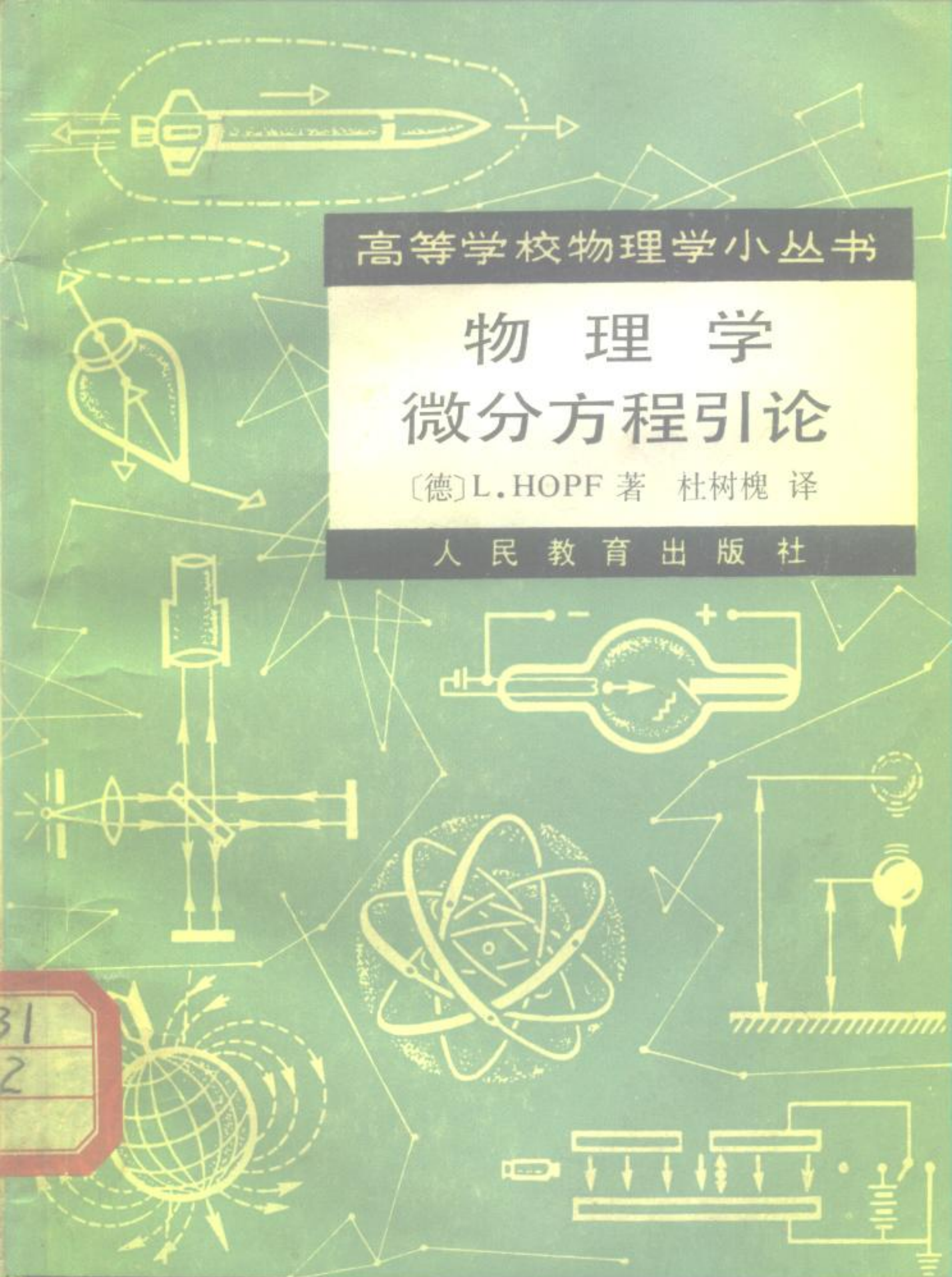

高等学校物理学小丛书

物理学微分方程引论

〔德〕L. HOPF 著　杜树槐 译

人民教育出版社

高等学校物理学小丛书

物理学
微分方程引论

〔德〕L. Hopf 著
杜树槐 译

人民教育出版社

内容简介

本书是根据〔德〕L.Hopf原著的 W.Nef 英译本«Introduction to the Differential Equations of Physics»翻译的，这是欧美广为流传的一本小书，为美国著名的《伯克利物理学教程》的参考读物，虽然篇幅不多，却较为全面地论述了各种物理问题，并建立了相应的常微分方程或偏微分方程，内容精炼，深入浅出，易于自学。书中通过各种典型实例，不仅给出了这些问题的分析计算方法，而且指明了各种数学关系的物理意义，使数学工具与物理概念较好地结合起来。对于学习物理学中的微分方程的读者来说，这是一本较好的入门书，可供理工科大学师生和具有初步微积分基础的读者学习参考。全书共分七章，前四章着重于物理学的各种微分方程的分析与建立过程，后三章则通过各种典型实例，给出了方程的各种解法。

高等学校物理学小丛书

物理学微分方程引论

〔德〕L.Hopf 著

杜树槐 译

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂 印装

开本 787×1092 1/32 印张 4.5 字数 93,000

1981年10月第1版 1982年12月 第1次印刷

印数 00,001—10,700

书号 13012·0685 定价 0.49元

英译本出版说明

从物理学家和工程师的观点来看，这是一本优秀的数理常微分方程和偏微分方程的入门参考书。书中的基本数学概念和方法是通过紧密联系历史上的物理问题引出的。它主要强调直观方面，而不着重数学推演的形式。由此，作者成功地使读者直接地理解问题，这些问题所涉及的内容远远超出了本书所预期的范围。

另外，学习本书只需有初步的微积分知识，不必先具有更高的数学基础。所以，特别适合于自学。书中通过作者采取的典型方式，引出了矢量运算和分析的基本概念，而不是把这些内容编入预备性章节或附录。作者在讨论问题的过程中自然而然地逐步引入了这些概念。

目　　录

第一章　自然定律的微分方程表达式

1. 因 果 律

任何微分方程都是表达导数之间或导数与变量的某种函数之间的关系式．因此，有了它就可以确定某些量的增量与这些量本身之间的关系．微分方程的这一特性使它成了因果律原理的自然表达式，而因果律原理则是精确的自然科学的基础．古代希腊人建立了一些自然定律，其中各数目间的一定关系（球的谐和），或物体某些形状起了特殊的作用．他们曾假定定律是关于某个全过程或某个物体完整形状的叙述．在近代（伽利略、牛顿等人），则采用了不同的概念．我们并不试图直接建立一个过程所有各阶段（或状态）之间的关系式，而是想把过程的一个阶段（或状态）和下一个阶段（或状态）联系起来．这一类定律可以表示某个状态在最近的将来要如何演变，也可以描述一个质点的状态对邻近质点的影响．这样，我们就有了根据时间和空间的微小差别（用数学语言，即所谓"无限小"）来描述自然定律的程序．定律中涉及的增量是以导数（即用以描述过程的变量的增量除以发生这一演变的空间或时间的增量得到的商取极限）的形式出现的．这种形式的自然定律就是一个状态（在时间或空间上）和邻近状态之间关系的表达式．所以它代表了因果律原理的一种特殊形式．

2. 常微分方程和偏微分方程

一个微分方程如果仅有一个独立变量，就叫做常微分方程；如果有几个独立变量，则称为偏微分方程。在常微分方程中，只出现普通导数；而偏微分方程，则包含偏导数。这两类微分方程间的差别，从物理学的观点来看更为显著，它涉及到最深刻的物理问题。关于物理过程，存在着两种根本不同的概念，物理学理论即以这些概念为基础。第一种观点认为：物质由单个粒子组成，这些粒子在空间运动，不发生任何变化。而每个粒子的位置作为时间的函数是可以确定的。在所有的过程中，时间是唯一的独立变量。这个观点是牛顿力学和原子论的依据，原子论也是把基本粒子的运动看成是所有物理过程的唯一基础。因为常微分方程只有时间这个独立变量，所以，它是这一类定律的数学表达式。

第二种观点是：在物理学特别是在电磁学和光学领域里用到的场论。在这一理论中，所有过程都是通过场量来确定的，场量在空间的每一点都有确定值，这个值通常是时间的函数。于是，我们有四个独立变量（三个空间坐标和时间）。建立在这个概念基础上的定律用偏微分方程来表达。

常微分方程和偏微分方程就是这样两种基本观点的数学表达式，两者在量子理论中的综合是现代物理学中一个重要的问题。

不过，常微分方程也可能出现在与原子论毫无关系的物理问题中。例如，也出现在电振荡理论或梁弯曲理论中。但是，在这些场合下，常微分方程并不是任何基本定律的直接表达式，而只是除了一个变量以外，忽略了所有其它变量影

响的一个近似式。

3. 初始条件和边界条件

单靠微分方程还不能表达一个特定的物理问题。微分方程所表达的只是我们研究的普遍定律，并非表示特定情况。一个特定的情况是由初始条件或边界条件来确定的。任何一个积分都包含一任意常数，而偏微分方程的积分，却包含着任意函数。为了用数学形式完整地表述这个问题，并解出微分方程，必须给出数目与被积方程的积分中任意函数或任意常数的个数相同的物理学边界条件。以后，我们要始终注意关于这些条件的必要个数。

4. 标量与矢量

用来描述一个物理量或物理过程的数学量是各种各样的，这些数学量的差别主要在于确定它们所需数值的个数。如果一个量仅由一个数就能完全确定，这个量就叫做标量（如：温度、密度、时间等）。当然，在我们确定这个单一的数量之前，必须选定单位制。

空间中一点的位置，则不能只用一个数来确定。因为空间是三维的，所以，必须给定三个数来确定这个点的位置。确定这三个数的方式是不重要的，它们可以是直角坐标系中一个点的坐标，也可以是从坐标原点到这个点的距离和确定由原点到此点方位的另外两个数。但是，在任何情况下，我们都必须用三个数来确定一个点在空间中的位置。有很多量

也可以用三维空间中的一个线段来表示。例如，图解静力学问题中的力。任何需要用三个数来确定的量就叫做矢量。

还有很多复杂的物理量要由三个以上的数来确定（如：弹性体中的应力和应变，每个量都要由六个数来确定），这种量叫做张量。在一般的张量理论中，矢量是一阶张量，而标量为零阶张量。在现代物理学中，还有一些量要用四维空间中的线段来表示，它们叫做四维矢量。此外，还有四维张量等等。我们这里只用到标量和三维的矢量。

由于本书的篇幅所限，不允许我们涉及到更加深入的物理学专门问题。因此，这里连波动力学和相对论的最基本内容也不能予以介绍。在这本书中，我们只用微积分中的基本定理作为工具，并力争将物理概念和数学方程的建立紧密联系起来。作为进一步学习的基础，我们建议大家阅读：Ph. Frank 和 R. Von Mises 所著的《力学和物理学的微分方程与积分方程》（Ph. Frank and R. Von Mises: Die Differential-und Integralgleichungen der Mechanik und Physik）①。

①第二版，影印．*M. S. Rosenberg*，1945年出版于纽约．

第二章　质点力学的常微分方程

1．质点的运动

力学的基本单元是质点，其物理特性可以用它的质量 m 和它在空间中的位置来完全确定．质量 m 是一个不变的标量，而质点在空间中的位置则是随时间变化的，它可以用直角坐标 x，y，z 来描述．量 x，y，z是从坐标系原点到点x，y，z 的矢量 $\mathbf{r}$ 的分量．唯一的独立变量是时间 t．

质点的运动是由两个量来描述的．这两个量表示在很短的时间间隔内质点位置的变化，我们可以借助于取极限的方法来加以确定。首先令质点仅沿 x 轴移动，即该质点在每一时刻坐标 $y=0$，$z=0$．如果我们指定在时刻t 时的 x-坐标为 x，时刻 t_1 时的 x-坐标为 x_1，则比值(位置的差)/(时间的差) $=(x_1-x)/(t_1-t)$ 叫做在时间间隔 (t_1-t) 内的"平均速度"．它的极限值$\dfrac{dx}{dt}$叫做在时刻t 的"瞬时速度"，或者就叫"速率" v。速率通常不是常量，它随时间而变．如果作出比值（速率的差)/(时间的差），并对 (t_1-t) 趋于零取极限，就可以得到"瞬时加速度"，即 $a=\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{d^2x}{dt^2}$．

如果运动没有固定的方向，则 y和 z 就可能不等于零．但

是，我们也可以用同样的取极限的步骤得到速度 的 三 个 分量。

$$v_x=\frac{dx}{dt},\quad v_y=\frac{dy}{dt},\quad v_z=\frac{dz}{dt} \tag{2.1}$$

和加速度的三个分量

$$a_x=\frac{dv_x}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2} \qquad a_y=\frac{dv_y}{dt}=\frac{d^2y}{dt^2},$$

$$a_z=\frac{dv_z}{dt}=\frac{d^2z}{dt^2} \tag{2.2}$$

这样，速度和加速度也都是矢量。所以，也应当用黑体字 $\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{a}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}$来表示。

牛顿的基本定律就是由“加速度”矢量和作用在质点上的“力”矢量 $\mathbf{F}$ 之间的关系式构成的。这条定律可以用微分方程来表示，即

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\mathbf{F} \tag{2.3}$$

其分量式为

$$m\frac{d^2x}{dt^2}\left(=m\frac{dv_x}{dt}\right)=F_x,\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=F_y,$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2}=F_z \tag{2.3a}$$

本书不可能讨论所有与“力”和“质量”这些概念相关的物理学和哲学问题，我们唯一的向导是用肌肉的力量移动重物，拉长橡皮绳等等日常经验所得到的直觉知识。在这些动作里，很明显力是具有方向和大小这些矢量性质的。任何一个力都能引起质点运动速度的变化，从而使质点的位置也发生变化。这些变化是用导数表示的。所以，上述定律具有

微分方程的形式。

2. 自 由 落 体

为了从一般的自然定律过渡到特定的情况，我们取一个仅在重力影响下的物体，这样，物体就只受重力 W 的作用。重力的作用方向总是“向下”的。如果我们把这个方向取作 y 轴的负方向，则力的三个分量是

$$F_x = 0, \qquad F_y = -W, \qquad F_z = 0 \tag{2.4}$$

由此我们可以得到该问题的微分方程：

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = -W, \qquad m\frac{d^2z}{dt^2} = 0 \tag{2.5}$$

现在，我们的任务是确定 x、y、z 这三个量与 t 的函数关系。为此，我们需要一些附加的信息，以便把我们所研究的特定情况与所有其它情况分开，从而确定上述方程的积分常数。

式（2.5）为三个二阶微分方程（即含有二阶导数的方程）。把二阶导数变换成函数的两次积分要产生两个任意常数。这样，在整个求解过程中，就会出现六个积分常数。为了确定这些常数，就需要六个给定的数值。在物理学上可以把这种情况表述为：上述定律仅与加速度有关，也就是说当一个质点有确定的加速度时，却可以有任意的速度或位置。速度和位置不确定，但它们却表征特定情况。因此，为了处理特定情况，必须给出速度和位置。这一事实在数学上用微分方程的阶数来表示。不过，如果在任一时刻给定了三个速

度分量和三个位置坐标，而它们将来的演变遵从微分方程，那么，我们就能够算出它们在任一时刻的数值。当然，这里必须预先假定微分方程是可积的。

举例来说，我们取时间 $t=0$ 时的“初始值”为

$$x=0,\qquad y=h,\qquad z=a,$$
$$\frac{dx}{dt}=0,\qquad \frac{dy}{dt}=0,\qquad \frac{dz}{dt}=0 \tag{2.6}$$

在物理学上，这种情况意味着在 $t=0$ 时刻，位于点 $(0, h, a)$ 处初始速度为零的质点，在只有其本身重量的影响下下落。这种质点运动就是“自由落体”。

式（2.5）中三个微分方程是联立的，它们含有三个未知量，并同时成立。在这种情况下，方程是很简单的，因为每个方程只包含一个未知量，而且对于初始条件来说也是这样。所以，这个数学问题可以简化为三个独立的二阶微分方程的积分。对于每个微分方程来说，有两个给定的初始条件。这时方程的通解也是简单的，它有六个积分常数，即 C_1，C_2，……C_6。积分式（2.5）后，可得

$$x=C_1t+C_2,\qquad y=-\frac{gt^2}{2}+C_3t+C_4$$
$$z=C_5t+C_6 \tag{2.7}$$

式中 $g=W/m$，即自由落体的加速度。这些方程与微分方程（2.5）是等效的。如果我们取 $\frac{dx}{dt}$、$\frac{dy}{dt}$、$\frac{dz}{dt}$，并在所有的表达式中引入 $t=0$，给出相应于式（2.6）的初始值，最后再求解关于六个未知量 $C_1, C_2, \cdots\cdots C_6$ 的六个线性方程。这样，我们就可以得到方程（2.7）在特定情况下的解了。然而，求解

这类问题往往是很困难的。但是，在我们的这种情况下，这是个简单的问题，我们只给出其最后结果：

$$x=0, \quad y=-\frac{gt^2}{2}+h, \quad z=a \tag{2.8}$$

这些表达式及其对 t 的导数可给出质点在任一时刻的位置和速度，也给出与运动轨道有关的所有问题的数值解答。通常，物理学家的主要工作就是这样开始的，即给数学结果以物理解释。这里，由于篇幅所限，我们只限于论述问题的两个基本部分，不能讨论解的物理意义了。这两部分是：1）把物理问题化成数学形式［式（2.5）和（2.6）］；2）对数学方程求解［式（2.8）］。下面，我们再给出两个简单的实例，来说明这些步骤。

3. 抛射体的轨道

一个质点从高度为 h 处，以初速 v_0 沿与水平面成 α 角方向抛射出去，试问它将会怎样运动呢？

这一运动的微分方程与前面的式（2.5）是一样的。顺便说一句，大家注意到比值 W/m 对所有物体都是相同的数值，这个比值 g 就是“重力加速度”。现在我们仍选通过质点初始位置的竖直线为 y 轴，把抛射体初始速度的方向在水平面上的投影定为 x 轴。

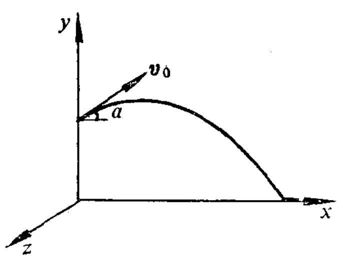

图1　抛射体的轨道

于是，质点的初始位置（即 $t=0$ 时的位置）为