简明数学全书

II

高等数学与现代数学

简明数学全书

(II. 高等数学与现代数学)

〔德〕 W. 盖勒特 H. 奎斯特纳 M. 海尔维希 H. 凯斯特纳 著

科学顾问

K. A. 郝奇 H. 理查德

译校者

秦曾复 张奠宙 张志才 陈光宇 鲍修德

邱森 王学铎 沈恩绍 董纯飞 陈信漪 华煜铣

上海科学技术出版社

MATHEMATICS AT A GLANCE

Editors: W. Gellert Dr. H. Küstner
Dr. M. Hellwich H. Kästner

Scientific advisors: Professor K. A. Hirsch
Professor H. Reichardt

VEB Bibliographisches Institut Leipzig

1975

简明数学全书

(II. 高等数学与现代数学)

〔德〕 W. 盖勒特 H. 奎斯特纳
M. 海尔维希 H. 凯斯特纳 著

科学顾问

K. A. 郝奇 H. 理查德

译校者

秦曾复 张奠宙 张志才 陈光宇 鲍修德
邱森 王学铎 沈恩绍 董纯飞 陈信漪 华煜铣

上海科学技术出版社出版
(上海瑞金二路450号)
新华书店上海发行所发行 上海商务印刷厂印刷
开本 787×1092 1/32 印张 22.125 字数 698,000
1985年9月第1版 1985年9月第1次印刷
印数: 1—12,600

统一书号: 13119·1165 定价: 3.60 元

出版说明

《简明数学全书》是一本通俗简要地介绍数学学科的实用读物，内容包括数学各分支的概念、原理、实际应用，以及对数学史的回顾和对现代数学的综述等；既可用作自学，又可用作复习。本书的文字叙述，强调了数学概念的互相联系，并且与公式、定理及例题密切而有机地相结合，因此条理清晰，容易理解；文中配有大量的插图，使数学题材更为生动而形象化；编排形式也有别于一般教科书，读起来有清新感。原书出版后，深受广大读者的欢迎。

为了满足我国读者的需要，我们决定组织翻译本书。但因原书篇幅较大，故分两部分出版，第一部分为基础数学，第二部分为高等数学与现代数学，各自独立成册。书中用 **I.** 或 **II.** 来表示本书的第一部分或第二部分。

原书名《数学小百科全书》，英译作《数学概观》，根据本书的内容，我们改用现名。在版式方面，我们采用不同字体和符号来体现原书的特点，以求醒目。如重要的定义和公式组加粗线框，例题用黑括号，定理在文字下加曲线；原文中的黑体、斜体和正体，现采用黑体、活体和宋体。

本书对具有中等文化程度的学生、教师以及对数学有兴趣的读者来说，是一本有价值的参考书。

在出版工作方面如有不足之处，热切希望广大读者批评指正。

序

在我们的时代，要掌握科学和技术而不借助数学工具，无疑是不可能的；科学和技术的运用范围又日益扩大，直至日常生活的许多领域。这就普遍要求对数学的成果能有全面的了解，并要求采用非常规的方法，以便有可能填补我们知识的空白。欲达此目的，光靠罗列定理或搜集公式看来是不行的，因为这样做的话，势必会过于强调由数学符号和字母构成的符号语言的作用，而忽视数学概念的作用，但恰恰是数学概念，才是真正起决定作用的东西。我们的任务是尽可能简明扼要而又精确地叙述数学的内在关系。鉴于数学材料的浩瀚，不消说，我们所做的并非是把数量繁多的各数学分支的教科书的细目编制起来而已。我们的目的是为尽可能多的读者阅读专业的文献铺平道路。本书的德文版已销售七十多万册，故可企望我们达到了这一艰难的目标。

本书广泛利用色彩来帮助读者阅读*，还有充足的例题以帮助读者理解一般的论述。通常将数值计算分开书写，这样可将问题当作注释阅读，不需参阅计算；而计算又可看作有解题细节的例子。有些例子中的物理单位使用国际单位制(SI 制)，因为国际单位制正越来越成为法定的实用单位。日常生活中的例子使用日常单位，既有公制，也有其他单位制。

本书将题材按系统分目，并给出许多简明的段落标题和数表，以使读者能迅速而可靠地掌握题意。

谨向各章作者，特别是应邀参与校正与常用术语不符的措词，以使全书通俗易懂而做出贡献的人致以谢意。在此简短的说明中特别需要指出，有很多条目，尽管作者是有关方面的专家，但也感到仅靠浅涉条目，很难做到令人满意。

我们应特别感谢我们的顾问——伦敦大学玛丽女王学院的 K. A. 郝奇(K. A. Hirsch)教授和柏林洪博尔特大学数学系 H. 理查德(H. Reichardt) 教授，他们孜孜不倦地为本书作了修改，帮助我们撰写了这样一部著作，使读者们能从中取用可靠的资料。这也将使我们大家相信，数学从其本质来说是一门简明易学的学科。

编者和出版者

* 现中译本改用不同字体和符号以示区别。——译者注

引　　言

技术上绚丽多彩的伟大成就深刻地影响着每个人的生活，使人们普遍认识到数学的重要性。人人都知道，或至少相信，没有数学，就不能产生这一系列的成就。因此，人们对数学的兴趣便不断增长，从而造成对这门科学的资料的需求日益增长。

现在，数学在很多方面，特别是在提出问题和解答问题方面，已经成了一门特殊的科学。尽管在医学、动物学、植物学、地理学和地质学方面，或是在语言学、历史学、天文学方面，一位博闻广见、精熟当代学识的学者，可以成功地向一个门外汉讲解他的研究的绝大部分问题及其成果，甚至还可以介绍他特别感兴趣的方法和基本原理，使人对这一领域的内容有一定的了解，但是在当代化学和物理方面，他想达到这一目的，就会感到困难得多，而在数学方面则几乎是不可能的。这不仅是因为数学成果在数量上有了极为可观的增长，而且也因为数学问题太难解、太深奥，即使是数学家，对数学的全局也只能有一个肤浅的认识而已。

为了不使数学分成许多*特别的分支*，人们便尽可能地从各个不同的领域中概括出共同的特性，尽管这些特性有时从表面上看来是互不相关的，以此创立新的更加抽象的理论。正是通过这种努力，人们在那些初看起来相去甚远的领域之间建立了新的纽带。这可以看成是一个反复抽象的过程：既然象代数和几何这些基本原理是来源于对日常生活经验的抽象，人们就可以对代数和几何作进一步的抽象，以得出一个统一的理论，而且在某些情况下，这种抽象的过程可以一环套一环地反复进行。这里“抽象”这个词要严格地理解为“去除”的意思，也就是去掉那些对有关问题的来龙去脉或对某特定目的来说是非本质的东西。例如，在研究几何图形时不去考虑其色彩，尽管色彩在装潢方面很有用处。

这一切说明，即使要使门外汉对当代数学的全貌有一孔之见也是不可能的。在这里，*门外汉*不只是指知识仅限于教学大纲所规定的内容的人，取得毕业文凭或获得理学士学位的数学家和数学教师也都可以看作是许多专门的数学分支的门外汉。要想通过三、四年的学习，掌握数学各

个分支的专业知识，简直是不可能的。因此，本书的局限性势在难免，我们并不奢望它能广涉数学各领域的专门知识。

在历史上数学最初是以非常朴素的方式发展起来的。它从数1，2，3，…和直观易见的几何图形如点、线段、直线、空间中的平面、角、三角形、圆等出发，逐步发展成具有数域和图形域的较为复杂的结构，这些数域和图形域的研究并不各自成一体系，而是通过测量这个概念来相互联系着的。正是在这种从直观简单明了的问题到较为复杂的问题的发展中，才产生了数学，这在巴比伦和埃及就可见一斑。巴比伦人和埃及人在天文方面取得了惊人的成就，比如，他们能预言月食。但是，将数学发展到一个崭新的阶段的却是希腊人，因为他们总觉得不能光是向前探索，更应回顾思索：在数学的研究方面，人们究竟干了些什么？其结果是，通过他们的努力，数学才发展成为具有现代观念的一门科学。一方面，他们已认识到，(数学)证明就是将数学命题通过最简单的合乎逻辑的推论，归纳为其他一些已知事实，即归纳为那些常为现实或经验证实、足以令人信服的东西。另一方面，他们也已意识到，这种归纳过程不可能无限进行下去，而只能局限于数或图形的某些最简单的性质，这些性质的可靠性又可由直观或经验来确定。

就这样，他们第一次有意识地收集了一系列的基本事实，如过两点只能引一条直线等，并将其编纂成集，他们还奠定了逻辑学的基础。这两方面的专著使几何学由简单到复杂地建立起来了。

长期以来，一本欧几里得(Euclidean)几何学除了作过几个小的增补之外，一直是这门学科的典范。但是约两千年以来，却没有人试图用同样方法来处理代数和稍晚的解析问题。希腊人对自然数的基本性质相当清楚，对可除性问题和有关质数的问题也感兴趣。他们知道如何处置普通分数，但却未曾试图引入负数的概念。但是，在研究直角等腰三角形时，他们却碰上了这么一个问题，即分数不足以表述所有量的比。他们发现，在这样的三角形中，直角边对斜边的比不能用分数来表示。可惜他们并未由此得出结论，即分数域必须扩大，以使该比值和其他所有可能出现的几何比都可以在数值上用更大的数域中的新数来表述。恰恰相反，他们使代数几何化。诚然，由此曾得出一个与我们的实数理论等价的理论，但是这种几何化的做法造成了极大的麻烦，使希腊数学走进了死胡同。

几个世纪以后，天文学家和航海家的实际工作迫切需要三角计算，而

这种计算只有借助某种三角函数表才能进行。由于观察值只能测量到有限的精度，故对需计算的量只要给出近似值即可，这就逐步导致有尽小数的发明。事实证明，有尽小数比普通分数更利于实际计算。很可能就产生了这种想法，即小数位数越取得多，结果便越精确，甚至认为任何预定精度均可通过充分多的小数位数来求得。归根结底，这个方法毕竟抓住了实数的本质，于是数学家们对无限多位的十进小数不再避而不谈。要是这个理论一直发展下去的话，本来是可以得出精确的实数理论的。

一个有趣的、具有十分重要意义的例子说明，早在阿基米德(Archimedes)设法计算平面上某些以曲线为边界的区域的面积时，上述想法就以大同小异的形式在他的研究工作中表现出来了。首先，阿基米德用其著名的*逼近法*成功地计算了以抛物线的某一段及其弦为边界的图形的面积。结果发现这类图形的面积有一个确定的比值：1/3，这个比值意义重大。但是，阿基米德却未能成功地为圆面积求出一个相应的简单结果，因为要解决这个问题，他就得算出 π 的值。现在我们知道，仅有分数知识，他是不可能算出的，他所能证明的只是，π 的值介于两个分数，即 $3\frac{1}{7}$ 和 $3\frac{10}{71}$ 之间。为了计算圆的面积，他反复利用了毕达哥拉斯(Pythagoras)定理，计算了圆的内切和外切正凸 96 边形的面积，得出了圆面积的近似值。显然，他当时已经意识到，只要将边数和顶点数取得充分大，就可以将 π 限制在越来越小的范围内，并能将它计算到任何指定的精确度。用分数可以将一个数的近似值计算到预定精确度，这正是实数的一个特性。

随着时间的流逝，实数的这一性质已在很多不同场合为人们所熟识。例如早在微积分计算创立之前，在对数表的编制中，在笛卡尔(Descarte)的解析几何中，用坐标表示平面或空间的点，人们就已经牢固地确定了对这一性质的认识。后来在微积分计算的发展中，这种认识又有了进一步的加深。微积分计算始于莱布尼茨 (Leibniz)和牛顿(Newton)，后来，似乎是为发现的欢乐所陶醉，伯努利(Bernoulli)、欧拉(Euler)、费尔马(Fermat)、柯西(Cauchy)、高斯(Gauss)和其他一些人又相继发展了它。现在再没有人认为对实数理论的建立还需作进一步深入细致的研究了。

但是，建立实数理论的问题也曾在数学的另外两个分支，即几何和代数中起过作用。如已经指出的，*欧几里得几何*是以一组非常简单的几何命题为出发点的，从这些简单的几何命题中可以推导出其他的定理。这

些称为公理的简单命题集中表现着当时的几何知识，从直观上看来极为显然，以致无人认为需加证明。唯有平行线公理(或公设)是一个例外。这个公理说：过一已知直线外的一已知点，有且仅有一条直线不与已知直线相交。是否能将它排除在公理之外，而用其他公理来加以推导呢？两千年来，数学家们为此绞尽脑汁，却一无所获，直到德国的高斯、俄国的罗巴契夫斯基(Lobachevskii)和匈牙利的波约(Bólyei)才成功地证明了平行线公理是独立于其他公理的。这一结果的重要意义只有在与其他方面的发展联系起来时才能看清。

在代数中，从二次方程根的公式可以得到表达式$\sqrt{-1}$。这个式子乍看起来毫无意义，但是，只要将它按一般的根式，如$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$或者$\sqrt{\pi}$一样进行计算，所得结果却都有意义。这就无可置辨地令人相信$\sqrt{-1}$这个式子的合法身份，并采用符号i来表示它。差不多过了三百年，高斯和其他一些人才证明，人们一直沿用着的做法可以用一个完全有意义的方式来解释，即将实数域扩大，这样一来，就产生了一个新数，其平方等于-1。

尽管高斯对实数非常熟悉，能够毫无顾忌不加证明地使用它们，但只是到了柯西和当时的其他数学家在阐明极限概念的过程中遇到了一些困难时，实数才成了认真考虑的对象。当时大家都认识到，实数理论实际上可以用不同方式通过对分数的归纳来建立，反之，分数又可以归纳为自然数。从而再次表明，在自然数领域中，自然数的所有性质都可以归纳为少数几条十分显然的基本事实，即皮亚诺(Peano)公理。

对自然数的这种归纳，为实数和复数理论提供了依据，也为整个实数和复数的解析理论，乃至几何学提供了依据；因为解析几何所阐明的是如何用坐标表示基本的几何对象，特别是点，而坐标都是实数。

本书还提及数学的另一个发展。这一发展系于一百五十年前才初步开始。众所周知，数的乘法和加法的某些法则在形式上非常相似。同样，在其他数学运算中，例如在连续进行几种运算时，也可以看到一些形式上非常简单的规律。但是，数学家们却非常缓慢地才跨出合乎逻辑的第二步，即概括出这些共同的基本性质，并从这些性质出发，通过纯粹的逻辑推导，使得这一领域逐步发展成了今天的群论。在这儿正象在欧几里得几何中一样，人们再次看到了随着后来的各种发展而出现的一个公理体系。

现代数学的一些大的分支，特别是代数，以及在越来越大的程度上分

析和几何，都是建立在公理体系上的。其建立过程大致如下：已知为一组数学对象（通常称为集）、该集的各个*元素*和用于描述这些数学对象的基本性质的一组公理，接着就提出下列工作：首先由这些公理推出尽可能多的推论，即尽量将这一数学结构的理论扩展到最大范围；然后将有关公理体系的所有处理方法进行全面考察。可能发生的情况基本上是：仅有*一种*可能的处理方法；或有数种乃至无限多种处理方法；也可能*不存在*任何处理方法。例如，当给定公理互相矛盾时就是这样。如存在数种处理模式，即对这些公理有若干种处理方法，则应寻求一些*特征*，以便利用这些特征，经过有限步的推导，有效地将各种可能性彼此分辨开来。对于某些数学结构，这些工作早已完成，但对另一些数学结构，则离解决之日尚相去甚远。这种情况也表明了公理学和数理逻辑彼此交织得有多么紧密！

本世纪初，在一个新的结构理论——集合论中产生了矛盾，这就更加迫切需要有一个有效的数理逻辑。*集合论*是最简单的*结构理论*，因为它涉及的是完全任意的集合，如点、数、运动、函数、图形，同样还可以是人、星球、椅子以及其他种种东西，这些集合的元素不受任何公理的约束。因为没有做出任何结构上的假设，所以如果两个这样的集具有相同数量的元素，就可以看成是等价的，或*等势*的。在有限集的情况下，这方面的含义是显而易见的。但是，甚至对无限集也确定了诸如所谓幂，即基性的元素的数目，那确是个了不起的成就。当然，当问题涉及有限集的元素数目时，我们所熟悉的某些性质对无限集便不复适用了，例如在等价性方面，自然数的个数和分数相等，但是分数的个数则少于实数的数量，线上的点的集合与面上的点的集合基性相同。所有这些，从数学的严密性来说是完全无可非议的，尽管它们显然缺乏直观性。但是*矛盾*出现在集的非限定形式，例如，“所有集的集”这一概念就是自相矛盾的。然而，这并非是*数学危机*，尽管有时是这么叫的。相反，数学家们借此机会更彻底地思考了在定义数学概念时涉及到的问题。于是，一门系统的数理逻辑便发展起来了。今天，人们已完全懂得如何去回避这些矛盾。

人们可能会认为，在形成这些极为一般化的结构理论和数理逻辑的公理系统的过程中，这种高度的抽象可能会越来越偏离实事求是的应用数学。但这是绝对不会的。莱布尼茨在解决一些基本的逻辑问题而直接进行了创造性的数学工作的同时，制造了一架中用（切实可行）的计算机，这绝不是偶然的。

工厂生产的人工或电动的计算机的诞生，并没有引起重大的原则纷争。但是这一情况随着电子计算机的产生发生了根本的变化，因为有了电子计算机，计算速度大大提高了。诚然，这些计算机是按简单的黑白原理工作的，即在机器的每一个部件中，不是通电就是断电。然而，它们却能对付非其不能对付的计算问题。它们以难以想象的速度进行大量最简单的运算，因而能在不太长的时间内处理完一个程序复杂而冗长的问题。当然，这种计算的所费时间还有赖于程序编制技术。电子计算机发明以前，人们已做过一些初步工作，并很快发现程序编制要遵循一定的规则，这些规则在数理逻辑，例如算法理论中也起着作用。这再次表明某些仅仅为了理论上的需要而发展起来的纯数学研究的实用价值。计算技术方面的这一情况为纯数学和应用数学在本质上密切相关提供了一个确实的典型例子。

本书还适当地强调了数学问题的理论可解性和实际可解性之间的区别。在数学中，讨论的常常不是个别的、有给定数值的问题，而是取决于某些数据的一般性问题，这些数据的数值有很多种，实际上有无限多种取法。举一个简单的例子吧：三角形的面积取决于它的三条边，虽然有一个适用于所有三角形的面积计算公式，但每条边的长度却有无限多个可能值。

如果能给出一个公式，即一种算法，用它来算出各个特例的解，那么这种问题就算解决了。这里我们假定可用这个公式或程序经过有限步的运算求得数值结果。如果能做到这一点，在单纯的数学家看来，这个问题就算解决了。然而，实际上问题仍可能得不到解决，因为尽管须进行的运算步骤是有限的，但从时间和经济上来考虑却可能因为所费太大而不可解。这就会导致新的更有意义的纯数学问题，即找出更有效的计算程序，除非人们满足于近似解，或制造出更高速的计算机。

电子计算机的发明是这一方面的巨大进步，其结果是首先在应用数学中产生了一些新的分支，一些前所未有的分支因为一开始问题就很明显，即它们所涉及的主要问题不可能在实际允许的时间内攻克或解决。“九人莫利斯舞”和弈棋问题是原则上可解问题的两个例子。说它们在原则上可解，是因为根据法则，它们只可能有有限多种玩法。而现在九人莫利斯舞在实际上也已是可解的了，因为在玩的时候可以先给第一个游戏者以严格的训练，使他懂得如何应付对手的各种可能的动作，以便能赢得

每一局。在下棋时，同样有个走白子者能否一直占先的问题。尽管这是个有限性的问题，但至今未获解决。而且，即使动用当今世界上所有的电子计算机一起来解这么一个弈棋问题，恐怕也得不出问题的解，这可能需要比现在的计算机运转得不知快多少倍的计算机才行。

以上粗略地谈了数学的发展，它从数、运算、图形和测量的最简单的基本概念发展到今天包括大量高度抽象结构的完全公理化的形式，发展到现代计算机，但其发展远未到顶。将数学的这一发展和本书的目录表作一比较就可以看出很多直接和间接的关系。

第一部分"**基础数学**"的题材，在很大程度上同从古代经中世纪直到建立微积分计算之前数学的发展相吻合。所不同者仅是算术、数论和几何并非同时列出，而是按顺序先后排列的。我们从自然数和**初等运算**法则开始，就是因为它们对一般人来说是显而易见的，随后便建立一整套的**公理学**系统，从自然数起直到引入复数为止。

即使对这些简单的概念，现行数学符号却是为从前的希腊人所未知的，正因为如此，就产生了极其烦琐、笨拙的用字母代替数字的方法。今天，学校里已理所当然地采用了这种符号。这儿，数学符号与数学基本概念极为吻合，但是由于它过于简单易学，有时竟会产生轻率而机械地搬弄字母的危险。对于这种潜在的影响必须坚决反对，特别是在学校里；必须坚持数学概念第一，运算技巧第二，而绝不能反其道而行之。关于这个问题，高斯在 1850 年 9 月 1 日给斯库马柯(Schumacher)的信中写道："现代数学的一个特征……就是在我们的符号和名词的语言中，有一个杠杆，通过这个杠杆可以将非常复杂的论证简化成某一个机理……尽管在大多数情况下，这样做的实质就是默认某些假设，然而机械地使用这个杠杆，却是多么的屡见不鲜。我认为，每当进行计算，每当运用概念时，我们都必须始终不忘初始条件，决不应把通过这种机理得出的结果，看成是超出明确规定范围的数学性质。"

有很多问题要求从已知量求得未知量。一般说来，采用字母能使我们简单明了地表达这类问题。常有这样的情况，有些问题初看起来完全不同，却能得出形式完全相同的最终方程或方程组。这再次表明数学解题方法和抽象之间的相似，所谓抽象者，即不计已知量和需解量的含义，仅保留其数学内核而已。

函数概念乃是现代数学的一个重要特征。这就是说，现代数学是研究

函数关系的数学，即研究一些量对另一些量的依赖关系。例如，三角形的面积或角对它的边长的依赖关系。在分析函数概念时，我们将会熟悉这类问题的另一些例子。

初等几何是研究平面或空间中的点、线段、角、直线、三角形、四边形、圆、四面体等问题的。由于需要对物体进行测量，所以在这里起主要作用的是前面讨论过的数的概念。当然，不应由此而忽视纯几何概念，特别是在解题时。人们试图用纯几何方法，即作图法来解几何问题。如何用平面作图法处理空间问题，这是**画法几何**的内容。几何和数值计算在**解析几何**中融合得最为紧密：凭借坐标概念，可以将几何问题化为数值问题。这样一来，几何就成了应用广泛的解析法的入门。

解析基本原理放在第二部分“**高等数学**”中加以讨论。虽然极限概念已在初等数学中以直观的方式作过使用，但高等数学却恰恰是从严格的**极限理论**开始的。这样极限一方面是**无穷数列**和函数理论的基础，另一方面又是函数的连续性概念和**微积分计算**的基础。连续函数和微积分的重要性不仅在于是整个数学结构的基础，而且在物理、技术等方面都有很重要的应用。很多几何物理问题本身都是以**微分方程**的形式出现的，也就是以一个函数和它的微商的关系式出现的。这个理论发展至今已有很大篇幅，这里只能粗略地谈及其中最简单的一些部分。**微分几何**也是一个引人入胜的数学分支，它是微积分计算在平面和空间曲线及空间曲面理论中的应用。

前面我们已经注意到，一个问题的理论解法常常与其直接应用的一些特例迥然不同，因为必要的数值计算往往过于累赘。**图示法**和**数值法**的任务就是将理论解变成直接可以应用的解。此外，**概率论**和**统计学**在实际应用中也起着很重要的作用。

最后一部分是“**现代数学简介**”。这一部分的目的是使读者对现代数学的若干研究领域有所了解。正如文首所述理由，不可能对各问题分别作较详尽的讨论，也不可能将现在仍处于萌芽阶段或仍处于深刻变革过程中的那些领域收编进本书之中。读者如欲更透彻地了解各数学分支，可以参阅专著，这对前两大部分同样适用。

汉斯·理查德

目　　录

第1章 集 合 论

集合论是现代数学大厦的基石。所有数学概念的精确定义都是建立在集合论基础上的，而且数学演绎方法就具有逻辑论证与集合论论证相结合的特征。简单地说，集合论语言是全世界数学家表达和领会的公共用语。由此可见，如果谁想在高等数学本身或者它的实际应用中取得任何进展，那末他就必须熟悉集合论的基本概念和结果，以及表达它们的语言。

下面引用的集合定义给出这样一个印象，朴素的集合概念由于它一目了然，所以是不难掌握的。实际上它导致巨大的困难，而这些困难只有通过发展集合论的公理系统才予以克服。

当 G. 康托尔(Georg Cantor, 1845～1918 年)发表他大胆的新概念与新论证而建立集合论的时候，集合论的重要性仅仅为少数几个数学家所赏识。然而在其进一步的发展中，集合论渗透到了几乎所有的数学分支，对这些数学分支的发展有着深远的影响，还改变那些已经确立的理论的面貌。确实，有些学科，诸如拓扑学的发展，必不可少地依赖于集合论的方法。更加重要地，集合论表明是一种统一的力量，它给所有数学分支以一个公共的基础，给它们的概念带来一种新的清晰和准确性。

以下各节，着重于集合论在各个数学分支的发展中有着特别重要应用的那些部分。

1.1 集合的概念

通常，“集合”这个词用来指称某种意义下具有共同属性或者同类事物的汇总。这后一方面难以准确表述，因而不纳入数学概念。

康托尔的集合定义：集合是我们的感觉或者思维所完全确定的某些对象汇总成一个整体的结果；这些对象称为该集合的元素。

尽管这个定义缺乏准确性——它实际上导致矛盾（见例5）——但它足以引进几个重要的定义和概念。

如果对象 a 是集合 S 的元素，就写为 $a\in S$（读作“a 属于 S”或“S 包含 a”）；如果 a 不是集合 S 的元素，就写为 $a\notin S$。如果 S 是元素 $a, b, c, \cdots$ 的集合，就写为 $S=\{a, b, c, \cdots\}$。例如，$\{1, 2, \cdots\}$ 是自然数集。如果 S 只包含一个元素 a，那末 S 就叫做*独集*，$S=\{a\}$。如果 S 包含两个不同的元素 a 与 b，那末 S 就称为*非有序对*，$S=\{a, b\}$。

集合 S 的*子集* T 是指其元素全都属于 S 的任意一个集合；标记为 $T\subseteq S$。不同于 S 自身的 S 的子集 T 叫做 S 的*真子集*；在这种情况下就写为 $T\subset S$。*空集*是一个根本没有元素的集合。正如数 0（历史上后期的一项发明）使得算术的命题和演算完美那样，引进空集业已表明便于集合论的命题和论证得以完美。空集通常的符号是 $\emptyset$。

其元素本身就是集合的这种集合称为*族*或*系统*，例如，民族是人的集合，而它又是民族“族”的一个元素。一个十分重要的系统就是给定集合 S 的所有子集的集合；它称为 S 的*幂集*并记为 $P(S)$。

【例1】　某一时刻 t 在某座大楼 B 内所有人的集合 S。即使在选定的时刻这座大楼内没有人，这个集合也是完全确定的；在那种情况下 S 是空集。时刻 t 在 B 内所有女人的集合 W 是 S 的一个子集，$W\subseteq S$；W 不一定是 S 的真子集。

【例2】　所有素数的集合。欧几里得早已证明这个集合是无限的，而例1的那种集合总是有限的。

【例3】　在计算 π 时使用的单位圆所有内接正多边形的集合。

【例4】　自然数的所有子集的集合。这也是无限的，事实上后面将要证明，它比自然数本身“更加”无限。

【例5】　不包含自身作为元素的所有集合的集合。这个集合在康托尔定义下是完全允许的，它导致著名的罗素（Bertrand Russell, 1872～

1970年)悖论。如果这个集合记为 R 而且假定 R 是其本身的一个元素($R\in R$)，那末 R——同 R 的其他元素一样——是一个不包含它自身为元素的集合($R\notin R$)；也就是说，该假定导致矛盾。另一方面，如果 R 不是自身的一个元素($R\notin R$)，那末由于 R 包含每一个不包含自身的集合，R 不能是这些集合中的某一个。因此 R 包含它自身($R\in R$)，这又是一个矛盾。因为这两个假定之中必定有一个为真，所以整个情形处于与逻辑定律相矛盾的境地。

例5表明，如果要回避矛盾，那末构造新的集合就不准无限制地扩充。

这些例子搞清楚了集合是怎样构造的。集合是由属性的摹状所确定的。说得稍为精确一点，集合是由所有这样的对象 ξ 组成的，带有对象变元 x 的命题 $A(x)$ 当用这些 ξ 代入时为真。

例1到例4中的命题依次是：

x 是时刻 t 在大楼 B 内的人，

x 是素数，

x 是单位圆的内接正多边形，

x 是自然数集合的子集。

如果 x 由任意一个对象来代替，则所得的命题或为真或为假。集合论的公理系统中十分重要的就在于确切地描述一个命题句，为了使它能用来定义一个集合所必须具有的逻辑形式。

> 由命题 $H(x)$ 定义的集合记为 $\{x\,|\,H(x)\}$(读作："使得 $H(x)$ 为真的所有 x 的集合")。

【例6】 $\{x\,|\,x$ 是自然数并且存在一个自然数 y，使 $x=y^2\}$ 是所有平方数的集合。这个记号可以缩写为：$\{x\in\mathbf{N}\,|\,x=y^2$，就某个 $y\in\mathbf{N}\}$。

本世纪前半叶发展起来的集合论公理系统一般都具有四个基本原则：外延性原则、集合构造原则、无限集合的存在性和选择公理。

外延性原则是说，两个具有相同元素(即具有相同外延)的集合 S 和 T 是恒等的($S=T$)。这里恒等这个词是在莱布尼茨(Leibniz)意义下采用的，就是说，在任何一个命题中 S 可以由 T 来代替，反之亦然，而不会改变该命题的真假。