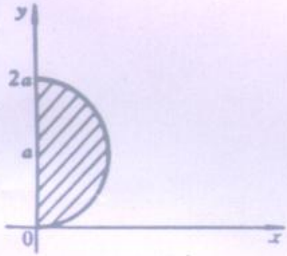
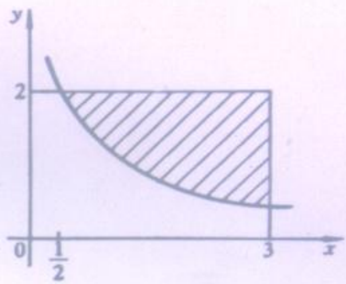
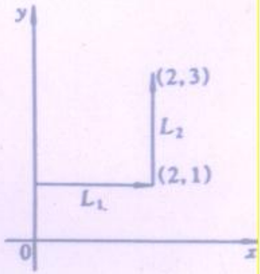
（经济类）

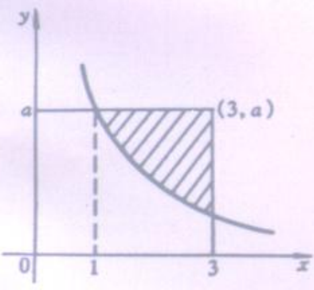
高等数学题解精编

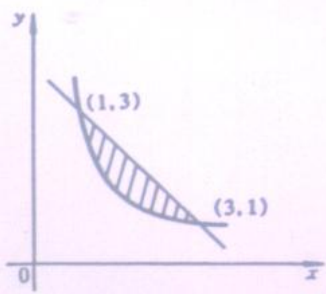
贺才兴　裘义端　编著











上海交通大学出版社

高等数学(经济类)题解精编

贺才兴　裘义端　编著

上海交通大学出版社

内容简介

为了帮助广大高等教育经济类自学考试的读者了解《高等数学》试题的形式、内容和范围，进一步掌握高等数学的基本内容，提高考试的及格率，本书汇集了我国1987年至1996年高等数学(经济类)自学考试的试题并编写了精解。这些试题，既有体现高等数学课程要求的基本题，又有综合题，内容充实，形式多样，深浅得当，知识覆盖面广，对高等数学中的基本概念、基本理论和基本方法，都作了精炼的归纳和总结，对所有题目，书中均逐一给出了详尽的解答。书中还收进了部分高等数学(机电类)的试题，以飨读者。本书可作广大自学高等数学课程的读者与参加成人高考的师生的辅导教材。

高等数学(经济类)题解精编

上海交通大学出版社出版、发行

上海市番禺路877号　邮政编码200030

全国新华书店经销

上海交通大学印刷厂・印刷

开本:850×1168(毫米)1/32　印张:6　字数:156000

版次:1997年5月　第1版　印次:1997年6月　第1次

印数:1-7000

ISBN 7-313-01813-4/O・115　　定价:8.00元

前　　言

为了适应社会主义现代化建设的需要，我国实行了高等教育自学考试制度。自 1981 年开始进行试点，到 1985 年底，全国 29 个省、自治区、直辖市都开展了高等教育自学考试工作，现已进入到加强、完善、提高、发展的新阶段。这是个人自学、社会助学和国家考试相结合的一种新的教育形式，是我国社会主义高等教育体系的一个组成部分，是“鼓励自学成才”的重要措施，也是造就和选拔人才的一种新的途径。

近年来，国家从造就和选拔人才的需要出发，编写了相应专业的课程自学考试大纲，进一步规定课程自学和考试的内容、范围，使考试标准具体化。

为帮助广大经济管理类专业自学考试的读者了解《高等数学》试题的形式、内容和范围，进一步掌握高等数学的基本内容，提高考试的及格率，本书汇集了自 1987 年至 1996 年高等数学（经济类）自学考试的试题并编写了精解。这些试题，内容充实，形式多样，深浅得当，知识覆盖面广，对高等数学中的基本概念、基本理论和基本方法，都作了精炼的归纳和总结，其中既有一些体现高等数学课程要求的基本题，又有一些综合题。对所有这些题目，我们都逐一给出了详尽的解答。解题方法力求简明扼要，步骤清楚，通俗易懂，向读者昭示了高等数学的基本思想、基本方法，可从中学到举一反三、融会贯通的本领。本书还收进了部分高等数学（机电类）的试题解答，以飨读者。

本书具有广泛的适用性。广大自学高等数学课程的读者、成人考试的师生等，都可用来作为辅导材料。

编者希望，本书的出版能帮助读者用不太长的时间，花费不很

多的精力,对所学过的高等数学课程起到复习、巩固和提高的作用,成为广大自学考生通向成功之路的桥梁。

编者

1996 年元旦

目　录

1987年上半年全国高等教育自学考试

高等数学试题解答

一、填空(每小题1分,共16分)

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=$ __0__.

2. 函数 $y=\dfrac{1}{\ln x}$ 的定义域是 $(0,1)\cup(1,+\infty)$.

3. 函数 $f(x)=|x|$ 的连续区间是 $(-\infty,+\infty)$.

4. 设 $f(x)=\begin{cases}3x+1, & x\leqslant 0\\ x-2, & x>0\end{cases}$,则 $f(1)=$ __-1__.

5. 函数 $y=e^{x+1}$ 的反函数是 $y=\ln x-1$.

6. 函数 $y=\sqrt{1+x^2}$,则 $dy=$ __$\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$__.

7. 曲线 $y=x^3-3x$ 的拐点是 __$(0,0)$__.

8. 曲线 $y=\dfrac{1}{x-1}$ 的铅垂渐近线是 __$x=1$__.

9. 过原点且斜率为 $2x$ 的曲线方程是 __$y=x^2$__.

10. $\int_0^{64}(x-1)dx+3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=$ __1987__.

11. 若 $f(x)$ 是奇函数,则 $\int_{-1}^{1}f(x)dx=$ __0__.

12. $\int_a^b f(x)dx+\int_b^a f(x)dx=$ __0__.

13. 设级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，其和为s，又a是不为零的常数，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} a\, u_n =$ __$a \cdot s$__.

14. 几何级数$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$，当$|q| < 1$时收敛，其和为__$\frac{1}{1-q}$__.

15. 设矩形区域D为：$0 \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant y \leqslant b$，则$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$的累次积分为__$\int_0^a \mathrm{d}x \int_0^b f(x,y)\mathrm{d}y$__.

16. 微分方程$y' + 2xy = 0$的通解是__$c \cdot \mathrm{e}^{-x^2}$__.

二、单项选择(每小题 1 分，共 16 分)

在每小题后的四个备选答案(a)，(b)，(c)，(d)中，选出一个你认为是正确的答案，并将它前面的代号填入题后的括号内，选对的得 1 分，不选、选错或选出的代号超过一个均为 0 分.

1. 设$A = \{x \mid x \geqslant 0\}, B = \{x \mid x < 1\}$，则$A \cap B$是(d).

(a) $\{x \mid x \geqslant 0$ 或 $x < 1\}$　　(b) $\{x \mid 0 < x < 1\}$

(c) $\{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$　　(d) $\{x \mid 0 \leqslant x < 1\}$

2. 下列函数中，非奇非偶的函数是$f(x) =$ (d).

(a) $1 + x^2$　　(b) $x + x^3$

(c) $|x|$　　(d) $|x + 1|$

3. 如果$y = u^2, u = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$，则将$y$表示成$x$的函数是(b).

(a) $\log_a x^2$　　(b) $\log_a^2 x$

(c) $2\log_a x$　　(d) $\log_a 2x$

4. 若 $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<1 \\ 2, & x=1 \\ \dfrac{1}{x}, & x>1 \end{cases}$，则 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=$ (d).

(a) 1　(b) 0　(c) 2　(d) 不存在

5. 当 $x\to x_0$ 时，α 和 β 都是无穷小量，下列变量中，当 $x\to x_0$ 时，可能不是无穷小量的是(d).

(a) $\alpha+\beta$　　(b) $\alpha-\beta$

(c) $\alpha\cdot\beta$　　(d) $\dfrac{\alpha}{\beta}(\beta\neq 0)$

6. 设 $y=\mathrm{tg}x$，则 $y'=$ (a).

(a) $\sec^2 x$　　(b) $\sec x\,\mathrm{tg}x$

(c) $\dfrac{1}{1+x^2}$　　(d) $\dfrac{-1}{1+x^2}$

7. 下列函数中，在区间 $[-1,1]$ 上满足罗尔定理所有条件的是(c).

(a) $y=\dfrac{1}{x}$　　(b) $y=|x|$

(c) $y=1-x^2$　　(d) $y=x-1$

8. 如果函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内恒有 $f''(x)>0$，则在区间 (a,b) 内(c).

(a) $f(x)$ 单调增加　　(b) $f(x)$ 单调减少

(c) 曲线 $y=f(x)$ 上凹 (d) 曲线 $y=f(x)$ 下凹

9. 设某种商品需求量 Q 对价格 p 的函数关系是 $Q=f(p)=ka^p$ (k,a 为常数)，则需求量 Q 对价格 p 的弹性是(a).

(a) $p\ln a$　　(b) $\ln a$

(c) $ka^{p+1}\ln a$　　(d) ka^{p+1}

10. $\int(3\mathrm{e})^x\mathrm{d}x=$ (d).

(a) $(3\mathrm{e})^x+c$　　(b) $\dfrac{1}{3}(3\mathrm{e})^x+c$

(c) $3e^x + c$　　(d) $\dfrac{(3e)^x}{\ln 3 + 1} + c$

11. 积分 $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2} dx =$ (c).

(a) -2　(b) 0　(c) $+\infty$　(d) $-\infty$

12. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{n}$ 的收敛区间是(c).

(a) $(-1,1)$　　(b) $(-1,1]$

(c) $[-1,1)$　　(d) $[-1,1]$

13. 设圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 所围成区域的面积为 s，则 $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx =$ (c).

(a) s　(b) $\frac{s}{2}$　(c) $\frac{s}{4}$　(d) $\frac{s}{8}$

14. 级数 $1 + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{3})^2 + \cdots + (\frac{1}{n})^2 + \cdots$ 是(b).

(a) 幂级数　　(b) p- 级数

(c) 等比级数　　(d) 调和级数

15. 下列平面中，过点(1,1,1)的平面是(c).

(a) $x + y + z = 0$　　(b) $x + y + z = 1$

(c) $x = 1$　　(d) $x = 3$

16. 如果二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处有极大值且两个一阶偏导数都存在，则必有(b).

(a) $f'_x(x_0,y_0) > 0,\ f'_y(x_0,y_0) > 0$

(b) $f'_x(x_0,y_0) = f'_y(x_0,y_0) = 0$

(c) $f'_x(x_0,y_0) > 0,\ f'_y(x_0,y_0) = 0$

(d) $f'_x(x_0,y_0) = 0,\ f'_y(x_0,y_0) > 0$

三、计算下列各题(每小题 4 分，共 24 分)

1. 设 $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$，

(1) 求$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$，　　(2) 求$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

解：(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

$=\sqrt{2}-1.$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+x}}}{1}$$

$$=\frac{1}{2}\quad\left(\text{或}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x}{x}=\frac{1}{2}\right).$$

2．求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

解：
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x-x}{x\cdot\sin x}\right)\quad\left(\frac{0}{0}\text{型}\right)$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{2x}\quad\left(\frac{0}{0}\text{型}\right)$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2}$$
$$=0.$$

3．设 $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}+x\ln\sqrt{x}$，求 y''.

解：$y'=-\dfrac{1}{1+x^2}+\ln\sqrt{x}+\dfrac{1}{2}$，

$$y''=\frac{2x}{(1+x^2)^2}+\frac{1}{2x}.$$

4．设 $z=x^2y$，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

又若 $y=f(x)$ 时，求$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xy$，

又若 $y=f(x)$，

则 $\because z=x^2\cdot y=x^2\cdot f(x)$，

$$\therefore \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=2x\cdot f(x)+x^2\cdot f'(x)=2xy+x^2\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

5. 求不定积分 $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

解：原式 $= -\frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$

$= -\sqrt{1-x^2}+c$.

6. 求 $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$.

解：原式 $= \lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^b x\cdot e^{-x}dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^b -x\,de^{-x}$

$= \lim\limits_{b\to+\infty} -(x\cdot e^{-x}+e^{-x})\Big|_0^b$

$= \lim\limits_{b\to\infty} -\left[\left(\frac{b}{e^b}+\frac{1}{e^b}\right)-1\right]$

$= 1$.

四、解下列各题(每小题 5 分,共 20 分)

1. 设 $x^y = y^x$,求$\frac{dy}{dx}$.

解:两边取对数得: $\ln x^y = \ln y^x$,即 $y\cdot\ln x = x\cdot\ln y$,

上式两边对 x 求导得: $\frac{dy}{dx}\cdot\ln x+\frac{y}{x} = \ln y+\frac{x}{y}\cdot\frac{dy}{dx}$,

即 $\frac{dy}{dx} = \frac{y(x\ln y-y)}{x(y\ln x-x)} = \frac{y(\ln y^x-y)}{x(\ln x^y-x)}$.

2. 求解$\begin{cases} xy'-y=\sqrt{x^2-y^2} \\ y\big|_{x=1}=0 \end{cases}$.

解: 原方程为: $x\frac{dy}{dx}-y=\sqrt{x^2-y^2}$,

即 $\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}$.

令 $z=\frac{y}{x}$,则$\frac{dy}{dx}=z+x\cdot\frac{dz}{dx}$, $\therefore$ 原方程为 $x\frac{dz}{dx} =$

$\sqrt{1-z^2}$,即$\dfrac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=\dfrac{dx}{x}$,两边积分得 $\arcsin z=\ln x+c$,

$z=\sin(\ln x+c)$,

$\therefore\ y=x\cdot\sin(\ln x+c)$. 由 $y\big|_{x=1}=0$,得 $c=0$.

因此,所求的特解为 $y=x\cdot\sin(\ln x)$.

3. 将函数 $f(x)=\dfrac{x}{2+x}$ 展开成x 的幂级数,并写出收敛区间.

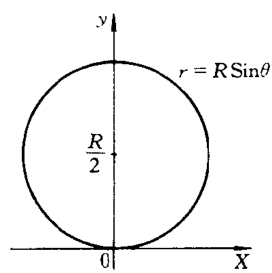
解:$\because\ \dfrac{x}{2+x}=1-\dfrac{2}{2+x}=1-\dfrac{1}{1+\dfrac{x}{2}}$,

又$\dfrac{1}{1+y}=1-y+y^2-y^3+\cdots+(-1)^{n-1}y^{n-1}+\cdots(-1<y<1)$,

$\therefore\ \dfrac{1}{1+\dfrac{x}{2}}=1-\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{2^2}-\dfrac{x^3}{2^3}+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{x^{n-1}}{2^{n-1}}+\cdots(-2<x<2)$,

于是 $\quad f(x)=\dfrac{x}{2+x}=\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{x^3}{2^3}-\cdots+(-1)^n\cdot\dfrac{x^n}{2^n}+\cdots(-2<x<2)$.

4. 求$\iint\limits_D\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,d\sigma$,其中$D$是由圆$x^2+y^2=Ry$围成的区域.



解:利用极坐标,原积分为

$$I=\iint\limits_D\sqrt{R^2-r^2}\ r\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{R\sin\theta}\sqrt{R^2-r^2}\ r\,dr$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{1}{3}R^3\cdot(1-\cos^3\theta)d\theta$$

$$=\frac{1}{3}R^3\Big[\int_0^{\pi}d\theta+\int_0^{\pi}(1-\sin^2\theta)d\sin\theta\Big]$$

$$= \frac{1}{3}R^3\left[\theta + \sin\theta - \frac{1}{3}\sin^3\theta\right]\Big|_0^\pi$$

$$= \frac{1}{3}\pi R^3.$$

五、应用题(每小题 8 分,共 16 分)

1. 某厂生产甲、乙两种产品,其销售单价分别为 10 万元和 9 万元,若生产 x 件甲种产品和 y 件乙种产品的总成本为:

$$c = 400 + 2x + 3y + 0.01(3x^2 + xy + 3y^2)\ (\text{万元}).$$

又已知两种产品的总产量为 100 件,求企业获得最大利润时两种产品的产量各为多少?

解:销售收入为 $10x + 9y$,
所以利润为 $z = 10x + 9y - c$.

由题意,x,y 应满足方程 $x + y = 100$,所以,原问题可化成:在条件 $x + y = 100$ 下,求函数 $z = 10x + 9y - c$ 的最大值.

用拉格朗日乘数法求解如下:

令 $F(x,y) = z + \lambda(x + y - 100)$

$$= 10x + 9y - 400 - 2x - 3y - 0.01(3x^2 + xy + 3y^2) + \lambda(x + y - 100),$$

则有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 8 - 0.06x - 0.01y + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 6 - 0.01x - 0.06y + \lambda = 0 \\ x + y = 100 \end{cases},$$

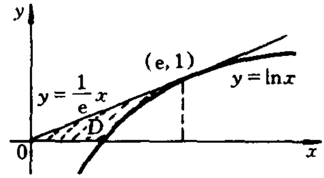
求解上述方程组,得到

$$\begin{cases} x = 70 \\ y = 30 \\ \lambda = -7/2 \end{cases},$$

因实际问题的最大值是存在的,现在只有唯一驻点,故

(70,30)是所求的最大值点,即当生产甲、乙产品各为70、30件时,该企业可得到最大利润145万元.

2. 已知曲线 $y=\ln x$ 及过此曲线上点(e,1)的切线 $y=\frac{1}{e}x$,



(1) 求由曲线 $y=\ln x$,直线 $y=\frac{1}{e}x$ 和 $y=0$ 所围成的平面图形 D 的面积.

(2) 求以平面图形 D 为底,以曲面 $z=e^y$ 为顶的曲顶柱体的体积.

解:(1) $S_D=\iint\limits_D dxdy=\int_0^1 dy\int_{ey}^{e^y}dx=\int_0^1(e^y-ey)dy$

$$=\left(e^y-\frac{1}{2}ey^2\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}e-1.$$

(2) $V_D=\iint\limits_D e^y dxdy=\int_0^1 dy\int_{ey}^{e^y}dx=\int_0^1(e^{2y}-e\cdot y\cdot e^y)dy$

$$=\left[\frac{1}{2}e^{2y}-e(y-1)e^y\right]\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{2}e^2-e-\frac{1}{2}.$$

六、证明题(每小题4分,共8分)

1. 设 $f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$,用定义证明函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续但不可导.

证明:$\because f(x)$ 在 $x=0$ 点及其附近有定义,

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0=f(0),$$

$\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 点是连续的.

$\because \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x \cdot \sin \frac{1}{\Delta x} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \sin \frac{1}{\Delta x}$$，极限不存在，

$\therefore f(x)$ 在 $x = 0$ 点是不可导的.

2. 设 $f(u)$ 在 $[-1,1]$ 上连续，利用变换 $x = \pi - t$，

试证明 $\int_0^\pi x f(\sin x) \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) \mathrm{d}x$

证明：设 $x = \pi - t$，则 $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$，当 $x = 0$ 时，$t = \pi$，当 $x = \pi$ 时，$t = 0$.

$$\therefore \quad \int_0^\pi x \cdot f(\sin x) \mathrm{d}x = -\int_\pi^0 (\pi - t) \cdot f[\sin(\pi - t)] \mathrm{d}t$$

$$= t \int_0^\pi (\pi - t) \cdot f(\sin t) \mathrm{d}t$$

$$= \pi \cdot \int_0^\pi f(\sin t) \mathrm{d}t - \int_0^\pi t \cdot f(\sin t) \mathrm{d}t$$

$$= \pi \cdot \int_0^\pi f(\sin x) \mathrm{d}x - \int_0^\pi x \cdot f(\sin x) \mathrm{d}x,$$

即 $$\int_0^\pi x \cdot f(\sin x) \mathrm{dx} = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) \mathrm{d}x.$$

1988年上半年全国高等教育自学考试

高等数学试题解答

一、填空(每小题1分,共15分)

1. 设 $y=\ln\sqrt{3}$,则 $y'=$ $\underline{\quad 0 \quad}$.

2. 设 $f(x)=e^{(x-a)^2}$, $\psi(x)=a+\cos x$,则 $f[\psi(x)]=$ $\underline{\quad e^{(\cos x)^2} \quad}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x^2+2x}=$ $\underline{\quad \dfrac{1}{2} \quad}$.

4. 函数 $y=\dfrac{1}{x^2-2x-3}$ 的连续区间是 $\underline{(-\infty,-1)\cup(-1,3)\cup(3,+\infty)}$.

5. 设 $y=f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$,则 $f(x^2)$ 的定义域是 $\underline{\quad [0,1] \quad}$.

6. $(2^x)^{(n)}=$ $\underline{\quad 2x\cdot(\ln 2)^n \quad}$.

7. 函数 $f(x)=x\sqrt{3-x}$ 在 $[0,3]$ 上满足罗尔定理的条件,由罗尔定理确定的 $\xi=$ $\underline{\quad 2 \quad}$.

8. 设某商品的需求量 y 是价格 x 的函数:$y=e^{-0.01x}$,η 为需求对价格的弹性,则当 $x=2$ 时,$|\eta|=$ $\underline{\quad 0.02 \quad}$.

9. 设某产品总产量的变化率是时间 t 的函数:$f(t)=2t+5$,$t\geqslant 0$,且当 $t=0$ 时产量为零,则由 $t=0$ 到 $t=5$ 的产品总产量 $=$ $\underline{\quad 50 \quad}$.