近代数学的支柱——

线性代数

张和平　编著

科学技术文献出版社

线性代数

张和平　编著

科学技术文献出版社

(京)新登字 130 号

内容简介

本书概括了线性代数的主要内容，共分六章：行列式与 Cramer 法则；矩阵及其在解线性方程组上的应用；向量空间与线性方程组解的结构；相似矩阵与矩阵的对角化；合同矩阵与二次型的标准化；线性空间与线性变换。

本书内容充实，结构紧凑；重点突出，难点分散；循循善诱，深入浅出。每章习题有答案，其中比较疑难的问题有解答。

本书适合高等工科院校各专业与设有线性代数课程的其他高等院校非数学专业作为教材或教学参考书，也适合科学研究人员、工程技术人员以及自学成才者阅读与参考。

线性代数
张和平 编著
科学技术文献出版社出版
(北京复兴路 15 号 邮政编码 100038)
北京海子角胶印厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经销
*
850×1168 毫米 32 开本 9.7 印张 255 千字
1993 年 10 月第 1 版 1993 年 10 月第 1 次印刷
印数：1—3000 册
科技新书目：306-099
ISBN 7—5023—2125—X/O·101
定价：8.70 元

序　言

线性代数，号称近代数学的支柱。对于初入高等学府的大学生而言，比较抽象难学。编者认为："从某种意义上讲，学生手中有一本深入浅出的好教材相当于身边有一位好的家庭教师。"而一般教材往往需要经过教师在讲台上的再创造才能起到这个作用。出于这方面的考虑，编者在编写线性代数教材时，则努力体现"讲台上的创造"而试图具有"抓住精华，深入浅出，一看就懂"的特色。

这本书的初稿是编者在八十年代初期给北京林业大学研究生讲授线性代数时写成的，基点较高。1987 年 4 月调入北京（电子）印刷学院后，根据国家教委颁发的高等工业院校本科线性代数课程的基本要求并兼顾到对线性代数要求较强的某些专业的需要进行了改编，自 1987 年 9 月给八七届各专业的学生讲授线性代数开始试用以来，坚持博览群书，积累科技与教学资料，认真吸取众家之长，在教学实践中，反复总结经验，反复修改原稿，为出版成书作了大量准备工作。1991 年 4 月请国家教委全国高等工科院校基础课程指导委员会副主任委员盛祥耀教授审阅了部分章节，提出了建设性的指导意见。经再次修改后，1993 年 4 月请北京林业大学王绍颜教授、马宜中副教授、李铮副教授审阅了全稿，集思广益，提出了宝贵意见。他们鼓励编者发挥其长，著书立说，对于本书出版起了积极的推动作用。借此机会，谨向盛祥耀教授、王绍颜教授、马宜中副教授、李铮副教授以及关心与支持本书出版工作的其他同志一并表示衷心感谢与敬意。

尽管编者在指导思想上力争把本书写好，但是由于水平所限，未必能够取得预想的结果。编者确信，实践是检验真理的标准。广大社会读者是评论本书的最佳裁判员。编者拜读者为师，诚恳地期望提出宝贵意见，以便再版时改进。

编者　张和平

1993 年 6 月于北京

审稿者的话

科学技术文献出版社出版的这本线性代数，出版前我们认真审阅了编者的全稿，一致认为这是一本写得比较成功的线性代数教材，颇有还原讲台之意，在教与学两方面都值得一读。具体而论，有以下特色：

1. 内容充实，结构紧凑；循循善诱，深入浅出；文笔流畅；通俗易懂；

2. 在突出重点、分散难点、化难为易、尽量把抽象问题具体化几方面别具一格；

3. 各章习题不仅有答案，而且比较疑难的习题给出了解答，便于解题困难者参考。

因此，本书适合高等工科院校各专业与设有线性代数课程的其它高等院校非数学专业作为教材或教学参考书，在取材内容方面可以根据不同专业的具体要求从中各取所需，在讲课时数方面可以灵活掌握。也适合科研工作者、不同文化层次的工程技术人员以及自学成才者阅读与参考。

王绍颜　马宜中　李　铮

1993年5月于北京

目　录

第一章 行列式与 Cramer 法则

由包含 n 个未知量的 m 个线性方程构成的方程组，称为 n 元 m 式线性方程组，它的一般形式是

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}。$$

因为在线性代数中研究的方程组都是线性方程组，所以通常总是省略“线性”二字而简称为方程组。

行列式起源于解 n 元 n 式方程组，因此，在本章我们将从解二元二式与三元三式方程组引进二阶与三阶行列式的概念，进而用排列的奇偶性把行列式的概念推广到 n 阶；然后再用行列式解 n 元 n 式方程组，而其关键问题在于如何简化计算行列式？为此还要论证行列式的基本性质与 Laplace 降阶定理，并由此提出简化计算行列式的方法。行列式不只是被用来解 n 元 n 式方程组，而且在研究矩阵问题时经常用到它。因此，行列式是学习线性代数的必备知识，具有工具性意义。关于行列式的知识，具体说来，我们打算研究以下四个问题：

1. 行列式的概念；
2. 行列式的基本性质；
3. 简化计算行列式的方法；
4. Cramer 法则。

§1 行列式的概念

1. 二阶与三阶行列式

行列式起源于解 n 元 n 式方程组，其中最简单、最基本的是二

元二式方程组，它的一般形式是

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2\end{cases}$$

在初等代数中，我们已经知道，解线性方程组的基本思路是消元，利用加减消元法解之（当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时）得

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\\[2ex]x_2=\dfrac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\end{cases}$$

但此公式不容易记忆，因此也就不便于应用。针对这一缺点 Sarrus① 创造性地引进记号

$$\begin{vmatrix}a & b\\c & d\end{vmatrix}=ad-bc$$

从而使上述公式变为容易记忆的形式

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}b_1 & a_{12}\\b_2 & a_{22}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}},\qquad x_2=\frac{\begin{vmatrix}a_{11} & b_1\\a_{21} & b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}}\qquad(1-1)$$

在引进的上述记号中，横排称为行，竖排称为列。因为共有二行二列，所以称为二阶行列式。

二阶行列式的定义本身同时也给出了它的计算方法：

$$^{+}\begin{vmatrix}a & b\\c & d\end{vmatrix}^{-}=ad-bc$$

从左上角到右下角的对角线，称为主对角线。沿主对角线二元素之积取正号；从右上角到左下角的对角线，称为次对角线。沿次对角线二元素之积取负号。这种计算方法号称二阶行列式的对角线法则。因为公式(1－1)中的分母行列式是由原方程组中未知量的系

① Sarrus(1798－1861)法国数学家。但是，行列式的问题最早是由瑞士数学家 Cramer(1704－1752)在 1750 年解方程组时提出的。

数构成的，所以分母行列式又有系数行列式之称。

解一般形式的三元三式方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$$

暂把前两个方程中的 x_1 视为常数，利用公式(1—1)求出 x_2 与 x_3，再代入第三个方程求得 x_1 为

$$\frac{b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-a_{13}a_{22}b_3-a_{12}b_2a_{33}-b_1a_{23}a_{22}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{22}a_{33}a_{31}+a_{12}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}}$$

用同样的方法可以求得 x_2 与 x_3。

与解二元二式方程组时遇到的问题一样，上述公式既不便于记忆也不便于应用，为此我们也象引进二阶行列式那样引进三阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32} \qquad (1—2)$$

从而把解三元三式方程组的一般公式变为便于记忆的形式：

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}};x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}};x_3=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

简记作

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D} \qquad (1—3)$$

依此类推，有理由猜想解四元四式方程组也有类似的一般公式。但若按照对角线法则计算四阶行列式并试图用来解四元四式

方程组时，计算的结果却不是方程组的解。为什么会发生问题呢？

认真观察三阶行列式的展开式，我们发现其结构规律如下：

(1) 三阶行列式是 3! 项的代数和，其中每一项都是取自不同行不同列的三个元素的乘积；并且凡是取自不同行不同列的三元素之积都在 3! 项中出现；

(2) 三阶行列式的正负项数各占一半。

不言而喻，二阶行列式也是符合上述结构规律的，由此推断：四阶行列式应该是 4! 项的代数和，但是，按照对角线法则计算四阶行列式只能得到 8 项的代数和，这说明对角线法则并不能揭示四阶行列式的结构规律。

于是，现在我们所要提出的问题是：用什么办法揭示四阶行列式的结构规律呢？

深入研究三阶行列式的结构规律将会知道，Sarrus 的对角线法则并不是确定三阶行列式的项数与各项符号的唯一法则，事实上利用排列的奇偶性不仅也能确定三阶行列式的项数与各项符号，而且依此来定义 n 阶行列式就能用来解 n 元 n 式方程组。

2. 排列的奇偶性

在数学中常称被考察的对象为元素。所谓 n 个元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的一个全排列，就是把这 n 个元素按照某一顺序排列成一行，全排列简称排列。

在线性代数中，研究 n 个元素的排列，只需要注意元素的前后次序，因此，自然要用前 n 个自然数取代 n 个元素，这样一来，我们就可以把 n 个不同元素的排列简单地说成是前 n 个自然数的排列了。前 n 个自然数的排列共有多少种呢？

定理 1－1 n 个不同自然数的排列共有 n! 种，记作 $P_n = n!$。

证：作 n 个自然数的排列时，可从中任取一个放在第一位，因此第一位数的取法有 n 种；又从剩下的 n－1 个自然数中任取一个放在第二位，有 n－1 种取法；因为每取定第一位上的一个自然数第二位上的取法就有 n－1 种，所以前两位上的自然数取法共有 n

$(n-1)$种。这样继续下去，最末一位上就只剩下一个自然数可取了，于是有 $P_n=n(n-1)\cdots3\times2\times1=n!$

在前 n 个自然数的所有 $n!$ 个排列中，只有 $123\cdots n$ 是按照自然数顺序构成的排列，因此称它为标准排列。

定义 1—1　对于 n 个自然数的任一排列而言，如有一个较大自然数排在一个较小自然数的前面，则说这两个自然数构成一个逆序。而在这个排列里出现的逆序总数称为这个排列的逆序数。逆序数是奇数的排列称为奇排列，逆序数是偶数的排列称为偶排列。

例如在排列 312 中，3 与 1 构成一个逆序，3 与 2 也构成一个逆序，因此这个排列的逆序数是 2，并称此排列为偶排列。

如何计算前 n 个自然数的任一排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数从而确定排列的奇偶性呢？

对于任一排列 $p_1p_2\cdots p_n$，按照从左往右的顺序对每个自然数 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$进行分析，看有多少个比 p_i 大的自然数排在 p_i 前面就与 p_i 构成多少个逆序，其逆序数记作 t_i，当 i 从 1 起取遍前 n 个自然数时便得出相应于每个自然数的逆序数 $t_1,t_2,\cdots,t_n$。显然 t_1 恒为零，最后把它们加在一起，就是这个排列的逆序数，记作

$$t(p_1p_2\cdots p_n)=\sum_{i=1}^{n}t_i$$

用这种方法计算排列的逆序数，既可以避免遗漏又可以避免重复。

例 1　求排列 35421 的逆序数，并说明排列的奇偶性。

解：观察排列 35421，知 $t_1=0,t_2=0,t_3=1,t_4=3,t_5=4$，于是该排列的逆序数为

$$t(35421)=\sum_{i=1}^{5}t_i=0+0+1+3+4=8$$

从而可知 35421 是偶排列。

在此，我们讨论排列的兴趣全在于排列的奇偶性，而对改变排列奇偶性起决定作用的是对换。所谓对换，就是在前 n 个自然数的一个排列里，把任意两个自然数交换一下位置而其余自然数的位

置不变。对换有一条很重要的性质，即

定理 1－2　每一对换都要改变排列的奇偶性。

证：(1)　先证被对换的二自然数 i 与 j 是相邻的情形。

若 $i<j$，则对换后的排列显然增加一个逆序数。若 $i>j$，则对换后的排列显然减少一个逆序数。不论逆序数是增加 1 个或减少 1 个，对换后的排列都改变了奇偶性。

(2)　再证被对换的二自然数 i 与 j 是相间的情形.

不失一般性，可设 i 与 j 之间有 s 个自然数，并且给定的排列

$$\cdots ik_1k_2\cdots k_sj\cdots \tag{1－4}$$

经 i,j 交换后变为另一个排列

$$\cdots jk_1k_2\cdots k_si\cdots \tag{1－5}$$

显然，这样一个不相邻二自然数对换可以通过若干次相邻二自然数的对换来实现：先让 i 依次与 k_1、k_2、…、k_s 对换，经 s 次相邻对换后排列(1－4)变为$\cdots k_1k_2\cdots k_sij\cdots$，再让 j 依次与 i、$k_s$、…、$k_2$、$k_1$ 对换，经 s＋1 次相邻对换后，排列(1－4)变为排列(1－5)。

由排列(1—4)变为排列(1—5)，共经过 2s＋1 次相邻二自然数对换，根据情形(1)推知，经过奇数次相邻对换的排列必改变奇偶性。

推论　奇(偶)排列调成标准排列的对换次数为奇(偶)数。

例 2　列表写出前 3 个自然数的所有排列及其逆序数、奇偶性以及奇、偶排列的个数。

前三个自然数的排列	逆序数	奇偶性	奇排列个数	偶排列个数
123	0	偶	3	3
132	1	奇		
213	1	奇		
231	2	偶		
312	2	偶		
321	3	奇		

从此表格中看出：在 3 个自然数的所有排列里，奇偶排列的个

数一样多，事实上，不只是 3 个数码的排列是这样，可以证明对于任意多个自然数的排列也是这样，于是有

定理 1—3　当 $n\geqslant 2$ 时，在前 n 个自然数的所有 $n!$ 个排列里，奇、偶排列的个数各占一半。

证：设 n 个自然数的奇排列共有 p 个，偶排列共有 q 个，根据定理 1—2，对这 p 个不同的奇排列都施行 i 与 j 对换变为 p 个不同的偶排列，依题设，偶排列共有 q 个，因此 $p\leqslant q$；类似地可得 $q\leqslant p$。比较此二不等式，便得 $p=q$，根据定理 1—1 可知 $p+q=n!$，于是

$$p=q=\frac{n!}{2}$$

3.　n 阶行列式的概念

我们利用排列的奇偶性先来考察三阶行列式的结构规律并确定其各项符号，然后把此规律推广到 n 阶行列式中去。为此，我们先把注意力集中到每个元素 a_{ij} 的两个附标上，其中第一个附标 i 是行标，第二个附标 j 是列标，各项乘积中三个元素的排列顺序都与每个元素的附标密切联系着，并且我们注意到每项乘积中的三个元素都是按其行标的自然数顺序排成的（即行标排列都是标准排列 123，这是一种很好的排法，这样排秩序井然，既可以避免遗漏又可以避免重复，同时也便于记忆）。而所有各项的列标排列：

123，231，312，321，213，132

恰巧构成了 3 个自然数的所有排列．根据定理 1—1，这样的排列共有 3! 个．由此可知，三阶行列式应有 3! 项．另一方面，根据定理 1—3，在所有 3! 个排列里，奇、偶排列的个数各占一半，由例 2 可知，前三个是偶排列，后三个是奇排列，恰巧与三个偶排列对应的项取正号，与三个奇排列对应的项取负号。由此说明，当每项乘积中的三个元素都按照行标的自然数顺序排列时，行列式的各项符号是由列标排列的奇偶性决定的，并且各项符号可以统一地写成 $(-1)^{t(p_1p_2p_3)}$，其中 $t(p_1p_2p_3)$ 表示列标排列 $p_1p_2p_3$ 的逆序数。这样