近代分析数学概要

陈景良

清华大学出版社

近代分析数学概要

陈 景 良

清 华 大 学 出 版 社

内 容 提 要

本书介绍近代分析数学中的基本概念和性质．全书共六章，内容包括集论，各种抽象空间，Lebesgue 积分，线性算子与线性泛函，广义函数，变分法与变分原理．

本书编写上注重提供具体背景，力求由浅入深，使读者比较易于接受．可作为工科研究生和高年级大学生选修课的教材，也可供非数学专业的科技工作者自学和参考．

具备工科数学分析和线性代数课程有关知识的读者便可阅读本书．

D4/00/35 07

近代分析数学概要
陈景良
☆
清华大学出版社出版
（北京　清华园）
清华大学印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行
☆
开本：850×1168 1/32　印张：15.25　字数：397 千字
1987 年 6 月第 1 版　1987 年 6 月第 1 次印刷
印数：0001—7500
统一书号：平装 15235·280　定价：平装 3.00 元
精装 15235·281　精装 4.50 元

序　言

近代分析数学在工程技术上的应用已越来越为广泛，它的术语、符号和方法在许多技术科学论文中经常被采用．这种情况使近代分析数学不再只是数学工作者的兴趣，越来越多的技术科学专业的学生、研究生和工作者迫切需要了解和熟悉这个数学领域．

本书着重介绍近代分析数学中的基本概念和性质，全书共六章．

第一章集与映射．上世纪七十年代建立了关于任何抽象对象的集的一般理论，它的基本思想已渗入现代数学的各个部门．映射概念刻划抽象集合之间元素的对应关系，它是函数概念的推广．在这一章中介绍了集论和映射的基本知识，还特别补充了数学分析中关于实数的一些重要性质，为后面抽象空间和线性泛函理论等的讨论提供一些必要的基础．

第二章空间结构和抽象空间．在近代分析数学中，数学对象扩展为各种抽象空间．通常把在各种集内引入某种确定的关系称为赋予集以某种空间结构，并把赋予不同空间结构的集称为不同的空间．在第二章集中地介绍了各种抽象空间，包括在集内引进了代数的线性运算结构的线性空间，在集内引进了几何的距离结构的度量空间，在集内同时引进线性运算结构及作为向量长度概念推广的范数结构的赋范线性空间，在集内同时引进线性运算结构及内积结构的内积空间，直至在集内引进能够确切地规定“任意逼近”（极限）概念的拓扑结构的拓扑空间．

第三章 Lebesgue 积分与 L^p 空间．古典数学分析主要处理一些“好”的函数类，例如连续函数类和可微函数类．在集论的基础

上，转向了对更为广泛的函数类的研究，微分和积分概念得到了推广．在本世纪的前夕，产生了分析数学的新分支——实变函数论．这一章介绍了实变函数论的最基本内容．集的测度概念是区间长度的推广，已成为不少数学学科的基础概念．利用测度推广了积分概念，建立了 Lebesgue 积分．L^p 空间是分析数学中最常用的一类赋范线性空间．

第四章线性算子和线性泛函．着重介绍泛函分析的基础理论．在集论及以各种抽象空间为对象而生长起来的各个数学分支之间，新的概念和理论揭示出相互联系的统一的东西，引起了深刻的彼此渗透和相互沟通，数学达到了新的抽象和概括的程度．在数学分析，数学物理，代数和几何发展的基础上，本世纪三十年代形成了数学中一个重要的独立学科——泛函分析，它是研究无穷维线性空间上的泛函与算子理论的一门分析数学．泛函分析是定量地研究诸如连续介质力学、电磁场理论等一类具有无穷多个自由度的物理系统的有力工具．在数学内部，它也渗透到众多的分支中，特别是渗透到逼近论，偏微分方程理论，概率论，数值分析，最优化理论等等之中．

第五章广义函数．自然科学尤其是物理学的发展表明，古典函数概念是不完全够用的．物理学中首先引进了“δ 函数”，即一个“函数”除原点外到处为 0，在原点则等于无穷，而在整个直线上的积分值为 1．有时还用 δ 函数的“微商”．自然，按古典数学分析的观点，这是不可理解的．但是 δ 函数的引进可使计算大大简化，因而促使人们去研究它，这正是本世纪四十年代形成学科的广义函数论的起源．这一章概要地介绍了广义函数论．它用泛函分析的方法，把古典的函数、微分及其它一些概念推广了．它除了包括古典函数（但不是全部）外，还包含了 δ 函数及其它奇异“函数”，既有严格的理论基础，又有比较灵活的运算性质．现在，广义函数论已应用于数学和物理的许多领域中．

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

第六章变分法与变分原理．变分法是一个古老课题，在微积分学研究开始不久，就提出了属于变分法的一些问题．随着泛函分析的发展，变分法的理论得以不断扩展，它已成为泛函分析的一个重要而特殊的部分．变分法以泛函的极值问题（称为变分问题）为研究对象．古典方法将变分问题归结为微分方程定解问题进行处理．主要在本世纪发展起来的直接法则将变分问题就其原有形式进行处理．直接法的发展，使数学物理中的所谓变分原理的许多法则逐步得以建立．变分原理以泛函与微分方程定解问题的关系作为对象．在这里，事情正好相反，即反过来将微分方程定解问题化为适当的泛函极值问题，然后利用直接法去求近似解．第六章作为本书的最后一章，扼要地介绍了变分法中的古典方法，直接法，以及数学物理中的变分原理．变分学的发展是和它在力学、物理及工程等各方面的广泛应用紧密相关的．古典变分理论在十八和十九世纪经典物理学的发展中起过重要作用．二十世纪量子概念出现后，变分法在物理学中的重要性并未减小．各方面不断提出新的课题，促使变分法理论的研究愈加广泛．

从各章安排可以看出，本书取材于集论、实变函数、泛函分析、广义函数、变分法等分析数学学科．内容比较广泛，取材尽量适当，并组成一个比较有机的整体，这是本书编写上的第一个特点；第二个特点是着重介绍重要的基础知识，篇幅较小，使读者用较少时间能掌握近代分析数学的基本内容；第三个特点是讲述方式上注重具体背景，力求深入浅出，在内容结构和推理证明方面尽力做到层次清楚，基本思想线索突出．

已有的近代分析数学方面的书籍，大多是非数学专业的多数学生和科技工作者难以学懂的．本书主要面向物理、力学及各类工程专业的研究生和大学生，希望成为比较易于接受的入门教材．能够比较便于为非数学专业的科技工作者自学和参考，也是作者的愿望．学习过工科数学分析和线性代数课程的读者便可阅读本书．

由于本书涉及较多的术语、符号及定理，为了便于读者查找，本书后面附了一个《索引》，同时对每个术语给出了英文对照.

本书初稿曾为研究生开设的同名选修课中进行过多次试用，并听取和收集了意见.

孙念增教授审阅了本书初稿前四章，迟宗陶教授审阅全部初稿，胡显承教授审阅了初稿的后两章，他们提出了许多重要的意见，作者在此一并表示衷心的感谢.

在教学试用和审阅者提供意见的基础上，作者对初稿进行了修改. 限于作者的水平，又因比较仓促，粗糙、缺点和不妥之处仍在所难免，切望读者多多给予批评和指教.

1985 年 2 月于清华

符 号 说 明

说明一下本书采用的几个逻辑符号及其它几个符号的意思.

逻辑符号:

$\Rightarrow$: 推断符号. 用 p, q 代表两个命题. “$p \Rightarrow q$”表示“若 p 则 q”或“p 蕴涵 q”, p 是 q 的充分条件, q 是 p 的必要条件. 也可写成“$q \Leftarrow p$”.

$\Longleftrightarrow$: 等价符号, “$p \Longleftrightarrow q$”表示“$p \Rightarrow q$ 且 $q \Rightarrow p$”, p 与 q 互为充分必要条件.

$\forall$: 全称量词. 意为“对所有”, “对每一个”, 是“All”第一个字母的倒写.

$\exists$: 存在量词. 意为“存在…使得…”, “有…使得…”, 是“Exist”第一个字母的反写.

几个其它符号:

■: 表示一个定理或论断证明完毕. 当符号“■”直接出现在定理的叙述后面时, 表示前面已经证明, 或者定理明显成立, 或者证明从略, 仅表示定理叙述完毕.

$\triangleq$: 表示“定义为”.

$\equiv$: 表示“恒同于”或“定义为”.

目　录

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

第一章 集与映射

§1 集及集的运算

1.1 集的概念

集是数学中的一个基础概念．对于集的概念，人们往往作出这样或那样的解释，但只能用“全体”、“整体”、“汇集”等类同义语加以描述，却难以用更简单的概念给予定义．G. Cantor 在十九世纪末创立了集论．1875 年在他的《流形理论》中指出：“所谓集是由我们直观的或想象的，明确的相互区别的一些对象所组成的整体”．尔后，F.Hausdorff 1914 年在他的名著《集论概要》中解释说：“所谓集是指事物汇集成一个整体，构成一个新的事物的总称．”

我们可以这样来描述集的概念：由确定的相互区别的一些对象组成的整体称为集（合），常用大写拉丁字母如 X 表之．集内每个对象称为集的一个元（素），常用小写拉丁字母如 x 表之．x 属于集 X 的元，记作 $x\in X$；否则若 x 不属于 X，则记作 $x\overline{\in}X$，或 $x\notin X$．这样描述仅仅是一种解释，并没有真正定义“集”和“元”，因为我们并没有定义什么是“整体”和“对象”．这里不准备讲以公理为基础的集论．

集的概念无非是反映我们研究某类一般的问题时所包含的多种多样的对象及其范围．为了研究问题的需要，我们规定一个集可以不包含任何元素，并称之为空集，记作 $\varnothing$ 或 0．一个集也可以仅包含一个元素，但是更为重要的是包含多个元素的情形．包含有限

8810243

个元素的集称为有限集，包含无限个元素的集称为无限集．元素相异和范围明确是集的概念中两条最基本的属性．

通常总是以各种实例说明集的概念的广泛性．例如某班学生成一集，有理数全体成一集等等．它们都包含可以相互区别的元素，而且可以判明其范围，即某人或数是否属于其中．如果只讲某个班个儿高的学生或大的有理数，那末它们都不能成为一集，因为“个儿高”或“大”均无明确界限．另一方面，如 1/2 与 2/4 都属于有理数集，但它们是同一元素，因为两者只是形式不同而实际相等，$1/2 \neq 1/3$ 则是两个相异元素．

为了明确某集 X 具体由哪些元素组成，常常用列举法和描述法来表示 X．列举法适合于有限集或元素可依次排列的无限集，其表示法是将元素写成一行并用花括号括起来。例如

$$A=\{a,b,c,d,e\},$$

$$X=\{x_1,\ x_2,\cdots,x_n,\cdots\}.$$

集 A 由 5 个不同的字母组成。集 X 则是由一个无穷序列的每项组成，故常把 X 简记作 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，在不至于引起误会的场合，甚至写成 $\{x_n\}$。描述法适合于全体元素均具有某种特征性质的集，其一般形式为

$$X=\{x|P(x)\} \quad 或 \quad X=\{x:P(x)\}, \tag{1.1}$$

其中 $P(x)$是关于 x 的某个命题，表示式指明集 X 是使命题 $P(x)$ 成立的 x 的全体．例如

$$\boldsymbol{R}^n=\{X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)|-\infty<x_i<+\infty,\ i=1,2,\cdots,n\}, \tag{1.2}$$

$$\boldsymbol{C}=\{x=a+ib\ |\ a,b\in \boldsymbol{R}^1,\ i=\sqrt{-1}\ \}. \tag{1.3}$$

显然，集 $\boldsymbol{R}^n$ 是 n 维 Euclid 空间 E^n 中点的全体。特别当 $n=1$ 时，$\boldsymbol{R}^1=(-\infty,+\infty)$ 是实数全体所成之集，常简记为 $\boldsymbol{R}$。集 $\boldsymbol{C}$ 是复数全体。

利用集的表示法，自然数全体，整数全体和有理数全体分别组

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com