迴轉儀的理論

E. Л. 尼古萊

科學出版社

迴轉儀的理論

E. Л. 尼古萊 著

張　燮 譯

科學出版社

1956

Е. Л. НИКОЛАИ
ТЕОРИЯ ГИРОСКОПОВ
ОГИЗ · ГОСТЕХИЗДАТ
1948

內容提要

本書大體可分三個部分，第一部分對於理論力學的基本知識作梗概的敍述，以供讀後面時參考之用。第二部分講迴轉儀的基本理論，先由簡單的(對稱)情形開始，再推及一般，敍述簡單而扼要。第三部分講迴轉儀的各種應用與迴轉儀的效應，如航海羅盤儀與桿軸的附加應力等。讀者只須諳習數學分析及理論力學的初步知識，即可閱讀本書而無困難。由本書還可以約略看出科學的發展與工業基礎的密切關係。

迴轉儀的理論

翻譯者 張 燮
校訂者 何 衍 璿
出版者 科 學 出 版 社
北京朝陽門大街 117 號
北京市書刊出版業營業許可證出字第 061 號
印刷者 上 海 啓 智 印 刷 廠
總經售 新 華 書 店

1956 年 9 月第一版 書號：0498 印張：4 10/32
1956 年 9 月第一次印刷 開本：850×1168 1/32
(滬) 0001—3,248 字數：109,000

定價：(10) 0.75 元

原　　序

本書的目的，在求以最簡要的方式將迴轉儀的理論和它的一些應用介紹給讀者。本書假定讀者具有相當於大學程度的高等數學和理論力學的課程的基本知識。關於理論力學中所有以後需要的知識，在本書第一章內有概括的敍述，作者希望，讀者對於這一章的內容熟悉了以後，即可免去查閱理論力學書籍的麻煩。

本書的作者曾著理論力學教程（該書出版於 1939 年，以後即未重版❶），其中第三卷有迴轉儀的理論，現在這本書便是那一部分的重訂版。

❶ 譯者按，這是作者在 1948 年的序言。後來該書有重訂版，而且已有中譯本，但其中無第三卷。

引　　論

當陀螺以高速度旋轉時，卽有特殊的穩定性；這是我們所知道的事實。高速旋轉體所呈的現象（現在叫做迴轉儀❶現象），表面上看起來似乎是很奇怪而且矛盾的，在很久以前，卽爲愛好研究的人所注意。在剛體力學的歷史中，關於以高速旋轉的陀螺的性質問題，佔有一定而且重要的位置。

剛體力學的有系統的推演，最初見於歐拉的名著"剛體運動論"（1765）中❷。該書對於陀螺的旋轉理論已有詳細的討論。

與天體的旋轉運動有關的現象，表現爲所謂天體運動中的"不均衡現象"。這種不均衡現象（如歲差，地軸的章動，月球的天平動等）的理論，構成天體力學中很重要的一部分。在力學史中很早便已經知道，陀螺的理論對於這種現象有特殊的應用。實際上旋轉的天體並不是別的，正是巨大的陀螺或"迴轉儀"，具有旋轉體的一切特性的。關於歲差的基本理論，最初爲達郎貝爾所創（1749）❸，其後歐拉又加以發展❷，而且他對於地球的章動理論與月球的理論都有所創造。天文學的這種問題，對於剛體力學的進一步的發展有極大的刺激，此種情形可以由拉普拉斯、拉格郎日及其他人的著作中看到。

人們很早已經注意到，高速旋轉體的特殊性質，在各種實用技術中也很有用。遠在1752年，塞爾森❶卽已指出了這種可能性：旋轉

---

❶ 迴轉儀一名，爲法國物理學家福科所引入（1852）。當時係指他所造的儀器而言，其主要部分爲以高速旋轉的轉子。根據此種儀器，他最初用實驗的方法證明了地球的自轉。到了現在，迴轉儀的名詞具有較廣的意義；任何儀器，利用高速旋轉體的性質，都叫做迴轉儀。

❷ Euler. Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum. 1765。

❸ D'Alembert. Recherches sur la précession des équinoxes. 1749。Euler. Theoria motus. 1765。Cap. XVI。

的迴轉儀可用於船上以得出穩定的"人造地平線",在陰天的航海中,可以代替視地平線的天文觀測。可惜,這種最初創造迴轉的航海儀器的企圖終於失敗。英國海軍部曾令發明家在"勝利號"船的航行中試驗他的儀器;不幸該船在航行時失事,儀器的發明家也殉難,因而這個嘗試便宣告終止。

其後的一百年當中,迴轉儀的實際利用沒有人再嘗試過。關於這方面的新發展,出現於1852年福科在法國科學院所發表的著名的實驗。順便說說:在這些實驗中福科指出了(至少在理論上)製造迴轉的儀器來決定已知地點的子午線方向的可能性。這樣就第一個提出了關於迴轉羅盤儀的想法。

福科的意圖,在實現的過程中遇到了重大的技術上的困難;一直到將近本世紀時,這種困難才有了克服的可能。由於工業的發展(特別是電器工業),在二十世紀開始時出現了高度完善的迴轉儀器,這類的儀器中,如安休玆(1906)和斯培爾(1911)的迴轉羅盤儀,在全世界的海軍中,都被廣泛地採用。

到了今日,迴轉現象在工業的多種部門中都有很重大的價值。利用這些現象以達到不同目的的各種不同的迴轉儀器及裝置的數目在迅速增長着。在軍用工業中,也有很多的儀器裝備是根據迴轉儀的原理的。迴轉儀在今日的應用是如此的多而且廣,使我們值得將它的應用與普遍理論分開而成一種特殊的課目,叫做**迴轉儀的應用理論**。

本書推演了迴轉儀一般理論的基礎,並討論關於它的主要應用方面的知識。

---

❶ Serson. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Vol. 47, 1752。

目　錄

第一章　剛體動力學基礎

§1. 歐拉角與萊沙里角

本章內將要推演剛體動力學的基本方程。以後各章卽根據此種方程來建立迴轉儀的理論。這裏對於我們特別重要的剛體運動，便是所謂繞不動點的旋轉。現在首先討論此種運動。

我們提出在運動學中關於剛體的此種旋轉的一些基本結果。

設剛體內有一點固定不動（物體的這種運動便叫做繞不動點的旋轉），則剛體在空間中的位置由三個角的值所定，這三個角稱爲歐拉角；因此，這種剛體便具有三個自由度。現在敍述歐拉角的作法。

給定一個具有不動點 O 的剛體。以 O 爲原點，作互相垂直的三個軸 ξ, η, ζ。又以 O 爲原點作另一組互相垂直的三軸 x, y, z；假定此三軸附着於剛體上，而與剛體同時運動（圖1）。此時 $\xi\eta$ 與 xy 二平面的交線 ON 稱爲節線；這條線垂直於平面 ζz。

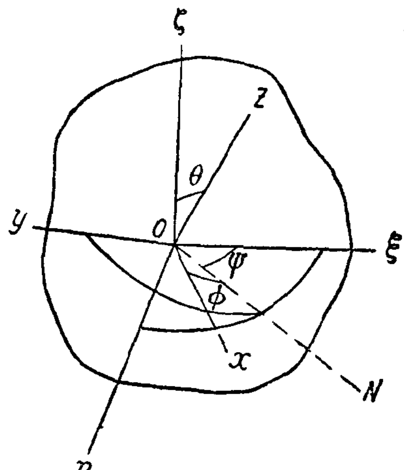

圖 1

所論物體的位置，由附着於物體上的 x, y, z 軸的位置所定。而 x, y, z 軸的位置決定於下列三個角：$(\zeta, z) = \theta$，$(\xi, N) = \psi$，$(N, x) = \phi$；這三個角便叫做歐拉角。

這裏所用的是左手坐標系（以後倣此）；θ, ψ, ϕ 各角的正方向規

定如下：這些角由 ζ, ξ, N 軸起，如果沿順時針方向旋轉，那麼便是正的，但觀測者必須分別站在 N, ζ, z 各軸的正方向處。

我們需要明瞭一點：上面所取的歐拉角並不是唯一無二的。實際上，我們可以用各種不同的方法來選取各角，看問題中的情形而定；但有一件事實保持不變，即繞不動點旋轉的剛體的位置，必須要用三個角來決定。以後在建立迴轉儀的理論時，我們常用 α, β, ϕ 各角代替 θ, ψ, ϕ。而 α, β, ϕ 角的作法如下：

在不動點 O 處仍作不動的軸系 ξ, η, ζ（圖 2；此時剛體的輪廓不再繪出）。又取 x, y, z 軸系，使其附着於物體上而一同運動（爲了使圖形清楚起見，在圖 2 中將 y 軸略去）。繪出平面 $\xi\eta$, $\xi\zeta$, ζz（此三面在圖 2 中用圓弧表示，各弧的半徑是任意的，但彼此相等，又圓心全是 O）。再作節線 ON（垂直於平面 ζz），又在 ζz 面內作 K 軸垂直於 z。則 N, K, z 構成互相垂直的三軸組；這時選取 K 軸的正方向，使 N, K, z 爲左手坐標系，再繪出平面 NK（仍用圓弧表示）。這個平面垂直於 z 軸，故與 xy 面相合。（圖 2 中作出了 x 軸而未作 y 軸）又 J 代表平面 $\xi\eta$ 與 ζz 的交線。

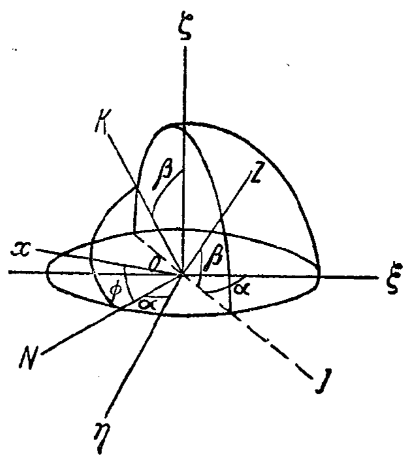

圖 2

這裏規定如此的名稱：平面 $\xi\zeta$ 與 ζz 所成的二面角稱爲 α；z 軸與 $\xi\eta$ 面所成的角稱爲 β。又用前面的記號，將 (N, x) 角稱爲 ϕ。於是物體的位置便由 α, β, ϕ 三個角完全決定。

α, ϕ 二角的正方向規定如下：這些角由 ξ, N 軸起，如果沿順時針方向旋轉時便是正的，但觀測者在 ζ, z 軸的正方向處；又 β 角的正方向爲：當觀測者在 N 軸的正方向時，倘若這個角由正 J 軸起沿

逆時針方向旋轉，那麼便是正的。

在地理學中，α 與 β 分別爲地面點的經緯度（取 $\xi\eta$ 面爲赤道平面）。而在迴轉儀的理論中，α 與 β 常稱爲進動角與章動角。這兩個軸顯然決定於 z 軸（xy 面）在空間中的位置。又 ϕ 稱爲本徵旋轉角，可以由 x, y 二軸繞 z 軸所旋轉的程度而定。

我們不難看出，在 θ, ψ 與 α, β 各角之間，有如下的簡單關係：

$$\psi=\alpha+\frac{\pi}{2}, \quad \theta=\frac{\pi}{2}-\beta.$$

當物體運動時，各角 α, β, ϕ 都隨着時間而變。由方程組

$$\alpha=\alpha(t), \quad \beta=\beta(t), \quad \phi=\phi(t)$$

定出物體繞不動點 O 的旋轉。

α, β, ϕ 常稱爲萊沙里角。又 N, K, z 常稱爲萊沙里軸；這三個軸顯然也在運動，但並不固定於所論的物體上（換句話說，這三個軸在物體中的位置並不是完全不變的）。

§2. 角速度

具有一個不動點的物體的運動，在每一瞬間都可以看作繞某個軸的旋轉；這個軸稱爲瞬時旋轉軸。在力學中，物體的角速度用矢量表出；此矢平行於瞬時軸，而且它的正方向爲由該方向觀察時，物體沿順時針方向旋轉。角速矢用 $\boldsymbol{\omega}$ 來代表❶。

現在假設已經給定萊沙里角 α, β, ϕ 爲時間 t 的函數，而求定出角速矢 $\boldsymbol{\omega}$ 的公式。此時物體的運動方程爲：

$$\alpha=\alpha(t), \quad \beta=\beta(t), \quad \phi=\phi(t).$$

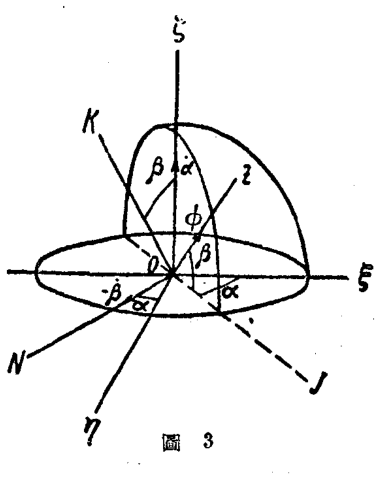

圖 3

❶ 本書內用粗體字母代表矢量；而矢量的數值則用同一個字母的平常字體代表。

要想求角速矢 ω, 只須找出這個矢在 N, K, z 各軸上的投影卽可(圖 3)。而這些投影用 p, q, r 代表。

物體的絕對運動可以由三個部分旋轉所合成:

1) 隨 ζz 面而繞 ζ 軸的旋轉;

2) 隨 z 軸而繞 N 軸的旋轉;

3) 隨 x 軸而繞 z 軸的旋轉。

這三個旋轉的角速度分別爲 $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\phi}$❶, 它們的方向沿着 ζ 軸, N 軸的負方向和 z 軸。我們也可以認爲第二個角速度沿着 N 軸的正方向,此時這個速度矢的大小用 $-\dot{\beta}$ 表出,以後便採用此種觀點(圖 3)。

由角速度的加法定理可知,所求的角速度 ω 僅只是上述三個部分旋轉的角速度的幾何和。於是角速度 ω 的投影 p, q, r 卽爲角速度 $\dot{\alpha}, -\dot{\beta}, \dot{\phi}$ 各在 N, K, z 軸上的投影之和。進行這樣投影,我們得到

$$p=-\dot{\beta}, \quad q=\dot{\alpha}\cos\beta, \quad r=\dot{\phi}+\dot{\alpha}\sin\beta.$$

由這幾個式子便可以定出角速度 ω 的大小和方向。其大小是

$$\omega=\sqrt{p^2+q^2+r^2}=\sqrt{\dot{\alpha}^2+\dot{\beta}^2+\dot{\phi}^2+2\dot{\alpha}\dot{\phi}\sin\beta}.$$

§ 3. 剛體上點的線速度

如所周知,繞不動點 O 旋轉的物體,它上面的點的線速度卽爲繞瞬時旋轉軸的旋轉速度,換句話說,線速度 $\mathbf{v}$ 等於角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 與半徑矢 $\boldsymbol{\rho}$ (由不動點 O 引到所論之點的矢)的矢量積: $\mathbf{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}$❷。

以 O 爲原點,作互相垂直的軸 x, y, z。此時 x, y, z 各軸可以是運動的或者靜止的。倘若有運動,則隨物體同時運動與否都可以。將速度 $\mathbf{v}$ 投影於這三個軸上,則由矢量積的投影公式,卽得速度 $\mathbf{v}$ 在 x, y, z 軸上的投影如下:

❶ 字母上面的黑點,代表對於時間的微分法。

❷ 兩個矢量之間的叉號 ×,代表這兩個矢量的矢乘法。

$$\left.\begin{aligned} v_x &= qz - ry, \\ v_y &= rx - pz, \\ v_z &= py - qx, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

其中 x, y, z 是所論之點關於 x, y, z 軸的坐標，而 p, q, r 是角速度 ω 在這三個軸上的投影。

我們要注意，公式 (1) 對於任何軸 x, y, z 都能成立，不論各軸是運動的或靜止的。

§4. 剛體的動能

現在考慮一個繞不動點 O 旋轉的剛體，求它的動能 T。

設以 dm 代表物體的無窮小元素的質量，而此元素的速度爲 $\mathbf{v}$，則

$$T = \frac{1}{2}\iiint v^2 dm,$$

其中的積分區域是整個物體的體積。

以 O 爲原點而作互相垂直的軸 x, y, z (不動的或者動的)。設速度 $\mathbf{v}$ 在這些軸上的投影爲 v_x, v_y, v_z 並利用公式 (1)，則有

$$\begin{aligned} v^2 &= v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = (qz - ry)^2 + (rx - pz)^2 + (py - qx)^2 = \\ &= p^2(y^2 + z^2) + q^2(z^2 + x^2) + r^2(x^2 + y^2) - 2qryz - 2rpzx - 2pqxy, \end{aligned}$$

其中 x, y, z 是元素 dm 關於所取的軸的坐標，而 p, q, r 是物體的角速度在這些軸上的投影。

將 v^2 的表達式乘以 dm，再在整個物體內求積分，則得

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2Dqr - 2Erp - 2Fpq), \tag{2}$$

其中

$$\begin{aligned} A &= \iiint (y^2 + z^2)\, dm, & D &= \iiint yz\, dm, \\ B &= \iiint (z^2 + x^2)\, dm, & E &= \iiint zx\, dm, \\ C &= \iiint (x^2 + y^2)\, dm, & F &= \iiint xy\, dm. \end{aligned}$$

我們不難看出，A, B, C 各數便是物體關於 x, y, z 軸的慣性矩，而 D, E, F 是物體關於同一組軸的慣性積。

這就是繞不動點旋轉的物體動能的最普遍的公式。

若 x, y, z 軸不附着於物體上，則當時間變化時 A, B, C, D, E, F 不一定是常數。若令 x, y, z 軸附着於物體上，則動能的公式較爲簡單；此時 A, B, C, D, E, F 都是常數。

若取 x, y, z 爲物體在 O 點的慣性主軸，則動能的公式更爲簡單。此時

$$D=0, \quad E=0, \quad F=0,$$

從而

$$T=\frac{1}{2}(Ap^2+Bq^2+Cr^2), \tag{3}$$

其中 A, B, C 是物體在 O 點的主慣性矩。在以後的討論中便採用此種公式——代表繞不動點運動的物體的動能。

其次考慮在普遍的運動之下物體的動能，此時可以用熟知的昆尼希定理：物體的動能等於兩部分的和；一部分是物體隨其重心而作前進運動時的動能，另一部分是物體繞重心旋轉的動能。設物體的質量爲 m，重心的速度爲 $\mathbf{v}_c$，並用公式 (3)，則得物體的動能公式如下：

$$T=\frac{1}{2}mv_c^2+\frac{1}{2}(Ap^2+Bq^2+Cr^2). \tag{4}$$

這裏的 A, B, C 是物體關於中心慣性主軸（也就是通過重心的慣性主軸）的慣性矩，而 p, q, r 是角速度在這些軸上的投影。

§ 5. 剛體的動量矩

現在求剛體的主動量矩或總動量矩。這種矩有時也叫做物體的動力矩。

先考慮物體繞不動點 O 旋轉的情形。過 O 點任作一組互相垂直的軸 x, y, z，而求總動量矩 σ 在這些軸上的投影 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$。設

$\boldsymbol{\rho}$ 爲剛體的任一個元素 dm 的半徑矢(由不動點 O 出發)，並以 $\mathbf{v}\,dm$ 代表元素 dm 的動量，則動量矩 $\boldsymbol{\sigma}$ 等於矢量積 $\boldsymbol{\rho}\times\mathbf{v}\,dm$ 在整個物體內的積分，卽

$$\boldsymbol{\sigma}=\iiint\boldsymbol{\rho}\times\mathbf{v}\,dm.$$

利用矢量積在坐標軸上的投影公式，則得

$$\sigma_x=\iiint(yv_z-zv_y)\,dm,\qquad \sigma_y=\iiint(zv_x-xv_z)\,dm,$$

$$\sigma_z=\iiint(xv_y-yv_x)\,dm.$$

其中 x, y, z 是元素 dm 的坐標；v_x, v_y, v_z 是這個元素的速度的投影，又求積分的區域是整個物體。

由公式 (1) 可得

$$yv_z-zv_y=y(py-qx)-z(rx-pz)=p(y^2+z^2)-qxy-rzx.$$

從而

$$\sigma_x=p\iiint(y^2+z^2)\,dm-q\iiint xy\,dm-r\iiint zx\,dm,$$

也就是

$$\sigma_x=Ap-Fq-Er,$$

其中 A, F, E 的值與前節相同。同樣可得

$$\sigma_y=Bq-Dr-Fp.$$

$$\sigma_z=Cr-Ep-Dq.$$

這裏所導出的公式對於任何軸 x, y, z 都能成立。前面已經知道，要使慣性矩 A, B, C 和慣性積 D, E, F 的值爲常數，必須令 x, y, z 軸附着於物體上才行。倘若取 O 點的慣性主軸爲 x, y, z，則所得的公式比較簡單；此時

$$\sigma_x=Ap,\quad \sigma_y=Bq,\quad \sigma_z=Cr,\tag{5}$$

其中 A, B, C 是物體在 O 點的主慣性矩。以後我們將經常應用公式 (5)。

其次假設物體在空間作一般的運動。將這個運動分解爲兩部分：

一部分是隨物體重心的前進(平移)運動；一部分是繞重心的(相對)旋轉。此時上面的公式對於物體的旋轉運動仍舊能成立。故若仍用 σ 代表物體關於重心的相對旋轉運動的動量矩，並取中心慣性主軸爲 x, y, z 軸，則動量矩 σ 在 x, y, z 軸上的投影仍由公式 (5) 表出；其中 A, B, C 是物體的中心主慣性矩，而 p, q, r 是它的角速度在 x, y, z 軸上的投影。

§ 6. 力矩定律與萊沙里定理

在力學裏面關於質點組的運動的許多基本定理中，有一個對於迴轉儀的理論特別有用，叫做力矩定律。現在敍述這個定理的內容。

設有一組運動的質點 $M_1, M_2, \cdots, M_n$ (圖 4)。將所有作用於各質點的力分爲兩類: 外力 $\mathbf{F}_1^E, \mathbf{F}_2^E, \cdots, \mathbf{F}_n^E$ 和內力 $\mathbf{F}_1^J, \mathbf{F}_2^J, \cdots, \mathbf{F}_n^J$。取不動點 O 而作質點組關於 O 點的動量矩 σ (也就是主動量矩)，及所有外力關於 O 的主力矩 $\mathbf{L}$ (也就是總力矩)。當質點組運動時，它的動量矩 σ 通常並不是恆量，力矩定律即在敍述變動的動量矩 σ 與作用於質點組的所有外力的總矩 $\mathbf{L}$ 的關係。我們有如下的定理。

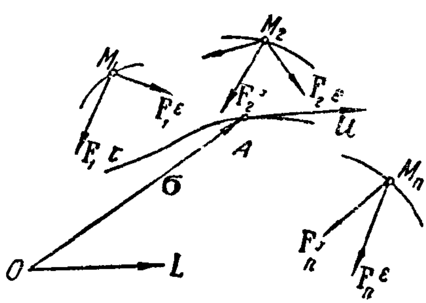

圖 4

動量矩 σ 關於時間 t 的導數，等於作用於質點組的所有外力的總力矩 $\mathbf{L}$:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \mathbf{L}, \tag{6}$$

這就是力矩定律。此處所說的動量矩的導數，當然是指矢量的意義而言。又 (6) 式右邊僅僅是所有作用於質點組的外力的總矩。其理由如下：所有內力的總矩等於零；原因是內力成對地出現，彼此大小相等，並且沿同一直線上作用而方向相反的緣故。

力矩定律的陳述也可以稍加變化。當質點組運動時，動量矩 σ 的