经济理论中的最优化问题

A.K.狄西特著（英）

曾朝阳　　李成译

王宏经　　陈祥福校

中国展望出版社

经济理论中的最优化问题

A.K.狄西特著（英）

曾朝阳　　李 成 译

王宏经　　陈祥福校

中 国 农 业 出 版 社

经济理论中的最优化问题

曾朝阳　　李　成译
王宏经　　陈祥福校

中国展望出版社出版
（北京白塔寺太平桥大街4号）
陕西西安黄良印刷厂印刷
北京市新华书店发行

787×1092毫米　1/32　开本5.125印张　字数　109千字
1986年10月第1版第1次印刷　印数1—4000册
统一书号：4271.247　　定价：1.15元

内容简介

由A。K狄西特著（英）的本书是一本介绍经济使论中最优化问题的入门教材。书中的内容包括：拉格朗日方法，影子价格，最大值函数，不等式约束，凹性规划，结果及应用，比较静态经济学，二阶条件，时间最优化，动态规划，应用实例等。为了便于学习，本书把有关的数学知识和经济理论融为一体，力求从经济学的角度对所用到的数学进行说明。在每章中，作者先给出本章的主要理论，然后举例进行说明，对于一些较深的概念在习题中进行了进一步的发展。而且，书中所采用的例子大都和实际情况有关。

本书的特点是编排新颖，简明易懂。此书，既可做为广大经济理论工作者和大专院校师生之参考资料，也可做为大专院校的教材，并适用于广大经济理论工作者自修使用。

前　言

从一组方案中选择一个最好的分析方法是大多数经济问题所具有的一个共同特点。需求经济模型自然引入一个总的标准函数，在考虑了资源可靠性和技术可能性的情况下，使该标准函数取最大值。市场经济模型发现用最优选择的方法系统地描述各个代理人的特征是很有用的。对于每个消费者，使他的效用在其预算约束下取最大值；对于每个生产者，当其生产能力给定时，使其企业的净值最大。在这两种极端情况之间是混合经济，在这种经济中，政府可制定某些政策作为工具，但对资源的分配不能完全控制。这种经济包含两级最优化：政府给定一组政策，其他的代理人做出他们自己最好的选择；而政府在考虑确定其最优政策时，不仅需考虑总的资源和技术约束，而且还要考虑到这些私人代理人的响应。

既使在目前大多数经济学家已经具备了一定的数学基础的时代，在约束条件下求最优所使用的技术，常常还被认为是非常奥秘的。特别是在包含时间的决策问题，更是如此，在那里某时刻的选择将会影响以后可采用的选择。通常出现这个问题是由于学生们突然接触到这门数学，并且感到很奇妙，以致于从这样突然相遇的经历中不可能完全恢复起来。实际上，完全可能从一种非常简单的方法来开始这种问题的讨论，即从开始就把数学和经济学联系起来，并且以一种容

易处理的步骤逐步搞清楚更加深入的方法。本书就打算这样进行。

很自然，我们强调了理解而不是精确。证明过程仅是为了帮助进一步的理解才给出，并且实例和应用都是从其经济意义和使用角度来选取的。

在每一章中，先给出本章所讲的内容，然后依次为例题、习题和进一步的参考文献。就主要思路而言，例题是全解出来了，虽然为了节省篇幅，省去了一些代数或积分的机械推导步骤。习题是对本书中由例题引出的一些概念的进一步发展。象一般的数学教科书一样，本书中的例题和习题是很重要的，并且对于学习本书，这些内容是一个不可缺少的部分。所列的参考文献包括一些有关的基本数学知识或读者所需的一些经济学知识的文献，也包括一些更深入的著作和论文，在这些文献中有兴趣的读者可对本书中还没有搞清楚的概念（或想法）进行仔细琢磨。大部分的习题和应用实例是从微观经济理论中选取的。然而，这并不意味着这是一本有关过渡微观经济的教科书，最好是把这本书和有关数学书结合起来学习，或者反过来进行。

书中给出的经济内容主要是大学一年级课程中的大部分内容。数学知识开始时仅限于偏导数和矩阵的乘积。二次型在第八章出现，第九章用到积分，但是在每种情况下，仅使用了最基本的性质。第四章和第五章所用的凸性性质象在第十一章有关微分方程所用的一些基本记号一样，在所用到的地方都进行了论述。

文中所用的数学记号是一致的，但在例题和习题中经常使用不同的记号，通常对于所讨论的特殊应用都是这样做

的。只要记住这一点，就不会引起任何混淆。同样，我们没有用黑体字表示矢量，其目的是说明用文中的自然方法，我们根据矢量和矩阵可以从标量推得一般的结果，这在书中已区别得很清楚了。最后，为了减少繁锁的重复，我们经常仅给出最大值的一般理论。只要对最大值的结果进行简单的符号改变，就能用到最小值问题中。当所得的结果不同时或值得分开来说明时，我们把需要做的说明或推导放到习题中。

A. K. 狄西特

一九七五年五月。

目　　录

一、拉格朗日方法

经济学中许多简单的最优化问题的解就是两条曲线的切点。这方面最著名的例子是：一个消费者在其预算线上选择两种商品的量以在其同好（indifference）图中达到最高可能的同好曲线的问题。在选择点，预算线和最高可达到的同好曲线相切。另外一个例子是：一个给定资源的生产者可按放置在一条转换曲线上两种货物量的任意一种组合生产使得转换边际率趋于零。当两种货物的价格给定时，生产者将按使其得到最大收入的组合生产。在第一个例子中，约束曲线是一条直线，而在第二个例子中，等收入线构成了一个平行直线族。一般说来，上述约束线和等目标线族可以是非线性的。已知转换曲线的计划经济问题就是这方面的一个例子，该计划的目的是选择使社会福利标准最大的生产计划。等社会福利线将形成了一个凸的同好图，而生产可能性计划表将是一条凹曲线。对这些曲线的曲率也有限制条件，这些将在后面讨论。

一般的问题导致了图1.1所示的图形。这种图形对于大部分人来说是很熟悉的。为了进行代数处理，我们得用一个方程来定义约束曲线。用x_1和x_2分别代表两种货物的量，并且假定联系这两种货物的方程可写为：

$$G(x_1, x_2) = c \tag{1.1}$$

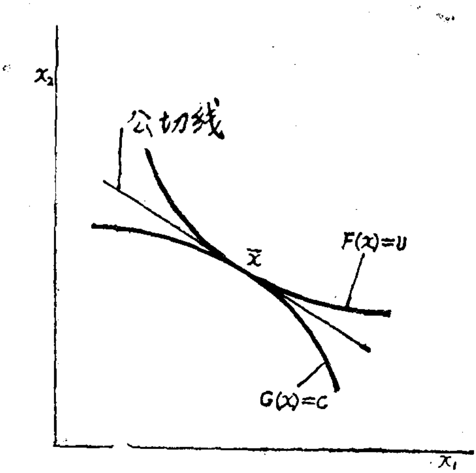

图1.1

式中G是一个函数，c是一个常数。例如，在上述消费者问题中，约束具有形式 $p_1x_1+p_2x_2=m$，这里p_1和p_2是两种货物的价格，m是其收入。

令最优选择量为(x_1, x_2)，通过该点的等目标函数F的方程为：

$$F(x_1x_2)=v \qquad (1.2)$$

注意到c是问题的已知数，而v的值仅在最优选择确定以后才能知道，即$v=F(x_1,\bar{x}_2)$。

前面的量可用矢量写成更紧凑的形式

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{x}=\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix}$$

开始时我们用矢量仅是为了简化分量的写法。矢量和矩阵的实际运算在后面将逐步用到。

观察图1.1，我们得到一个著名的经济条件：即如果$\bar{x}$是最优选择，那么由方程（1.1）和方程（1.2）确定的两条曲线在该点应该是相切的。换言之，在该点它们应具有相同的斜率。为了从代数上给予表达，我们必须找到用F和G来

表示的斜率表达式。先看约束线G，考虑该线上点$(\bar{x}+dx)$，此点接近于$\bar{x}$，且$dx=(dx_1, dx_2)$是一个无穷小量。这样dx_2/dx_1就是曲线在点x处的斜率。

这样的无穷小增量具有边际改变的自然经济意义，并且能严格地说明它们的用处。但是，初学者通常在处理无穷小量时容易犯错误，重新温习一下微积分教科书中有关这方面的论述，对于他们将是很有帮助的。微积分中指出：无穷小量是先取很小的有限量然后再取极限。

由于所考虑的两点$(\bar{x}, \bar{x}+dx)$在曲线(1.1)上，所以G的值在这两点上相同。特别是，一阶改变量dG(这个量通过用x的导数值取G的线性增量得到)为零。这样有

$$0=dG=G_1(\bar{x})dx_1+G_2(\bar{x})dx_2$$

式中G_1，G_2分别是当$j=1$和2时偏导数$\frac{\partial G}{\partial x_j}$的值。当然，它们都是x的函数，在上述方程中，它们是在x点计算的。这样则有

$$dx_2/dx_1=-G_1(x)/G_2(x)$$

这是隐函数求导数的标准计算公式。注意到：如果$G_1(x)$，$G_2(x)$中的任意一个为零，我们还可以定义这个式子有意义，即可能为零或无穷大。如两者都为零，有可能碰到一些问题。尽管在一些特殊情况下，还是有意义的，但是为了确保一般结果的正确性，我们只考虑这两者中至少有一个在x点不为零的情况。

同理，我们可得到式(1.2)在x点斜率为$-F_1(x)/F_2(x)$。如果x是最优选择，那么在该点上述两斜率应相等，即

$$F_1(x)/F_2(x)=G_1(x)/G_2(x) \quad (1.3)$$

这样的一个需要在最优点满足的条件称为最优必要条件。一个保证最优的条件，即一个这样的条件，如果它在$\bar{x}$成立，那么$\bar{x}$是最优，称为充分条件。

式（1.3）左边项，即等F值的线的斜率，是沿着一取最大值的同好曲线的边际替换（主观）率。同样，右边是关于约束的边际转换或者技术替换率。这样它们相等的条件应该是熟悉的；在这里两者仅仅是根据其基本函数的偏导数表达的。

当然，点$\bar{x}$必须在约束线上，即

$$G(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = c \tag{1.4}$$

在式（1.3）和（1.4）中，我们得到了求解未知数$\bar{x}_1$和$\bar{x}_2$的两个方程。这些方程通常是非线性的，这样在确定方程的解是否存在或唯一之前，我们要对方程进行仔细检查。甚至更坏的是：如果我们对同一函数在相同的约束条件下取最小值，那么相同切线的论断将导致了完全相同的必要条件。这样我们的必要条件远非充分。然而这些问题可用不同的方法得到较好的处理。在这里我们将暂不考虑这些问题，将继续假定$\bar{x}$是唯一的最大值参数。

这里应该注意到一个很重要的事实。就是在前面我们说过v的值，只有在最优选择确定之后，才能知道。幸运的是v在式（1.3）和（1.4）中都不出现。这样在开始时v是否已知对于求解是无影响的。我们在不知道v的值的情况下，可求得$\bar{x}$，然后利用$\bar{x}$求得v之值。

为使用方便，把式（1.3）表示成另外一种形式

$$F_1(\bar{x})/G_1(\bar{x}) = F_2(\bar{x})/G_2(\bar{x}) \tag{1.5}$$

令上式的比值为π，则有

$$F_1(\bar{x}) - \pi G_1(\bar{x}) = 0 = F_2(\bar{x}) - \pi G_2(\bar{x}) \quad (1.6)$$

这些方程可解释成如下的说法：定义了π之后，再定义一个新函数

$$L(x) = F(x) - \pi G(x) \quad (1.7)$$

这样方程（1.6）意味着在$\bar{x}$点L的两个偏导数都为零。这是一个众所周知的微积分结果，即如果一个函数在没有约束的条件下取最大值，那么它的所有一阶偏导数在该点的值都为零。这点从其经济学方面来看也是很明显的。例如，一个没有预算限制的消费者将不停地选取货物，直到不增加效用为止，即直到所有货物的边际效用都降为零为止。有鉴于第六章讨论的复杂性，在这里我们看到$\bar{x}$满足在无约束条件下L（x）取最大值的一阶必要条件。这种从有约束的最优化问题降为无约束的最优化问题具有很重要的经济意义；在第四章这一点将会看得清楚。

条件（1.6）给我们提供了另外一种确定$\bar{x}$的方法。在式（1.4）和（1.6）中，我们有三个方程，其中包括三个知数$\bar{x}_1$，$\bar{x}_2$和π。注意到前面对ν的说明，我们可用这些方程求得解。象ν的情况一样，我们不必事先知道π的值，尽管开始时我们是根据最优选择来定义π的。在建立函数L时，我们可把π作为一个待定乘子引入，并把求解其值作为整个求解过程的一部分。

这种方法称为约束最优化的拉格朗日方法。π称为拉氏乘子，函数L称为拉格朗日函数或者拉氏表达式。

这种方法易于推广到几个变量和几个约束的情况。很明显，在图1.1仅选了两个变量的目的是容易进行几何说明。具有多个约束的问题在经济学中是常碰到的。例如，一个消费

者不仅要对其收入进行预算，而且还会对其时间也进行预算，或者他可能遇到在起草一定时间范围内的最优消费计划时的各时间离散预算约束。一个国家计划者也得保证他的生产计划中所用的任何一种资源的量都不能超过实际可提供的量。对于下几章的许多结果，我们将用这个例子来进行说明和解释。

拉氏方法易于推广到这些问题的处理中，并且这种明显的推广也是正确的。假设有n个选择变量形成一个矢量x，并且这n个变量经受一个约束条件$G(x)=c$，这在n维空间中确定了一个超平面。对于$F(x)$的最大值，我们有关于一阶导数的条件，即一阶条件

$$F_j(\bar{x})-\pi G_j(\bar{x})=0 \qquad j=1,2,\cdots n \quad (1.8)$$

用这n个方程和约束方程$G(x)=c$，我们可求得$\bar{x}$的n个分量和乘子π。其次，假设有n个选择变量和m个约束$G^i(x)=c_i$，式中我们用上标来表示函数以免和代表偏导数的下标相混淆。这里需要$m<n$，是因为n个约束通常将把可行集合降为一个离散点集合，而更多的约束一般将是相互不协调的。为了把拉氏方法推广到这种情况，我们得对每一个约束定义一个乘子。如果用π_i记第i个约束的乘子，则得

$$F_j(\bar{x})-\sum_{i=1}^{n}\pi_i G_j^i(\bar{x})=0 \quad j=1,2\cdots\cdots n \quad (1.9)$$

式中G_j^i代表偏导数$\partial G^i/\partial x_j$。容易验证：方程(1.9)和约束方程$G^i(\bar{x})=c_i$的总个数正好等于分量$\bar{x}_j$和乘子$\pi_i$的总个数。这样方程是可求解的。

用矢量表示式(1.9)将显得更为紧凑。令c为具有c_i分量

的行矢量，G是一个具有G^i分量函数的矢量函数。这样，所有的约束方程可写为矢量形式$G(x)=c$。其次，把偏导数$F_j(x)$用矢量$F_x(\bar{x})$来代替，这里下标x表示矢量函数$F(x)$对x求导。我们将作如下的约定：如果一个函数的自变量是一个行矢量，那么这个函数的偏导数矢量将是一个列矢量（反之亦然，后面我们会碰到列矢量变量）。数学上这个结论将是很明确的，这里我们引入这个结论的目的在于省得我们以后再进行重复性转换。同样，对于每个G^i，偏导数列矢量为$G_x^i(\bar{x})$，并且所有$G_x^i(x)$将形成一个$m\times n$维矩阵，记为$G_x(\bar{x})$。乘子π_i将形成一个列矢量π。现在，把矩阵相乘的定义应用到式（1.9），容易看到：列矢量或$1\times n$维矩阵$F_x(\bar{x})$等于$1\times m$维矩阵π和$m\times n$维矩阵$G_x(\bar{x})$的乘积。当仅有一个约束时，我们必须假设至少有一个$G_i(\bar{x})$不为零，即$G_x(\bar{x})$至少有一个非零分量。对于多个约束，则需要矩阵$G_x(\bar{x})$的列矢量线性无关，即矩阵$G_x(\bar{x})$的秩为m。容易看到一个约束的情况是这个一般情况的特例；即矢量和其自身是线性无关的，只有仅有当其不为零时。

上述这些一般性结论的证明既非容易也非简单。在第五章和第六章推导更一般的结果时我们也将使用其他的更直观的方法。所以，这里我们将不给出证明过程，仅概括地给出结果作为参考。

如果$\bar{x}$使$F(x)$在约束$G(x)=c$下取最大值，并且$G_x(\bar{x})$是满秩的，那么将存在一个列矢量π，使得

$$F_x(\bar{x})-\pi G_x(\bar{x})=0 \qquad (1.10)$$

拉氏方法提供了一种求解许多经济最优化问题的方便的机械方法。对每个约束定义一个乘子，形成函数L，然后令其偏导数为零，求解所得方程和约束方程。后面我们将会看到对这个方法进行修正和补充的方法，以便使这个基本方法能够包括一些和经济问题有关的复杂因素，但是这个基本方法将还是一个有价值的工具。

例　题

例1.1　求$F(x,y)=x^{\alpha}y^{\beta}$在约束$px+qy=m$下的最大值。在预算约束下效用最优化问题就是这方面的一个典型例子，式中p、q是货物x、y的价格，m是经济收入（当有两个变量时，用记号（x、y）比用记号（x_1,x_2）方便）。

第一种求解方法是令等目标函数线的斜率等于约束曲线的斜率。如前所述，我们将用隐函数求导的方法求出前者的斜率，如此则

$$-\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\Big/\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)=-(\alpha x^{\alpha-1}y^{\beta})/(\beta x^{\alpha}y^{\beta-1})$$
$$=-(\alpha/x)/(\beta/y)$$

后者的斜率为$-p/q$。在这个例子中，上述表达式也可容易地通过对每条曲线的显式表达式求导获得。这样

$$F(x,y)=v\quad 意味着 y=v^{1/\beta}x^{-\alpha/\beta}$$

沿着约束曲线，则有$y=m/q-(p/q)x$

一般情况，找显式表达式要难得多。

现在，最优选择（$\bar{x}$，$\bar{y}$）满足两条曲线的斜率相等的条件，即

$$(\alpha/\bar{x})/(\beta/\bar{y})=p/q$$

或者

$$p\bar{x}/\alpha=q\bar{y}/\beta \qquad (1,11)$$

使用预算约束，我们可得到解

$$p\bar{x}/m=\alpha/(\alpha+\beta) \text{ 和 } q\bar{y}/m=\beta/(\alpha+\beta)$$

这个解具有预算份额为常数的特性。这种解通常不能表征消费者的实际特性，而应该采用更好的解（例如下面的例1.2和习题1.4）。然而，这个例子在许多情况下具有很大的说明价值。而且和其类似的例子更能表征生产者的特性。

第二种求解方法是引入一个拉氏乘子π和形成拉氏表达式

$$L(x,y)=x^{\alpha}y^{\beta}-\pi(px+qy)$$

使F（x，y）取最大值的一阶条件是通过令L的每个偏导数为零来得到。这样最优选择（$\bar{x}$，$\bar{y}$）满足

$$\alpha x^{\alpha-1}y^{\beta}-\pi p=0$$

$$\beta x^{\alpha}y^{\beta-1}-\pi q=0$$

当约束方程是线性方程时，求解上述方程的一种有用办法是：用x乘第一个方程，y乘第二个方程，然后，把两个方程相加，则有

$$(\alpha+\beta)x^{\alpha}y^{\beta}=\pi(px+qy)=m\pi$$

如果我们把从这个方程求得的π值代入到上述每一个方程，我们得到和第一种方法一样的解。此外，如果我们愿意，也可根据该问题的有关参数求得π值。这一步骤留作一个习题。

这个例子的反问题是在约束$x^{\alpha}y^{\beta}=z$ （1,12）下求（$px+qy$）的最小值，上式中z是一个给定标量。利用生