动态规划导论

〔美〕 伦·库柏　玛丽·W·库柏　著

张有为　译　高为炳　校

国防工业出版社

动态规划导论

〔美〕 伦·库柏
玛丽·W.库柏 著
张有为 译
高为炳 校

国防工业出版社

内容简介

本书是现代应用数学与计算机科学国际丛书的第一卷，它清晰地介绍了动态规划理论，并给出了涉及面很广的应用实例。动态规划是解决优化问题的重要途径之一，近年来尤为研究系统优化的科学工作者和企事业管理干部所注目。

本书的主要内容包括有：引论、简单的例子、泛函方程——基本理论、一维动态规划——解析解、一维动态规划——计算解、多维问题、状态维数降低与近似法、随机过程与动态规划、动态规划与变分法、动态规划应用、附录及参考资料。

本书可做为数学、统计学、运筹学、经济学、管理科学、工业工程及其它领域大学生和一年级研究生使用的教科书，同时也适合作为有关科学技术工作者和企事业管理干部的自学读物。

Introduction to Dynamic Programming
LEON COOPER and
MARY W. COOPER
PERGAMON PRESS 1981

*

动态规划导论

〔美〕 伦·库柏 玛丽·W.库柏 著

张有为 译

高为炳 校

*

国防工业出版社出版

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

$850\times1168^{1}/_{32}$ 印张$11^{5}/_{8}$ 305千字

1985年7月第一版 1985年7月第一次印刷 印数：0,001—7,430册

统一书号：15034·2793 定价：2.40元

译　序

动态规划是由 R. E. 贝尔曼所建立的，1957 年贝尔曼在美国普林斯顿大学发表了第一本正式的著作。随后贝尔曼及其它科学工作者发表了一系列动态规划应用的著作，包括动态规划在最佳控制理论、资源理论、工业工程、经济学、管理科学、变分法和马尔可夫过程中的应用。近年来也引起了研究系统分解、优化与控制的科技工作者的重视。

《动态规划导论》一书是作为现代应用数学与计算机科学国际丛书的第一卷而出版的。作者通过具体的实例，以通俗的语言，向读者比较全面地介绍了动态规划的基本理论、基本方法和应用问题，非常适合于自学。所举的例子都是人们易于理解的，因此在理解动态规划的同时，无须具备许多各方面的深奥的专业知识。译者认为，这样做的好处是使读者把注意力集中于动态规划本身，而无须分散精力。这样做的不足之处是会使一些读者感到，从动态规划的理论到自己所关心的专业领域的应用，还存在有一段距离。

在译书的过程中，译者对已发现的印刷错误均做了订正，对举例中不十分恰当的名词依我国的习惯做了少量的修改。北京航空学院研究生院副院长高为炳教授担任了译书的审校工作，他对译者的热情支持与审校中的严肃认真精神，对译者有极大的帮助，在此谨表谢忱。

由于译者水平所限，译书过程中难免有错误与不当之处，欢迎批评指正。

译　者

一九八三年一月于北京

原　序

本书的目的是清晰地介绍动态规划导论，并使其自成体系。我们将尽力把握住这样一种目标，使本书成为介乎于基本数学概念及结论与这些概念应用于各种问题方面的中间领域。为此，这里引用了大量的解决实际问题的例子，以及计算实例，用来阐明动态规划用于解决问题的方式。

无疑，本书仅是一个导论，并不声称它包罗了整个学科。若追求完整性，则本书的篇幅将会大大增加。但是，我们期望本书将提供对本学科基本概念的充分理解及有关技术的适用知识，同时也为进一步学习这里没有论及的本学科的其它课题，提供一个适度的起点。

状态变量、决策变量等通篇大量应用的符号，使用了惯用标记。在一个领域里用一致的惯用符号，对读者将是有益的。在6.9节中介绍了一种新的多维问题应用，在7.7节中介绍了一种降低状态维数的新方法。

本书适用于自学，或用作数学、统计学、运筹学、经济学、管理科学、工业工程或其它工程领域中，高年级大学生或一年级研究生一学期的动态规划课程的教科书。

学习过动态规划课程，并使用过本书原始讲稿的学生们，曾提出过许多意见，在此仅致谢意。

伦·库柏
玛丽·W.库柏
于南美以美会大学
美国　达拉斯

目 录

第一章 引 论

1.1 最 佳 化

动态规划是解决最佳化问题的一种特殊途径。所谓最佳化，通常指的就是从备选方案集合中，找出某问题的最好的解。本书将研究可以定量地公式化的问题。因此我们将处理现实世界中存在的一些事态或现象的数学模型。所谓数学模型，指的是从十分丰富的背景中所抽象或孤立出来的，并用数学语言加以描述的某些特征。若有一种有效的孤立，被忽略的特征的影响都是微不足道的，那么我们就能期望，数学模型的解，将为我们提供被考察现象的一种深入理解与合理精确的描述。就上述意义来说，产生一个适当模型，在较大的程度上是一种艺术，而不是一种严格的科学问题。显然，它是一种广泛的实用艺术，并且越来越获得成功。有力的计算工具的发展，例如数字计算机，对日益复杂和细致的数学模型的开发，产生了巨大的影响。

现在让我们来考察任一数学最佳化模型的组成，它们是：

1. **变量**（或为决策变量，或为策略变量，或为独立变量。）通过对这些量或因素的处理，我们就可以获得某些希望的结果或目标。最常用的变量将表示为 x_1，$x_2, \cdots, x_n$，或表示为变量的矢量 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$。我们通常称 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为 n 维欧几里得空间中的一个点（参看附录）。

2. **目标函数**（或为收益函数，或为利润函数。）它作为有关变量的特定组合，成为效率、价值或效用的某种量度。在许多场合，它是变量的单值函数，即，$z=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$。这是将被最佳化（极大或极小）的函数。在大多数情况下，函数 $z=f(\boldsymbol{x})$ 是已知的。但是，在一些最佳化问题中，情况并非如

此。在这些问题中，函数本身是未知的，并且是最佳化问题的解。就这些问题而论，常常用变分法来研究（在动态规划中亦有其它方法)。作为这类问题的一个例子，我们可以使某积分 I 极小，其中

$$I=\int_a^b F(x, y, y')dx \tag{1.1.1}$$

在式（1.1.1）中，$y=f(x)$ 是极小化 I 的特定函数（即待求的)，$F(x, y, y')$ 是 x、y 的某已知函数，并且 $y'\equiv dy/dx$。因此这里有两类截然不同的目标函数。在第一类中，为了极大或极小化 $f(\boldsymbol{x})$，我们求 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的值。在第二类中，为了极大或极小化一个**泛函**

$$I=\int_a^b F(x, y, y')dx$$

我们求未知函数 $y=f(x)$。比这种类型更复杂的例子将在后边详述。

3. 约束（或为可行性条件。）约束是除了保证目标函数取极大或极小值外，还必须满足的代数等式、不等式或在某些情况中的微分方程。通常约束可表示为

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{h}_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)&\leqslant 0\\ \boldsymbol{h}_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)&= 0\\ \boldsymbol{h}_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)&\geqslant 0 \end{aligned}\right\}(i=1, 2, \cdots, m) \tag{1.1.2}$$

其中，对于一个给定的 i，只能为三个可能的约束之一。在某些场合，特别是变分问题，可能出现微分方程约束。例如，我们希望极小化

$$I(y)=\int_a^b F(x, y, y')dx$$

约束为

$$\frac{dy}{dx}=h(x, y) \tag{1.1.3}$$

$$y(a)=C$$

总的来说，一般变量最佳化问题是：

极大化●

$$y=f(x)$$

约束为

$$h_i(\boldsymbol{x})\{\leqslant,=,\geqslant\}\ 0\quad(i=1,\ 2,\cdots,\ m)\qquad(1.1.4)$$

这里我们将不考虑一般的变分问题。动态规划应用于变分问题的详细论述，将在第九章中介绍。

1.2 可分函数

表示出现于目标函数或数学最佳化（通常称为**数学规划**）问题的约束中的函数特征，常使用的一种重要准则是函数是否可分。可分函数是由一个单变量的函数的和所组成的函数，即

$$f(\boldsymbol{x})=f_1(x_1)+f_2(x_2)+\cdots+f_n(x_n)\qquad(1.2.1)$$

"可分性"的其它形式将在后续几章中详述。式（1.2.1）中给出的型是在动态规划问题中最常出现的。

初看起来，似乎式（1.2.1）所示的型过分地限制了许多重要函数，因为它们不是可分的。例如函数

$$f(x_1,\ x_2)=3x_1x_2+2x_1\sin x_2$$

显然不是可分型。然而，不难看出，多数函数（但不是全部的）可用增加辅助变量和附加约束的方法转换成可分型。参考资料〔2〕中指出了任意"可因子化"函数（下边再定义）转换为可分的方法，它由两个基本步骤组成，重复执行这两个步骤，直到得到可分函数为止。这两个步骤是：

（1）用 $y_1^2-y_2^2$ 置换型中任意乘项

$$h_1(x_1)h_2(x_2)$$

并附加约束

$$h_1(x_1)=y_1-y_2,\qquad h_2(x_2)=y_1+y_2$$

● 显而易见，$\min[f(\boldsymbol{x})]=-\max[-f(\boldsymbol{x})]$。因此，我们可以仅限于研究或者是极大化，或者是极小化问题。

（2）以$H(y)$置换型中任意项

$$H\ (h(x))$$

并附加约束

$$h(x)=y$$

能重复用上述步骤分离的非线性函数类，组成了**可因子化函数**。**可因子化函数**是一个n变量函数，它可以按以下步骤产生：先组合（加或乘）一些单变量函数，对这些函数进行变换，再进行组合，……，共有限次。

举一如何运用这一步骤的例子，设我们希望得出下述问题的可分型：

$$\max_{(x_1,\ x_2)}\ x_1 e^{(x_1+x_2)^2} \tag{1.2.2}$$

应用步骤（1）得到

$$\max_{(x_1,x_2,y_1,y_2)}\ y_1^2-y_2^2$$

约束为

$$\begin{aligned} y_1-y_2&=x_1 \\ y_1+y_2&=e^{(x_1+x_2)^2} \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

式（1.2.3）中的第二个约束仍不是可分型，再应用步骤（2）得到

$$\max_{(x_1,x_2,y_1,y_2,y_3)}\ y_1^2-y_2^2$$

约束为

$$\begin{aligned} y_1-y_2&=x_1 \\ y_1+y_2&=e^{y_3} \\ (x_1+x_2)^2&=y_3 \end{aligned} \tag{1.2.4}$$

式（1.2.4）中最后一个约束仍是不可分的，再应用步骤（2）得到

$$\max_{(x_1,x_2,y_1,y_2,y_3,y_4)}\ y_1^2-y_2^2$$

约束为

$$
\begin{aligned}
y_1 - y_2 &= x_1 \\
y_1 + y_2 &= e^{y_3} \\
y_4^2 &= y_3 \\
x_1 + x_2 &= y_4
\end{aligned}
\tag{1.2.5}
$$

式 (1.2.5)现在是完全可分型的数学规划问题，并且与式(1.2.2)完全等价。

1.3 凸函数与凹函数

对于某些函数的极小值和极大值的存在性，有一个重要性质，这就是函数的**凸性**和与其相反为**凹性**。我们在图 1.3.1(a)中绘出了一个单变量凸函数。如图 1.3.1 (a)所示，可直观地看出，若在它的图形上的任意两点间的一个线段，完全地落在图形上或其上方，则此单变量函数是**凸的**。同理，若在它的图形上的任意两点间的一个线段，完全地落在图形上或其下方，则此函数是**凹的**，这样的函数如图 1.3.1 (b) 所示。若此线段完全落在图形的上方（下方），则函数称为**严格凸的**（**严格凹的**）。

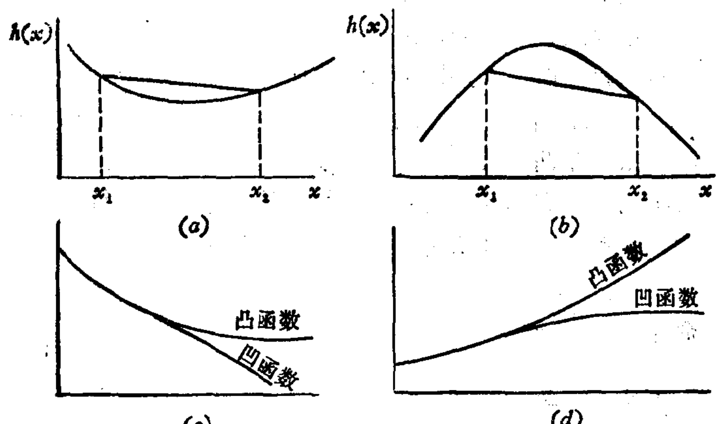

图1.3.1 单变量凸函数和凹函数

若对 x 区间中的任意两个点 x_1、x_2 和所有 λ， $0\leqslant\lambda\leqslant 1$，

满足

$$f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]\leqslant\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2) \quad (1.3.1)$$

则称单变量 x 的函数 $f(x)$ 为 x 某区间上的凸函数。同理，若对 x 区间中的任意两个点 x_1、x_2 和所有 λ，$0\leqslant\lambda\leqslant 1$，满足

$$f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]\geqslant\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2) \quad (1.3.2)$$

则称函数 $f(x)$ 为 x 某区间上的凹函数。若 $f(x)$ 是凸的，则 $-f(x)$ 是凹的，依上述定义这是很清楚的，反之亦然。可以看出，式（1.3.1）和式（1.3.2）相应的定义是通过函数的图形给出的。

可将上述凸性和凹性定义推广到多变量函数情况。若对 X 中的任意两个点 $\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{x}_2$ 和所有 λ，$0\leqslant\lambda\leqslant 1$，满足

$$f[\lambda \boldsymbol{x}_1+(1-\lambda)\boldsymbol{x}_2]\leqslant\lambda f(\boldsymbol{x}_1)+(1-\lambda)f(\boldsymbol{x}_2) \quad (1.3.3)$$

则函数 $f(x)$ 是在 E^n 中某凸集● X 上的**凸函数**。同理，若对 X 中的任意两个点 $\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{x}_2$ 和所有 λ，$0\leqslant\lambda\leqslant 1$，满足

$$f[\lambda \boldsymbol{x}_1+(1-\lambda)\boldsymbol{x}_2]\geqslant\lambda f(\boldsymbol{x}_1)+(1-\lambda)f(\boldsymbol{x}_2) \quad (1.3.4)$$

则函数 $f(x)$ 是在 E^n 中某凸集 X 上的**凹函数**。

对于一个单变量函数来说，若在其曲线上连接任意两个点的线段完全地落在其上或曲线上方，则称此函数为凸函数。类似的解释可应用到式（1.3.3）。函数 $z=f(\boldsymbol{x})$ 是一个在（$n+1$）维空间中的超曲面。若连接这个超曲面上的任意两个点（$\boldsymbol{x}_1$，z_1）和（$\boldsymbol{x}_2$，z_2）的线段，完全地落在其上或在超曲面之上方，则函数 $z=f(\boldsymbol{x})$ 是凸函数。

有关凸函数和凹函数的一些性质如下，这些在后续几章中将涉及到。这些断言的证明可在库柏和斯坦贝尔格的文章[1]中找到。

命题1.3.1 若函数 $h_k(\boldsymbol{x})$，$k=1,2,\cdots,s$，是在 E^n 中某凸集 X 上的凸函数，则函数 $h(\boldsymbol{x})=\sum_{k=1}^{s}h_k(\boldsymbol{x})$ 亦为一 X 上的凸函数。

● 参看附录。

命题 1.3.1 断言，凸函数的和亦是某凸集上的凸函数。对单变量函数，这自然是正确的。凸集是 x 轴（或其上的某个区间），例如，图 1.3.2 表示出了 $0 \leqslant x \leqslant 4$ 上两凸函数 $h_1(x)=x^2$ 和 $h_2(x)=2x$ 之和。

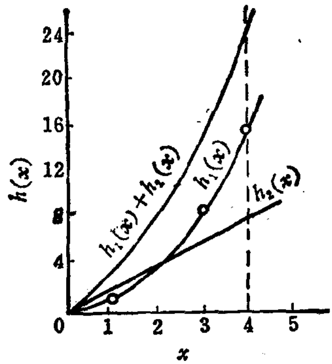

图1.3.2 凸函数之和

正像凸函数的和仍为一凸函数一样，在凸集上凹函数之和仍为凹函数，也是正确的。于是，引出以下命题。

命题1.3.2 若函数 $h_k(x)$，$k=1,2,\cdots,s$，是在 E^n 中某凸集 X 上的凹函数，则函数 $h(x)=\sum_{k=1}^{s} h_k(x)$● 亦是一个凹函数。

一个重要的结果如下：

命题1.3.3 若 $h(x)$● 是在 E^n 中的非负象限上的凸函数，则若 $W=\{x|h(x)\leqslant b,\ x\geqslant 0\}$ 不为零，W 是凸集。

命题 1.3.3 的一个简单例子示于图 1.3.3。我们选择 $h(x)=$

● 原文误为 $\sum_{k=1}^{s} h_x(x)$。——译者

● 原文误为 $h(x)$。——译者

$2x_1^2+3x_2^2$。易于检验这是一个凸函数。如果我们考查集合 $W=\{x|h(x)\leqslant 12,\ x\geqslant 0\}$，可看出其为一个凸集。

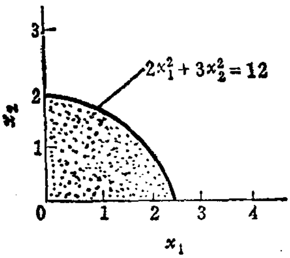

图1.3.3 $h(x)\leqslant 12$●

以类似地方式，可证明下述命题：

命题1.3.4 若 $h(x)$● 是在 E^n 中的非负象限上的凹函数，则若 $W=\{x|h(x)\leqslant b,\ x\geqslant 0\}$ 不为零，W 是凸集。

1.4 凸函数与凹函数的最佳值

一般来说，若我们寻找某任意函数 $z=f(x)$ 的极大值或极小值，并且对这个函数没有具体的说明，则我们只能希望用任何现有方法，去寻求局部极大值或极小值。即使我们知道函数在所给的区间上是连续可微的，也只能如此。然而，对于要求其在某凸域上的极大或极小的函数，若它或者是凸的，或者是凹的，那末还有相当多的信息可以利用。此外，计算过程的大量简化通常是能做到的。为此目的，我们将陈述两个重要结果。这些命题的证明可在参考资料〔1〕中找到。

命题1.4.1 令 $h(x)$ 为一 E^n 中闭凸集 X 上的凸函数。则在 X 中 $h(x)$ 的任何局部极小，亦是 X 中 $h(x)$ 的全局极小。

命题 1.4.1 非常重要。它给我们提供了一个条件，使得我们不必担心许多局部极大值或极小值的存在。说明这个结论的例子示于图 1.4.1。函数 $z=(x_1-3)^2+(x_2-3)^2$ 为一凸函数。约

● 原文误为 $h(x)\leqslant 12$。——译者

● 原文误为 $h(x)$。——译者