微分几何基础

方德植编著

科学出版社

微分几何基础

方德植 编著

科学出版社

1984

内 容 简 介

本书采用活动标架法讲述微分几何基础理论。

全书共分四章和一个附录。第一章介绍微分几何中常用的一些基本概念。第二章论述欧氏微分几何。第三章扼要地介绍仿射微分几何。第四章比较详细地论述射影微分几何，对我国微分几何学家早期在这个领域里的贡献作了系统的介绍。最后在附录中编入若干问题与定理供读者参考。

本书可供学过初等微分几何的读者阅读。

3R.5 0

微分几何基础

方德植 编著

责任编辑 杜小杨 张鸿林

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1984年12月第一版 开本：850×1168 1/32

1984年12月第一次印刷 印张：11 1/8

印数：0001—13,800 字数：291,000

统一书号：13031·2736

本社书号：3769·13—1

定价：2.10元

序　言

微分几何已有悠久的历史，自从 Newton 与 Leibniz 奠定了微积分基础以后，就产生了微分几何。虽然它有了三百多年的发展史，但至今仍继续蓬勃地向前发展着。它的产生和发展跟分析有着不可分割的联系，分析的许多问题正是由几何问题提出的。微分几何成为一门独立的学科始于 Gauss。1827年Gauss 发表了“关于曲面的一般研究”一文，奠定了近代形式的曲面论基础。他是从解决绘制地图的实际要求出发的。

所谓“欧氏微分几何”的完整理论是在上世纪形成的，它的发展在 Darboux 所著的《一般曲面论讲义》里作了全面的总结。

到了1854年，Riemann 把 Gauss 的曲面论推广到 n 维空间里去。这个重要思想是在他的演讲《关于几何的基本的假设》中提出的，从而奠定了 Riemann 几何的基础，它有着广泛的应用，相对论就是以 Riemann 几何为基础的。

在 Klein(1872)所发表的“爱尔兰根(Erlangen)纲领”里提出了群论观点以后，自本世纪初，从欧氏微分几何发展了一系列新分支：如仿射微分几何，射影微分几何，共形微分几何等。它们都是统一在群论观点之下，研究几何图形在各种变换下的不变性质。

群论观点在几何上的应用由 E. Cartan 所发展，他建立了“联络空间”的各种几何。这些都是现代微分几何的主要内容。

微分几何包括两部分：局部的与整体的（或大范围的）。现代微分几何是研究整体性质的，为搞清整体性质，必须先研究局部性质。

本书着重于论述曲线与曲面的局部性质，书中共分四章和一个附录(问题与定理)。为了论述的需要，在第一章里粗略地介绍了一些有关的基本概念。例如：微分流形、外微分法、变换群的

概念等。第二章介绍欧氏微分几何，就是研究在欧氏运动群之下曲线和曲面的不变性质，也涉及一些直线几何的内容，例如直纹面和直线汇的理论。在这里主要论述曲线和曲面的局部性质，同时适当地介绍整体微分几何的内容。在论述过程中，自始至终采用Cartan矩阵和活动标架法作为主要工具。第三章也采用同样的方法扼要地介绍仿射空间中的微分几何，着重论述在仿射群之下曲线和曲面的不变性质，并介绍曲线和曲面的局部性质。这里有必要提出苏步青教授在二十年代后期对仿射微分几何作出的重大贡献，单是在“仿射空间的曲面论”这个标题下，在三年内(1928—1930)，在日本各种数学期刊上发表了十二篇论文；在此期间内还发表了其他有关论文二十余篇。他在这个领域中的贡献，在当时已享有国际声誉。他在这个领域中的主要成就已经在最近出版的专著《仿射微分几何》(科学出版社，1982)里作了全面的总结。第四章是本书的重点。由于我国的几何学家在射影微分几何的领域里，曾在国内外专刊上发表过不少的重要论文，其中有许多研究成果已被各国论著所引用；在国际上早已公认我国对射影微分几何方面的研究形成了具有明显特点的学派，因此，在这一章里着重介绍了我国几何学家在射影微分几何方面的成就，特别是收集了苏步青教授多年来在这个领域中所获得的许多重要成果。同时也引进了国外的一些有关论著，以充实本书的内容。最后在附录“问题与定理”中，介绍了有关的比较重要和著名的结论，供读者参考。本书主要采用Lie群论的观点与活动标架论的方法。由于这个学科的内容很丰富，难以作全面的论述，为了便于读者参考，书末列出“参考文献”，但它们仅包括部分参考资料。

本书可供学过初等微分几何的人阅读。

由于作者水平所限，书中难免存在不妥和错误之处，恳切地希望读者给予指正。

方德植

一九八二年十月于厦门大学

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

目　录

第一章 基本概念

为了阅读全书并使读者进一步学习微分几何，本章先概括地介绍一些基本概念，特别是微分流形、外微分形式、外微分、变换群等概念及其有关的性质。这些概念本身是形成近代数学基础的重要分支。至于它们的详细论述可参考有关专著。

§1.1. 流　形

1. 集合论中几个常用的记号　我们假定"对象"、"元素"、"成员"等术语都是熟知的概念，采用这些概念与通常应用的这些术语是一致的。

对集合论中常用的记号作如下的说明。今后集合有时简称为集。

设集A，B，…等的点（或元素）以（a，a'，…），（b，b'，…），…等来表示，以$a \in A$表示点a属于集A，读作a在A中，如果点a不属于A，记作$a \overline{\in} A$，读作a不在A中。如果A的点都属于B，也就是对每点$a \in A$，必有$a \in B$，就称A为B的一个子集。这时我们说A包含在B中，记作$A \subset B$，或者说B包含A，记作$B \supset A$。根据子集的定义，集A是它自身的一个子集。不包含元素的集叫做空集，记作$\varnothing$，空集也是A的一个子集。A和$\varnothing$叫做A的伪子集，而其他的子集叫做真子集。若一个集的每点$a \in A$，且$a \in B$，则称其为A与B的交（集）或通集，记作$A \cap B$。若一个集的任何点a或者$a \in A$或者$a \in B$，则称其为A与B的和（集）或并集，记作$A \cup B$。

令$A \subset M$，用$M-A$表示在M中而不在A中的元素的集，称其为A关于M的补集，并记作$C(A)$，$C(A)$仍是M的一个子集，

因而也可作其补集. A的补集的补集就是A, 即: $C[C(A)]=A$.

2. 数空间 由n个有序实数构成的一个数组$x=(x^1,\cdots,x^n)$的全体组成的集称为n维数空间. 记作R^n. R^n中的元素有时称为点; x^1, x^2, $\cdots$, x^n称为点的坐标. 如果在两个点中至少各有一个同一指标的坐标彼此不相等, 就把它们看作为不同的两个点, 设$x^i(i=1,\cdots,n)$在$(-\infty,\infty)$中变动, 则这种点的全体构成空间R^2. R^1看作是直线, R^2看作是平面, R^3看作是三维空间. 对R^n的两个点$x=(x^1,\cdots,x^n)$和$y=(y^1,\cdots,y^n)$选取

$$d(x,y)=\left[\sum_{i=1}^{n}(x^i-y^i)^2\right]^{1/2}$$

作为距离的定义, 则称这样的空间为n维欧氏空间, 记作E^n.

3. 拓扑空间的定义及其一些有关的概念 设M是一个集(不是空集), τ是M的一组子集, 并满足下列四个条件:

1) $M\in\tau$,

2) $\varnothing\in\tau$,

3) τ中有限个集的交属于τ,

4) τ中任意个集的和属于τ.

我们说τ定义集M上的一个拓扑, 并说τ中这些集是在M上所定义的拓扑的开集, 集M与它的拓扑τ而成的序对(M,τ)称为一个拓扑空间.

对于一个给定的拓扑空间(M,τ), 若$a\in M$, 令O是包含a的一个开集, 并有一个子集$N\subset M$包含O, 则称N为a的一个邻域, a叫做N的内点. 若b为属于N的补集$C(N)$, 则称b为N的外点.

任何一个开集是它的每点的邻域, 反过来说也成立.

如果M的一个子集S的补集是开的, 则称S为M的一个闭子集; 包含一个集$A\subset M$的一切闭集的交称为A的闭包, 记作$\overline{A}$. 如果$\overline{A}=M$, 则称A在M内是(处处)稠密的. 若M具有可数个元素的稠密子集(简称为可数稠密子集), 则称M为可分离的. 同

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

时属于 $\overline{A}$ 和 $\overline{CA}$ 的点称为集 A 的边界点；边界点的集称为边界，所以边界是集 $\overline{A}\cap\overline{CA}$。

若任一集 M 的一切子集都是开集，则称这个拓扑为 M 的离散拓扑。

给定一个拓扑空间 M 和 M 的一组开集 τ，对于一个子集 $N\subset M$，则不难看出，以 $\delta=\{S:S=G\cap N, G\subset\tau\}$ 为一组开集的集 N 是一个拓扑空间，N 的这个拓扑称为由 M 的拓扑诱导出来的拓扑，或简称为诱导拓扑。

对于集 M 的每对不同点 a，b，若分别有 a 和 b 的邻域 N 和 L，使得 $N\cap L=\varnothing$，则称拓扑空间（M，τ）为分离空间或 Hausdorff（拓扑）空间。

在拓扑空间里，也可定义聚点、函数的连续性等概念。例如，设 $a\in M$，而且子集 $N\subset M$ 使得 a 的任何邻域 $U(a)$ 含有 N 中不同于 a 的一点，则称 a 为 M 的一个聚点。

现在叙述拓扑空间的一个重要的实例，所谓度量空间。

设 M 是一个点集，在 M 内每个点对（a，b）必有满足下列性质的实函数 $d(a, b)$ 和它对应：

1° $d(a, b)=0$ 的一个充要条件是 $a=b$，$a, b\in M$；

$$d(a, b)=d(b, a),\quad a, b\in M;$$

2° 三角形不等式成立：

$$d(a, b)\leqslant d(a, c)+d(b, c),$$
$$a, b, c\in M,$$

则序对（M，d）称为一个度量空间。函数 d 叫做空间（M, d）的度量函数，$d(a, b)$ 叫做 a，b 两点的距离。

当 $b=a$ 时，从1°和2°推出 $0\leqslant 2d(a, c)$。由此可见，两点的距离是非负的，并由1°可知，两不同点的距离是正的。

若在三角形不等式中，令 $c=a$，就有 $d(a, b)\leqslant d(b, a)$。但是也有相反不等式 $d(a, b)\geqslant d(b, a)$，所以 $d(a, b)=d(b, a)$，因此距离是点对的非负对称函数。

现在要证明度量空间是拓扑空间。由于距离是点对的非负对

称函数，对任一正数 ε，作出满足 $d(a, b)<\varepsilon$ 的点 b，这种 b 的全体叫做中心 a 和半径 ε 的球形邻域，记作 $U(a, \varepsilon)$。

这样，在集 M 内就可以导入拓扑结构。设子集 $N\subset M$ 对任意点 $a\in N$ 有以 a 为中心的一个球形邻域存在，使它的一切点都在 N 中，就称 N 为开集。从三角形不等式不难看出，球形邻域是开集。

空集是开集，因为否则必有一点 $a\in\varnothing$。给定一点 $a\in M$ 使对任意的 $\varepsilon>0$，$U(a, \varepsilon)\subset M$，因而 M 是它的每点的一个邻域，这就是说 M 是开集。所以条件 1）和 2）成立。

现在来证明，若 O_1，O_2，…，O_n 是 M 的一组开集，则

$$O_1\cap O_2\cap\cdots\cap O_n$$

也是开集。为此令

$$a\in O_1\cap O_2\cap\cdots\cap O_n,$$

则每个 O_i（$i=1, 2, \cdots, n$）是 a 的一个邻域，于是点 a 作为 O_i 的一点是 O_i 内半径为 ε_i 的球心，因而以 a 为中心和 ε_i 中的最小数 ε 作为半径的球形邻域包含在 O_i 的交内，所以它是开集，因而条件 3）也满足。

其次来证明，若 O 为任意个开集 O_1，O_2，…，O_n 的和，则 O 也是开集，为此令

$$a\in O,$$

则必有某一个 O_i，使得 $a\in O_i$，因而 O_i 为 a 的一个邻域，因为 $O_i\subset O$，而 O 为 a 的一个邻域，所以 O 是它的每点的邻域。所以条件 4）成立。证毕。

在第 2 段中已经讲过，对 n 维空间 R^n 的两点 $x=(x^1, \cdots, x^n)$ 和 $y=(y^1, \cdots, y^n)$ 选取

$$d(x, y)=\left[\sum_{i=1}^{n}(x^i-y^i)^2\right]^{1/2}$$

作为距离的定义，则称这样的空间为 n 维欧氏空间 E^n。

事实上，容易推知，除了三角形不等式外，上面所定义的函数 $d(x, y)$ 具有度量性质。所以只要证明

$$d(x,\ y)\leqslant d(x,\ z)+d(y,\ z),$$
$$x,\ y,\ z\in M,$$

也就是要证明

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(x^i-y^i)^2\right]^{1/2}\leqslant\left[\sum_{i=1}^{n}(x^i-z^i)^2\right]^{1/2}+\left[\sum_{i=1}^{n}(y^i-z^i)^2\right]^{1/2},$$

若令 $u^i=x^i-z^i$, $v^i=z^i-y^i$, 则 $x^i-y^i=u^i+v^i$, 因而只要证明

$$[(u^i+v^i)^2]^{1/2}\leqslant\left[\sum_{i=1}^{n}(u^i)^2\right]^{1/2}+\left[\sum_{i=1}^{n}(v^i)^2\right]^{1/2}.$$

把这个不等式两边平方，经过化简后，可知它等价于

$$\sum_{i=1}^{n}u^iv^i\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}(u^{i2})\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n}(v^{i2})\right)^{1/2},$$

这就是通常说的 Schwarz 不等式，对任意两组实数总是成立的。

4. 函数. 连续性. 同胚 设 $X=(M,\ \tau)$ 与 $Y=(M',\ \tau')$ 是两个拓扑空间。如果对于 X 的每点 P，在 Y 中有一点 P' 与 P 对应，则称这个对应为 X 到 Y 的映射，记作 $f:X\to Y$。映射可以用函数记号来表示：

$$P'=f(P)$$

P' 称为 P 的象。当 Y 的一切点都是 X 的点的象时，称 f 为 X 到 Y 上的映射。当给定 $P'\in Y$ 时，在 X 中以 P' 为象的一切点的全体称为 P' 的象源，使 P' 和它在 X 中的象源相对应的映射称为给定映射的逆映射，记作 f^{-1}。

对于映射 f 给定了点 $P\in X$ 和它在 Y 中的象 $P'=f(P)$ 的任意邻域 $U'(P')$；若找出 P 的这样的邻域 $U(P)$，使得

$$f(U(P))\subset U'(P'),$$

则称映射在 P 点是连续的。特别，如果 f 在 X 的一切点都是连续的，这时称 $f:X\to Y$ 为一个连续映射或简称为映射，X 叫做 f 的

定义空间，Y 叫做 f 的值空间。

当一对一的映射 $f: X \to Y$ 同它的逆映射 $f^{-1}: Y \to X$ 一起，顺次在 X, Y 上都是连续映射时，则称 f 为一个拓扑映射。当映 X 到 Y 的拓扑映射存在时，把点 $P \in X$ 和点 $P' = f(P)$ 看成同一点，就知道 X, Y 具有同一拓扑，这时称两个拓扑空间 X，Y 互为同胚。

在连续映射 $f: X \to Y$ 之下，若在 P 点有一个邻域 $U(P)$，使它与它的象 $U' = f(U)$ 同胚，就说映射 f 在 P 点是局部同胚的。显然，同胚在任意点是局部同胚的。但在每点局部同胚的映射可以不是同胚的。

给定两个拓扑空间 X_1，X_2，设 $a_1 \in X_1$，$a_2 \in X_2$，并考虑一切点对（a_1，a_2）的集。在 X_1 和 X_2 中分别取开集 O_1 和 O_2，令 $a_1 \in O_1$，和 $a_2 \in O_2$，则一切点对（a_1，a_2）的集叫做集 O_1 和 O_2 的积，记作 $O_1 \times O_2$。制作具有形式 $O_1 \times O_2$ 的和集，并定义 $X_1 \times X_2$ 内的拓扑，则不难证明 $X_1 \times X_2$ 构成一个拓扑空间，称之为空间 X_1 和 X_2 的直积或拓扑积。

若 X_1, X_2 都是 Hausdorff 空间，则 $X_1 \times X_2$ 也是 Hausdorff 空间。

欧氏平面 E^2 是两条直线的拓扑积，所以 $E^2 = E^1 \times E^1$。一般地，n 维欧氏空间可以作为 n 重拓扑积 $E^1 \times E^1 \times \cdots \times E^1$。

如果用连续映射 f 把线段 $I: a \leqslant t \leqslant b$ 映射到拓扑空间 X，它的象 $f(t)$ 称为曲线，$f(a)$，$f(b)$ 叫做这条曲线的端点。如果拓扑空间 X 的任意两点可以用连续曲线连结时，称 X 为弧式连通的。

可微性概念基于分析中导数的定义。设 r 为一正整数。若从一个开集 $U \subset R^m$ 到 R^n 的一个映射 f 在 U 上具有直到 r 阶的连续偏导数，则称 f 为 C^r 函数。

拓扑基是个重要的概念。设拓扑空间 X 以 τ 为其开集组，对于子组 $B \subset \tau$，使得任意开集可以用 B 中的开集的和集来表示，则称 B 为 X 的一个拓扑基。

例如，对于 n 维欧氏空间 E^n，开球组构成一个拓扑基。对于

离散拓扑，空集与一切单个点的集构成一个基。

若拓扑空间X含有至多由可数个集形成的一个拓扑基，则称X满足第二可数性公理。

设在拓扑空间X中具有由开集构成的某一个集，记作$\tau=\{U_\alpha\}$（这里α是标志这些开集U_α的记号，假定α在某一集A的元素中变动，A的元素不一定是可数个）。如果取任意点$a\in X$，存在一个属于τ的U_α使$a\in U_\alpha$，就说τ形成X的一个开覆盖。

若X是满足第二可数性公理的拓扑空间，则只要给定X的任意开覆盖τ，从τ中选出可数个开集，就可以把X覆盖起来。如果只用其中有限个开集就能覆盖X，就称X为紧致拓扑空间。

如果一个拓扑空间X的每点具有一个邻域与某一n维欧氏空间的一个开子集同胚，就说X为局部欧氏的，n称为X的维数。

5．度量空间的完备化 设$\{a_n\}$（$n=1, 2, \cdots$）是拓扑空间X中一个无限点列。若有一点a，对a的每个邻域U有一个指数N与a对应，并当$n>N$时，$a_n\in U$，则称点列$\{a_n\}$是收敛的，或者说点列$\{a_n\}$收敛于极限点a，记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n=a \quad \text{或者} \quad a_n\to a\ (n\to\infty).$$

若$\{a_n\}$是度量空间X的一个无限点列，并收敛于a点，则对任何$\varepsilon>0$必有正整数N，使得

$$d(a_n, a)<\frac{\varepsilon}{2}, \quad n>N.$$

故由三角形不等式便得

$$d(a_m, a_n)<\varepsilon, \quad m, n>N.$$

使这个不等式成立的点列$\{a_n\}$称为 Cauchy 序列。不难证明，一个度量空间中一个收敛点列必为 Cauchy 序列，但是反过来未必成立。例如把一切有理数看作一维实数空间R^1的度量空间，则R^1中 Cauchy 序列就不收敛，这是因为它的极限可能是无理数。

特别，当空间X中任一 Cauchy 序列都收敛时，则说X是完备的，或称X为完备空间。

紧致空间是完备空间．事实上，在所论的紧致空间X的各点a，考察以a为中心的球形邻域，设$S(a)$为其内部，则$S(a)$是开集，并且这些开集的全体$\{S(a)|a\in X\}$构成X的开覆盖．因而，由紧致性的假设，只用其中有限个开集就能覆盖X。现在把这有限个开集记作$S(a_1)$，$S(a_2)$，…，$S(a_k)$。

在X内任取一个无限点列，在这个点列中必有无限个的点属于这k个开集中的一个，比如$S(a_1)$，再把$S(a_1)$的边界点加进去，使成为闭集$\overline{S(a_1)}$；显然，在这个闭集内，这个无限子点列至少有一个极限点；因此，X的任一无限点列至少有一个极限点，所以X为完备空间。

6．微分流形　按照第2段中所述，有了数空间R^n，就有距离$d^2=\sum(x_i-y_i)^2\geqslant 0$，于是有极限、开集等概念，即有拓扑．$R^n$中更重要的是还有代数运算：向量的加法与数乘，即线性运算。因此，R^n a）是一个拓扑空间，并且b）是一个向量空间．从R^n推广到流形，希望能保持这两个性质．但是不可能完全保持。

拓扑性质可以保持，而代数性质则不然．由于流形上向量不能相加，于是引进切空间，这些下面要详细叙述。

上面我们已经讲过，R^n是一个度量空间，并有自然的拓扑．现在的问题是，如何推广R^n，引进流形的概念，使它基本上能保持R^n的这两个性质．现在给出微分流形的定义如下：

设X为一Hausdorff拓扑空间，并且有满足下列条件的补充结构：

1°对于X有一个有限或可数开覆盖$\{U_\alpha\}$，$\alpha\in A$，并对每个U_α和n维欧氏空间E^n的某一开区域D_α同胚，它对应的同胚设为

$$f_\alpha: U_\alpha\to D_\alpha.$$

2°若对于使$U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$的任意两个开集$U_\alpha$，$U_\beta(\alpha,\ \beta\in A)$，映射

$$f_\beta\circ f_\alpha^{-1}:\ f_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)\to f_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com