,193
ISBN 7-04-003227-9/O·985
定价 3.70 元

前　言

分析力学是属于经典力学范畴的一门学科，其研究对象和理论力学相同，是研究宏观低速物体机械运动的一般规律．因此要把分析力学与理论力学严格地区分，下一个确切的定义是不容易的，有些作者甚至把分析力学与理论力学看作是等同的．但是，一般地说，分析力学叙述体系的特征是以普遍原理为基础，应用分析的方法来导出基本的运动微分方程，并研究这些方程本身及其积分方法．具体地说，其主要内容，通常包括完整与非完整系运动微分方程，变分原理，正则变换理论，正则运动方程及其积分理论，积分不变量等．

由于分析力学是从普遍的变分原理来建立系统的运动微分方程，所以它具有高度的统一性与普遍性．可以用统一的形式来反映不同运动形态的规律，也便于扩展到其他学科中去．例如利用分析力学的重要原理——哈密顿原理以及由它推导出的拉格朗日方程、哈密顿正则方程，可统一地表示带电粒于在电磁场中的运动、相对论不变力学方程等，它们和理论力学中一般质点在势场中的运动微分方程所不同的，只是反映在描述状态的具体参数和状态函数结构有所不同，而其运动微分方程的数学形式是统一的．所以分析力学是学习量子力学，相对论力学等近代物理学课程的基础，同时在工程技术有关领域，如自动控制理论、计算力学、非线性力学、运动稳定性等学科中亦广泛地应用分析力学的基本理论与方法．

本书是依据作者在西安交通大学所编写的分析力学讲义改写的．在讨论内容方面，以完整系为主，变分原理中只讲述哈密顿

原理，为了加强拉格朗日方程的应用，专章讨论系统的小振动，对称重刚体绕定点运动，和质点在有心力场中运动等三个专题.

全书共分七章，第一章及第二章由吴慧中编写，第三章至第七章和附录由许庆余编写、张克猛同志负责全书图的设计与绘制.最后由许庆余统一定稿，本书可作为工科有关专业的分析力学教材，约需40学时，为了便于自学，每章后有小结、习题，有关补充数学内容以附录形式附在书末、内容中带星号章节可以适当删减. 本书亦可供有关科技人员参考.

本书承西安交通大学物理系吴百诗教授仔细审阅，并提出许多改进意见，在此深表谢意.本书编写过程中得到西安交通大学理论力学教研室的同志的大力支持与帮助，谨此致谢.

鉴于作者水平所限，书中肯定有许多缺点与不到之处，恳请读者批评指正.

编　者

1989年4月

目　　录

第一章 虚功原理

虚功原理是分析静力学的普遍原理，它给出非自由质点系平衡的充分必要条件，是解决静力学平衡问题的普遍原理，它实质上是应用动力学的概念和方法来研究平衡问题.

虚功原理与达朗贝尔原理结合而得到的动力学普遍方程，更进一步提供了解决质点系动力学问题的普遍方法. 因此，虚功原理在分析力学中具有重要地位.

本章中提出的约束、虚功及广义坐标等概念是分析力学的基本概念.

1.1 约束及其分类

相互有某种联系的一群质点称为质点系. 如果质点系的每个质点都可以在空间任意地运动和占有任意位置，这样的质点系称为**自由质点系**. 如果质点系中的质点受到某些事先给定条件的限制，使它们不能任意地运动或占有任意位置，这样的质点系称为**非自由质点系**. 例如，火车被限制在铁轨上运动，圆球被限制在水平面上作无滑动的纯滚动，冰刀的运动速度只能沿冰刀方向，等等。**这些事先给定的、使质点系在空间不能占有任意位置或任意运动的限制条件，称为约束**；用以表示限制条件的数学表达式称为**约束方程**.

例如，质点 M 被限制在半径为 R 的球面上运动，若质点的位置以图 1.1 所示的直角坐标 $(x、y、z)$ 表示，则约束方程为

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

或

$$x^2+y^2+z^2-R^2=0$$

一般情况下，一质点系有 n 个质点，各质点对于某参考系的位置及速度分别以 $\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{r}_2$，……，$\boldsymbol{r}_n$ 及 $\dot{\boldsymbol{r}}_1$，$\dot{\boldsymbol{r}}_2$，……，$\dot{\boldsymbol{r}}_n$ 来表示. 因此约束方程的一般形式为

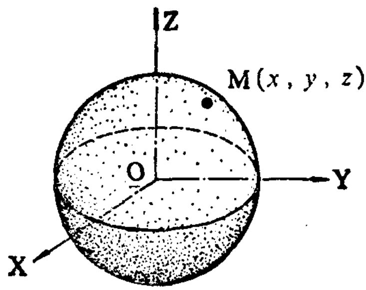


图 1.1

$$f(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_n,\dot{\boldsymbol{r}}_1,\dot{\boldsymbol{r}}_2,\cdots,\dot{\boldsymbol{r}}_n,t)=0 \tag{1.1}$$

或简写成

$$f(\boldsymbol{r}_i,\dot{\boldsymbol{r}}_i,t)=0 \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{1.2}$$

当用直角坐标时，可写成

$$f(x_i,y_i,z_i,\dot{x}_i,\dot{y}_i,\dot{z}_i,t)=0 \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{1.3}$$

所以，非自由质点系也就是具有约束的质点系. 为了讨论非自由质点系的性质，我们将约束作如下分类：

1.1.1 定常约束与非定常约束

如果约束方程显含时间 t，如式(1.2)所示，这种约束称为**非定常约束**. 如果约束方程不显含时间 t，即

$$f(\boldsymbol{r}_i,\dot{\boldsymbol{r}}_i)=0 \tag{1.4}$$

则称为**定常约束**.

例如，上述质点 M 被限制在半径为 R 的球面上运动，即为定常约束；如果质点 M 被限制在膨胀着的气球上运动，设气球的半径 $R=R_0+vt$ 为时间 t 的函数，则约束方程为

$$x^2+y^2+z^2=(R_0+vt)^2$$

是非定常约束.

1.1.2 双侧约束(固执约束)与单侧约束(非固执约束)

如果约束方程呈等式形式，则称为**双侧约束**. 如果约束方程呈不等式形式，则称为**单侧约束**.

例如图 1.2 所示单摆，质点(小球)M用长为L的无重刚杆铰联于支座O，质点所受约束的约束方程为

$$x^2+y^2+z^2=L^2$$

此约束即双侧约束；它的限制具有双侧性，只允许质点M在半径为L的球面上运动. 质点M既不能向里也不能向外脱离球面.

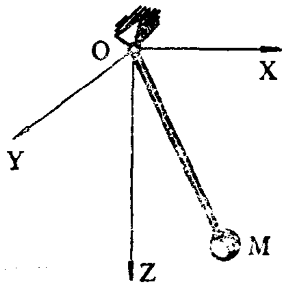


图 1.2

如果把图 1.2 中的刚杆换成柔性绳，则约束方程为

$$x^2+y^2+z^2\leqslant L^2$$

此即单侧约束；这约束的限制只具单侧性，它不仅允许质点M在半径为L的球面上运动，也允许质点M进入球内运动，但不允许质点M向外脱离球面。

1.1.3 完整约束与非完整约束

约束方程只含有坐标及时间而不含坐标对时间的导数(即约束只限制各质点的位置而不限制它们的速度)，这样的约束称为完整约束，其约束方程的一般形式为

$$f(\boldsymbol{r}_i,t)=0 \tag{1.5}$$

或

$$f(x_i,y_i,z_i,t)=0 \tag{1.6}$$

例如上述质点被限制在球面上或限制在膨胀着的气球上运动；刚杆或柔绳构成的单摆等皆属完整约束。

如果约束方程中含有坐标对时间的导数如式(1.2)或式(1.3)，即约束方程是一个微分方程，这样的约束称为运动约束. 所以运动约束不仅限制质点系中各质点的位置，而且还限制它们的运动速度.

我们来分析图 1.3 所示圆盘被限制于水平面上作无滑动的纯

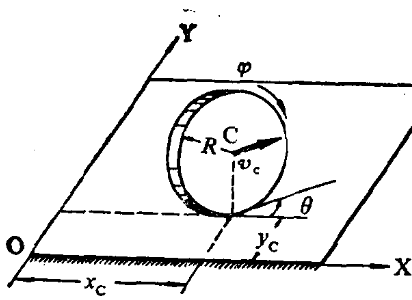


图 1.3

滚动,且圆盘平面始终保持与地面垂直的情况.

由于圆盘滚动而不滑动,所以圆盘与水平面接触的一点是瞬时速度中心,盘心 C 的速度为

$$v_C = R\dot{\varphi}$$

式中 R——圆盘半径;

φ——圆盘绕通过盘心 C 而垂直盘面之轴的转角.

设 v_C 与 X 轴正向间夹角为 θ,盘心 C 的坐标为 x_C、y_C,则

$$\dot{x}_C = v_C\cos\theta, \qquad \dot{y}_C = v_C\sin\theta$$

因此约束方程为

$$\dot{x}_C - R\dot{\varphi}\cos\theta = 0, \qquad \dot{y}_C - R\dot{\varphi}\sin\theta = 0$$

或

$$\mathrm{d}x_C - R\cos\theta\mathrm{d}\varphi = 0, \qquad \mathrm{d}y_C - R\sin\theta\mathrm{d}\varphi = 0$$

所以这是运动约束.

如果将式(1.5)或式(1.6)对时间 t 求导,可得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}_i}\dot{\boldsymbol{r}}_i + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \tag{1.7}$$

或

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\dot{x}_i + \frac{\partial f}{\partial y_i}\dot{y}_i + \frac{\partial f}{\partial z_i}\dot{z}_i\right) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \tag{1.8}$$

因此完整约束方程也能表示为微分方程形式的约束方程；然而由式(1.7)及式(1.8)可知，由完整约束所写出的微分方程形式的约束方程必是某一函数的全微分，即

$$\partial f=\Sigma\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}_i}\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i+\frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t=0$$

故必能积分为

$$f(\boldsymbol{r}_i,t)=C$$

或

$$f(x_i,y_i,z_i,t)=C$$

式中 C 为积分常数.

例如，当圆盘被限制沿水平直线轨道作纯滚动时(图 1.4)，盘心 C 的速度为

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{C}}=R\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\quad 或 \quad v_{\mathrm{C}}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

由上两式得

$$\mathrm{d}x-R\mathrm{d}\varphi=0$$

积分得

$$x-R\varphi=C$$

此即可积分的运动约束之例.

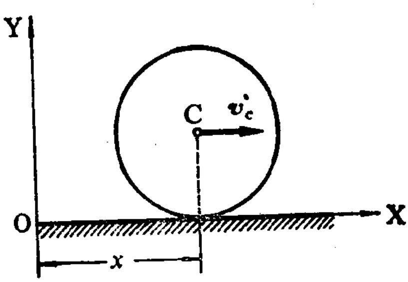


图 1.4

由此可见，可积分的运动约束的约束方程，通过积分可以转化为完整约束方程；可积分的运动约束与完整约束实质上是等价的. 当然，一般说来，运动约束方程是不可积的，图 1.3 所示之例即如此.

所谓**非完整约束**是指不可积分的运动约束.

非完整约束中最简单的是线性非完整约束，它的约束方程中只包含速度的线性项，方程的一般形式为

$$\sum_{i=1}^{n}(A_i\dot{x}_i+B_i\dot{y}_i+C_i\dot{z}_i)+D=0$$

式中 A_i、B_i、C_i、 D 都是坐标 $x_1, y_1, z_1, \cdots, x_n, y_n, z_n$ 以及时间 t 的函数.

以后我们称只受完整约束的质点系为**完整系**，受到非完整约束的质点系为**非完整系**.本书主要讨论完整系，且限定所受约束都是双侧的；至于非完整系，则仅限于讨论线性非完整约束的情况.

1.2 广义坐标

对于非自由质点系，若用直角坐标来确定质点系的位置，有时并不方便.如研究 n 个质点组成的质点系，受有 d 个完整约束，按照每个质点在空间的位置需用 x、y、z 三个坐标来确定，那么 n 个质点共需 $3n$ 个坐标. 但是，各质点坐标之间尚有 d 个约束方程制约，使得其中只有 $k=3n-d$ 个坐标是独立的；因此，实际上只需这些独立的坐标就能决定该质点系的位置，且这些独立的坐标不一定要取直角坐标.例如，对于绕定轴转动的刚体可以取转角 φ，绕定点转动的刚体可以取三个欧拉角 φ、ψ、θ(详见 **3.5**). 我们把这些能完全确定质点系位置的独立变量称为该质点系的**广义坐标**.

广义坐标可以是直角坐标，也可以是角坐标或其它等，只要能够唯一地确定质点系的位置都可作为广义坐标.例如，图 1.5 所示的铰接双摆，设两杆均为无重刚杆，杆长分别为 L_1、L_2，且双摆只能在 OXY 平面内运动.由于确定质点 M_1 和 M_2 位置的四个直角坐标 x_1、y_1、x_2、y_2 必须满足下列两个约束方程

$$x_1^2+y_1^2=L_1^2$$

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=L_2^2$$

因而只有两个独立坐标.所以本例选择 φ_1 及 φ_2 为广义坐标，就可以完全确定双摆的位置.

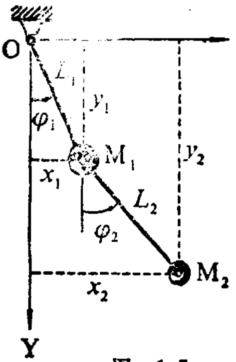


图 1.5

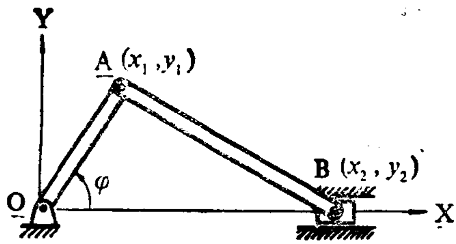


图 1.6

又如，图 1.6 所示曲柄滑块机构，铰链 A 及滑块 B 的位置可由以下诸式来确定

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= R\sin\varphi \\ y_1 &= R\cos\varphi \\ x_2 &= R\cos\varphi + L\sqrt{1-\left(\frac{R}{L}\right)^2\sin\varphi} \\ y_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{1.9}$$

式中　　R——曲柄 OA 的长度，

　　　　L——连杆 AB 的长度.

因此，这机构的位置可由一个独立变量——曲柄 OA 的转角 φ 确定，可以选 φ 为这系统的广义坐标.

应该指出，一个质点系的广义坐标的选取具有很大的任意性，如果选择恰当，就能简捷解题.

设质点系由 n 个质点组成，受有 d 个完整约束，则可以选取 $k=3n-d$ 个广义坐标 $(q_1, q_2, \cdots\cdots, q_k)$，而质点系内每一质点的直角坐标都可表示为广义坐标及时间 t 的函数：

$$\left.\begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2, \cdots, q_k, t) \\ y_i &= y_i(q_1, q_2, \cdots, q_k, t) \\ z_i &= z_i(q_1, q_2, \cdots, q_k, t) \end{aligned}\right\} \quad (i=1, 2, \cdots; n, k=3n-d) \tag{1.10}$$

若以 $\boldsymbol{r}_i$ 表示第 i 个质点的径矢，则上式也可写成矢量形式：

$$\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_i(q_1,q_2,\cdots,q_k,t)\quad(i=1,2,\cdots,n;k=3n-d)\tag{1.11}$$

显然，将式(1.11)代入约束方程：

$$f_\alpha(\boldsymbol{r}_i,t)=0\quad(i=1,2,\cdots,n;\alpha=1,2,\cdots,d)$$

则约束方程将成为恒等式；这就是说，采用广义坐标时，全部完整约束必定是自动满足的.

如果约束又是定常的，则因约束方程中不显含时间 t，只要适当地选择广义坐标，可使式(1.10)及(1.11)中不显含时间 t（例如式(1.9)），即

$$\left.\begin{aligned}x_i&=x_i(q_1,q_2,\cdots,q_k)\\y_i&=y_i(q_1,q_2,\cdots,q_k)\\z_i&=z_i(q_1,q_2,\cdots,q_k)\end{aligned}\right\}\tag{1.12}$$

或

$$\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_i(q_1,q_2,\cdots,q_k)\tag{1.13}$$

1.3 虚位移 自由度

为了描述给定某瞬时非自由质点系在它所处位置的邻域所受约束的几何性质，我们引入虚位移概念.

于给定的瞬时，在不破坏约束（即为约束所允许）的条件下，质点系中假想的任意无限小位移，称为质点系于该瞬时所在位置的虚位移.

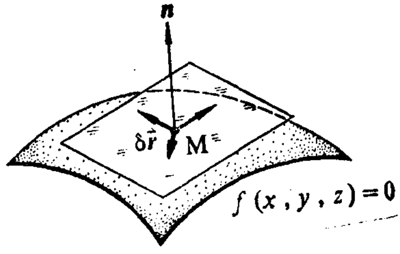


图 1.7

现在来说明虚位移如何反映了约束的几何性质. 设质点 M 受到曲面 $f(x,y,z)=0$ 的约束（图 1.7），设想质点有一虚位移 $\delta\boldsymbol{r}$，质点的坐标由 (x,y,z) 变为 $(x+\delta x,y+\delta y,z+\delta z)$；由于虚位移

是约束所允许的无限小位移，因此有了虚位移后，质点的坐标仍应满足约束方程，即有

$$f(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z)=0$$

将上式按泰勒级数展开，因虚位移是无限小量，舍去高于一阶的高阶微量后得

$$f(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z)=f(x, y, z)+\frac{\partial f}{\partial x}\delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f}{\partial z}\delta z=0$$

由此得

$$\frac{\partial f}{\partial x}\delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f}{\partial z}\delta z=0 \tag{1.14}$$

若用 $\boldsymbol{n}$ 表示曲面 $f(x, y, z)=0$ 在 (x, y, z) 点处的单位法向矢量，则 $\boldsymbol{n}$ 的方向余弦分别与对应的 $\frac{\partial f}{\partial x}$、$\frac{\partial f}{\partial y}$、$\frac{\partial f}{\partial z}$ 成正比，因而得

$$\boldsymbol{n}=C\left(\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)$$

式中 C 为比例系数，$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 分别为 X、Y、Z 轴的单位矢量. 由于虚位移的矢量表示式为

$$\delta\boldsymbol{r}=\delta x\boldsymbol{i}+\delta y\boldsymbol{j}+\delta z\boldsymbol{k}$$

则由式(1.14)可得

$$\boldsymbol{n}\cdot\delta\boldsymbol{r}=C\left(\frac{\partial f}{\partial x}\delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f}{\partial z}\delta z\right)=0 \tag{1.15}$$

上式表示如下的几何意义：质点 M 的虚位移垂直于曲面上该点处的法线，也即虚位移 $\delta\boldsymbol{r}$ 必在曲面上该点处的切平面内；这就是虚位移所反映的约束的几何性质. 图 1.7 画出了曲面 $f(x, y, z)=0$ 于 M 点处的切平面，由以上讨论可知，此切平面内自 M 点作出的任意无限小位移，都可以是曲面上质点 M 的虚位移.

由虚位移的定义可以看出，虚位移与实位移是有区别的. 实位移是质点系在一定时间内($dt\neq 0$)所作的位移；当然它要符合约束条件，但它主要是由所受主动力及运动初始条件来确定的. 而虚位