统计无线电理论基础

杭州电子工业学院

王同煦　编

国　防　工　业　出　版　社

统计无线电理论基础

杭州电子工业学院

王同煦 编

国防工业出版社

统计无线电理论基础

杭州电子工业学院

国防工业出版社出版

北京市书刊出版业营业许可证出字第 074 号

解放军第七二二六工厂印刷　内部发行

*

$787 \times 1092^{1}/_{16}$　印张 27　641 千字

1981 年 8 月第一版　1981 年 8 月第一次印刷　印数 1-3,000 册

统一书号：N15034(四教 78)　定价 2.[illegible]5 元

内 容 简 介

本书内容包括：随机过程，随机过程通过线性系统，线性过滤与予测，信号检测和信号参量估计等。

本书是高等学校电子对抗专业的选修教材和研究生教材，也可作为相近专业的参考书。

前　言

本书是按照1978年电子对抗专业教材会议上确定的编写大纲编写的，可作为电子对抗专业研究生及该专业本科学生选修课程的试用教材，也可作为相近专业的参考书。

本书共分五章。第一章作为本书的基础，除了平稳随机过程外，着重讨论了马尔可夫过程和脉冲随机过程。第二章介绍了随机过程通过线性系统的一般情况，着重讨论了随机过程的谐波分析和窄带过程。第三章重点讨论了均方估计和正交原理，过滤和予测。第四章和第五章是本书的重点。第四章讨论了各种检测准则，信号的二择一检测，信号的多择一检测，和序贯检测。已知信号的检测和随机信号的检测。第五章讨论了信号参量估计的一般方法。已知信号参量的估计等问题。

本书由杭州电子工业学院王同煦编写。

本书由主审单位国防科技大学汪漱玉，许树生同志主审。参加审搞的还有西北电讯工程学院梁百川、章启乘同志，空军第二高级炮兵学院王春安同志，海军高级电子工程专科学校余常旺同志，1029所刘志杰同志。他们提出了很多宝贵意见，主审单位的同志对我帮助尤大，对此，我表示衷心感谢。

由于水平有限，书中一定存在着不少缺点和错误，希望读者批评和指正。

编　者

1980.12

目　　录

第一章 随机过程

第一节 概率论基础

自然界和社会上发生的种种现象，可以分为两类，有一类是在一定条件下必然发生的，我们把它叫做确定性现象；而另一类称为随机现象。研究随机现象规律性的数学学科就是概率论与数理统计。概率论与数理统计的基础知识已在工程数学中讲过，深入的内容可以在有关概率论及数理统计的专门著作中找到。下面所讨论的内容，主要是为了本教材以下的章节学习方便而编写的。

§1.1.1 事件与概率

在一定条件下可能发生也可能不发生的事件，称为随机事件，简称事件。在概率论中用 $P\{A\}$表示事件 A 发生的可能性大小的度量；而且 $P\{A\}$满足不等式

$$0\leqslant P\{A\}\leqslant 1 \qquad 1.1.1$$

并把 $P\{A\}$称为事件 A 的概率。

1. 概率的几个定义如下：

定义 Ⅰ

如果随机试验只有 n 个等可能的结果（即有 n 个基本事件），如果事件 A 能由 n_A 个基本事件组成，则事件A 的概率定义为

$$P\{A\}=\frac{n_A}{n}=\frac{\text{事件}A\text{中所包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}. \qquad 1.1.2$$

这种概率的定义，称为概率的古典定义。

定义 Ⅱ

随机事件A在 n 次试验中出现的相对频率 $f_n(A)$当 n 增大而趋于稳定时，定义为事件 A 的概率，亦即

$$P\{A\}=\lim_{n\to\infty}f_n(A)=\lim_{n\to\infty}\frac{n_A}{n} \qquad 1.1.3$$

称为概率的相对频率定义，其中 n_A 为事件A 的出现次数。

定义 Ⅲ

假定 S 是样本空间，对于 S 中的每一事件（S 中的子集），定义一函数 $P\{A\}$，它满足下列条件：

（1）对每一事件 A 有 $P\{A\}\geqslant 0$，

（2）$P\{S\}=1$， 1.1.4

（3）对于两两互不相容的事件 $A_k(k=1,2,\cdots)$有

$$P\{A_1 U A_2 U\cdots U A_n\}=P\{A_1\}+P\{A_2\}+\cdots+P\{A_n\}$$

定义为事件A 的概率，称为概率的公理化定义。

2. 条件概率与独立事件

定义：

设 A、B 为两随机事件，且 $P\{A\}>0$，则称

$$P\{B|A\}=\frac{P\{AB\}}{P\{A\}} \tag{1.1.5}$$

为事件 A 发生的条件下，事件 B 发生的条件概率。很明显，如果事件 A、B 是互不相容的，则 $P\{B|A\}=0$。如果 $B\subset A$，则 $BA=B$。所以

$$P\{B|A\}=\frac{P\{B\}}{P\{A\}}\geqslant P\{B\} \tag{1.1.6}$$

而如果 $A\subset B$，则

$$P\{B|A\}=\frac{P\{A\}}{P\{A\}}=1 \tag{1.1.7}$$

定义：

设 A、B 是两事件，如果满足等式

$$P\{AB\}=P\{A\}P\{B\} \tag{1.1.8}$$

则称 A、B 为相互独立事件。而如果事件 A，B 是相互独立事件，则必有

$$P\{B|A\}=P\{B\},\qquad P\{A|B\}=P\{A\} \tag{1.1.9}$$

下面我们把独立性的概念推广到三个事件的情况。

定义：

设 A、B、C 是三事件，如果满足等式

$$\left.\begin{aligned}P\{AB\}&=P\{A\}P\{B\}\\P\{BC\}&=P\{B\}P\{C\}\\P\{CA\}&=P\{C\}P\{A\}\end{aligned}\right\} \tag{1.1.10}$$

$$P\{ABC\}=P\{A\}P\{B\}P\{C\} \tag{1.1.11}$$

则称 A、B、C 为相互独立事件。

一般地，设 A_1、A_2、…、A_n 是 n 个事件，如果对于任意 $k(1<k\leqslant n)$，任意 $1\leqslant i_1<i_2<i_3<\cdots<i_k\leqslant n$ 满足等式

$$P\{A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}\}=P\{A_{i_1}\}P\{A_{i_2}\}\cdots P\{A_{i_k}\} \tag{1.1.12}$$

则称 A_1、A_2、…、A_n 是相互独立的。满足事件相互独立的如上式的方程式的个数等于

$$C_2^n+C_3^n+\cdots+C_n^n=(1+1)^n-C_1^n-C_0^n=2^n-n-1$$

如果事件 A、B、C 仅满足方程式 1.1.10，而不满足方程式 1.1.11，则称三事件是两两相互独立，而不是彼此独立的。

§1.1.2 分布函数

定义：

设 $S=\{e\}$ 是样本空间，如果对于每一个 $e\in S$ 有一个实数 $\xi(e)$ 和它对应，这样就得到定义在 S 上的实值单值函数 $\xi(e)$，称 $\xi(e)$ 为随机变量。

1. 一维随机变量的分布函数

随机变量的统计特性用分布函数和密度函数表示。我们用 $\xi\leqslant x$ 的概率作为 x 的函数来定义分布函数，即

$$F(x)=P\{\xi\leqslant x\} \tag{1.1.13}$$

根据随机变量分布函数的定义，可以列出随机变量分布函数的性质：

(1) $F(-\infty)=0$ 1.1.14

(2) $F(+\infty)=1$ 1.1.15

(3) 分布函数是 x 的单调非降函数，

$$F(x_1)\leqslant F(x_2) \qquad 对 x_1\leqslant x_2 \tag{1.1.16}$$

(4) 右连续

$$F(x^+)=F(x) \tag{1.1.17}$$

(5) 如果 $x_1<x_2$，则

$$P\{x_1<\xi(e)\leqslant x_2\}=F(x_2)-F(x_1) \tag{1.1.18}$$

(6) 如果 $F(x)$对 $x=x_1$ 不连续，则在这一点的阶跃就等于

$$P\{\xi(e)=x_1\}. \tag{1.1.19}$$

2. 两个随机变量的联合分布函数

定义：

随机变量 ξ 和 η 的联合分布函数定义为

$$F_{\xi\eta}(x,y)=P\{\xi\leqslant x,\eta\leqslant y\} \tag{1.1.20}$$

其性质为：

(1) $F_{\xi\eta}(\infty,\infty)=1$ 1.1.21

(2) $F_{\xi\eta}(-\infty,y)=0,\quad F_{\xi\eta}(x,-\infty)=0$ 1.1.22

(3) $P\{x_1<\xi\leqslant x_2,\quad y_1<\eta\leqslant y_2\}$

$=F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)$ 1.1.23

$\geqslant 0$

(4) 每一个随机变量的分布函数叫做边缘分布函数，简称边缘分布，即

$$F_{\xi\eta}(x,\infty)=F_\xi(x) \tag{1.1.24a}$$

$$F_{\xi\eta}(\infty,y)=F_\eta(y) \tag{1.1.24b}$$

(5) 两个随机变量的联合分布函数为非负降函数，且满足性质(3)。

3. 分布密度

分布函数 $F(x)$的导式

$$f(x)=\frac{dF(x)}{dx} \tag{1.1.25}$$

叫做随机变量 $\xi(e)$的分布密度。由于 $F(x)$对每一x值，可能不存在导式，因而就有离散随机变量，连续随机变量以及混合随机变量之分。

(1) 连续随机变量的分布密度 $dF(x)/dx$ 存在，它有如下的性质：

① $f(x)\geqslant 0$ 1.1.26

② $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$ 1.1.27

③ $P\{x_1<\xi\leqslant x_2\}=F(x_2)-F(x_1)=\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$ 1.1.28

④ $F(+\infty)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$ 1.1.29

⑤ 如果 Δx 是足够的小，则

$$P\{x\leqslant\xi\leqslant x+\Delta x\}\cong f(x)\Delta x \qquad 1.1.30$$

这样分布密度也可以用下式定义：

$$f(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P\{x\leqslant\xi\leqslant x+\Delta x\}}{\Delta x} \qquad 1.1.31$$

⑥ $P\{\xi=x\}=0$ 1.1.32

(2) 离散随机变量和混合随机变量的分布密度。

假定随机变量 ξ 的分布函数 $F(x)$ 是由在点 x_i 所构成的阶梯型，就称随机变量 ξ 是离散随机变量。用 p_i 表示在点 x_i 的分布函数 $F(x)$ 的阶跃，则有

$$P\{\xi=x_i\}=p_i=F(x_i)-F(x_i^-). \qquad 1.1.33$$

而分布函数则为

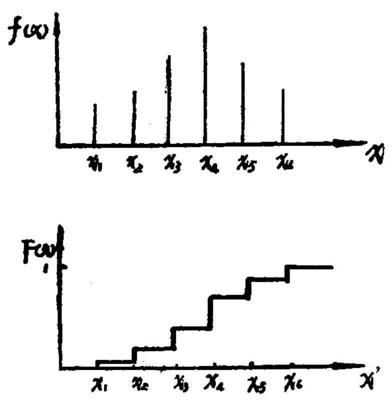
$$F(x)=\sum_i P\{x=x_i\} \qquad x_i\leqslant x \qquad 1.1.34$$

如果分布函数是不连续的，但也不是阶梯型的，则这样的随机变量称为混合随机变量。

如果随机变量不是连续的，则分布函数 $F(x)$ 在通常意义下是不可微的，这样就不好作出相应的分布密度。但是，如果允许在分布密度 $f(x)$ 中包含有 δ-函数，那么就可以在离散型及混合型随机变量的情况下定义随机变量的分布密度。例如，随机变量 ξ 是离散型的，则在点 x_i 包含有冲击的分布密度为

$$f(x)=\sum_i p_i\delta(x-x_i) \qquad 1.1.35$$

三种情况的分布函数和分布密度的曲线如图 1.1.1 所示。



(a)

图 1.1.1

4. 二维分布密度

(1) 假定 $F(x,y)$ 具有偏导式

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y} \qquad 1.1.36$$

则该偏导式就称为随机变量 ξ 和 η 的联合分布密度，而且有性质：

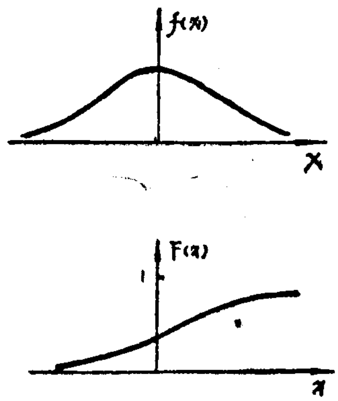
① $F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv$ 1.1.37

② $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u,v)dudv=F(\infty,\infty)=1$

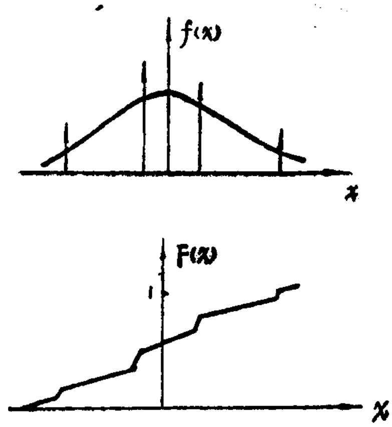
1.1.38

③ $F_\xi(x)=F_{\xi\eta}(x,\infty)$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{x} f_{\xi\eta}(u,v)dudv \qquad 1.1.39$$



(b)



(c)

图 1.1.1

④ $$F_{\eta}(y)=F_{\xi\eta}(\infty,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{\infty}f_{\xi\eta}(u,v)dudv \qquad 1.1.40$$

⑤ $$f_{\xi}(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{\xi\eta}(x,y)dy \qquad 1.1.41$$

⑥ $$f_{\eta}(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{\xi\eta}(x,y)dx \qquad 1.1.42$$

$f_{\xi}(x)$及$f_{\eta}(y)$分别称为随机变量ξ及η的边缘分布密度。

(2) 在假定条件B下随机变量η的条件分布为

$$F_{\eta}(y|B)=P\{\eta\leqslant y|B\}=\frac{P\{\eta\leqslant y,B\}}{P\{B\}} \qquad 1.1.43$$

如果事件B用随机变量$\xi\leqslant x$表示，则有

$$F_{\eta}(y|\xi\leqslant x)=\frac{P\{\xi\leqslant x,\eta\leqslant y\}}{P\{\xi\leqslant x\}}=\frac{F_{\xi\eta}(x,y)}{F_{\xi}(x)} \qquad 1.1.44$$

和

$$F_{\eta}(y|\xi=x)=\frac{\int_{-\infty}^{y}f_{\xi\eta}(x,v)dv}{f_{\xi}(x)} \quad f_{\xi}(x)\neq 0 \qquad 1.1.45$$

$$f_{\eta}(y|\xi=x)=\frac{f_{\xi\eta}(x,y)}{f_{\xi}(x)} \quad f_{\xi}(x)\neq 0 \qquad 1.1.46$$

条件分布密度的概念可以推广到有n个随机变量的情况。我们用

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_k|x_{k+1},\cdots,x_n)$$

表示在条件$\xi_{k+1},\cdots,\xi_n$下，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k$的条件分布密度，则由上就可以得到

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_k|x_{k+1},\cdots,x_n)=\frac{f(x_1,x_2,\cdots,x_k,\cdots x_n)}{f(x_{k+1},\cdots,x_n)} \qquad 1.1.47$$

对应的分布函数$F(x_1,x_2,\cdots,x_k|x_{k+1},\cdots,x_n)$可以由对开头的$k$个随机变量自$-\infty$至$x_1,x_2,\cdots$，$x_k$的积分得到，例如对

$$f(x_1|x_2,x_3)=\frac{f(x_1,x_2,x_3)}{f(x_2,x_3)} \qquad 1.1.48$$

及

$$F(x_1|x_2,x_3)=\frac{\int_{-\infty}^{x_1} f(v_1,x_2,x_3)dv_1}{f(x_2,x_3)} \quad 1.1.49$$

由式 1.1.47 就有

$$f(x_n|x_{n-1},x_{n-2},\cdots,x_1)=\frac{f(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{f(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})} \quad 1.1.50$$

重复地应用上述公式，就得到如下的链规律

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f(x_n|x_{n-1},\cdots,x_1)\cdots f(x_2|x_1)f(x_1) \quad 1.1.51$$

下面来讨论从条件分布密度中去掉某些变量的规则。为了以后叙述方便，我们把条件线左边和右边的变量分别简称为“左”变量和“右”变量，例如，在 $f(x_1,x_2|x_3,x_4)$ 中把 x_1，x_2 叫“左”变量，x_3,x_4 叫“右”变量。这样就得到如下的基本规则：

要去掉“左”变量，就只要对这些变量积分。

要去掉“右”变量，就要先乘这些变量的条件分布密度而后再对这些变量积分。

例如，要去掉“左”变量 x_2，

$$f(x_1|x_3)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,x_2|x_3)dx_2$$

要去掉“右”变量 x_2,x_3，

$$f(x_1|x_4)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1|x_2,x_3,x_4)\cdot f(x_2,x_3|x_4)dx_2dx_3$$

§1.1.3 随机变量的函数变换

如果 ξ 是一随机变量，则其函数 $\eta=g(\xi)$，当 $g(x)$ 满足某些一般的条件时，函数 η 也是一随机变量。

1. 假定 ξ 是连续随机变量，$g(x)$ 是连续的，且在任一区间上不为常量。这就是说，对一给定的 y，方程式

$$y=g(x) \quad 1\cdot1\cdot152$$

至多有可数个根 $x_1,x_2,\cdots$，则随机变量 $\eta=g(\xi)$ 的分布密度 $f_\eta(y)$ 可以由下述定理通过 ξ 的分布密度 $f_\xi(x)$ 求得。

定理：

如果 x_1，x_2，$\cdots$，x_n，$\cdots$ 是对应于 y 为某一值时，上式的全部实根，即

$$y=g(x_1)=\cdots=g(x_n)=\cdots$$

则

$$f_\eta(y)=\frac{f_\xi(x_1)}{|g'(x_1)|}+\cdots+\frac{f_\xi(x_n)}{|g'(x_n)|}+\cdots \quad 1.1.53$$

这里

$$g'(x)=\frac{d}{dx}g(x)$$

很明显，x_1，x_2，$\cdots x_n$，$\cdots$ 的数目决定于 y。如果对 y 的某一值，方程式 $y=g(x)$ 无实根，则 $f_\eta(y)=0$。

2. 假定 $f_{\xi_1\xi_2}(x,y)$ 有限，则随机变量 η_1，η_2 的联合分布密度 $f_{\eta_1\eta_2}(u,v)$，可以用 $f_{\xi_1\xi_2}(x,y)$ 和雅可比 $J(x,y)$ 直接表示。

定理：

要决定 $f_{\eta_1\eta_2}(u,v)$ ，就要利用 u，v 表示 x，y 的方程式

$$\left.\begin{aligned} u &= g(x,y) \\ v &= h(x,y) \end{aligned}\right\} \qquad 1.1.54$$

的解。如果

$$(x_1,y_1),\ \cdots,\ (x_n,y_n)$$

是方程式 1.1.54 的全部实根，也就是说，如果

$$\left.\begin{aligned} g(x_i,y_i) &= u \\ h(x_i,y_i) &= v \end{aligned}\qquad i=1,2,\cdots n\right\} \qquad 1.1.55$$

则

$$f_{\eta_1\eta_2}(u,v) = \frac{f_{\xi_1\xi_2}(x_1,y_1)}{|J(x_1,y_1)|} + \cdots + \frac{f_{\xi_1\xi_2}(x_n,y_n)}{|J(x_n,y_n)|} \qquad 1.1.56$$

如果对某些（u，v）方程式 1.1.54 无实解，则

$$f_{\eta_1\eta_2}(u,v) = 0 \qquad 1.1.57$$

其中

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial h(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial h(x,y)}{\partial y} \end{vmatrix} \qquad 1.1.58$$

3． 对于多个随机变量的情况也有类似的结果。对于 k 个随机变量

$$\left.\begin{aligned} \eta_1 &= g_1(\xi_1,\cdots,\xi_n) \\ &\cdots \\ \eta_k &= g_k(\xi_1,\cdots,\xi_n) \end{aligned}\right\} \qquad 1.1.59$$

的分布密度可以用给定函数 $g_i(x_1,\ \cdots,\ x_n)$ 以及 $f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ 来表示。

如果 $k>n$，则未知分布是奇异的。就先计算 η_1，η_2，…，η_n 的统计特性。

如果 $k<n$，则就采用辅助变量

$$\eta_{k+1} = \xi_{k+1},\ \cdots,\ \eta_n = \xi_n$$

即把随机变量 η 的数目增加到 n 个。这样就可以假定 $k=n$。

对一组给定的 y_1，y_2，…，y_n；η_1，η_2，…，η_n 的联合分布密度的决定，需要解联立方程式

$$\left.\begin{aligned} g_1(x_1,\cdots,x_n) &= y_1 \\ &\cdots \\ g_n(x_1,\cdots,x_n) &= y_n \end{aligned}\right\} \qquad 1.1.60$$

如果该联立方程式，只有一组实数解，则

$$f_{\eta_1\cdots\eta_n}(y_1,\cdots,y_n) = \frac{f(x_1,\cdots,x_n)}{|J(x_1,\cdots,x_n)|} \qquad 1.1.61$$

这里雅可比为

$$J(x_1,\cdots,x_n)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial g_1}{\partial x_1}\cdots\dfrac{\partial g_1}{\partial x_n}\\ \cdots \\ \dfrac{\partial g_n}{\partial x_1}\cdots\dfrac{\partial g_n}{\partial x_n}\end{vmatrix} \qquad 1.1.62$$

如果方程式 1.1.60 的解多于一个，则方程式 1.1.61 应该包含所有解的对应部份。

如果方程式 1.1.60 无解，则

$$f_{\eta_1\cdots\eta_n}(y_1\cdots,y_n)=0 \qquad 1.1.63$$

§1.1.4 随机变量的数值特征

1. 数学期望（平均值）：

定义：

一实随机变量 ξ 的数学期望是积分

$$E\{\xi\}=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=m_\xi=\overline{\xi} \qquad 1.1.64$$

其中 $f(x)$是 ξ 的分布密度。如果 ξ 是离散型的，和取 x_n 值的概率为 p_n，则

$$E\{\xi\}=\sum_n x_n\ p_n \qquad 1.1.65$$

如果 $\eta=g(\xi)$，则有

定理：

$$E\{g(\xi)\}=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)f_\xi(x)dx \qquad 1.1.66$$

和如果 ξ 是离散的，则有

$$E\{g(\xi)\}=\sum_k g(x_k)\ p_k \qquad 1.1.67$$

如果

$$g(x)=g_1(x)+\cdots+g_n(x)$$

则有

$$E\{g(x)\}=E\{g_1(\xi)\}+\cdots+E\{g_n(\xi)\} \qquad 1.1.68$$

2. 方差：

设 ξ 是一随机变量，若 $E\{[\xi-E\{\xi\}]^2\}$存在，则称 $E\{[\xi-E\{\xi\}]^2\}$ 为 ξ 的方差，记为 σ_ξ^2，即

$$\sigma_\xi^2=E\{(\xi-m_\xi)^2\} \qquad 1.1.69$$

如果随机变量 ξ 是连续型的，则有

$$\sigma_\xi^2=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_\xi)^2f(x)dx. \qquad 1.1.70$$

如果随机变量 ξ 是离散型的，则有

$$\sigma_\xi^2=\sum_n(x_n-m_\xi)^2\rho\{\xi=x_n\}. \qquad 1.1.71$$

σ_ξ^2 的正根叫做标准偏差。

3. 矩

随机变量 ξ 的数学期望仅决定分布密度的重心，而更完善的统计特性是所谓矩。

定义：