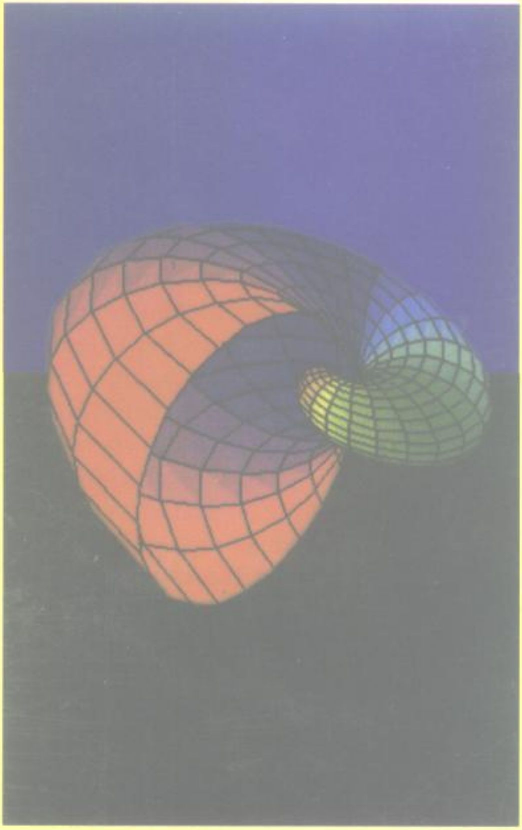
南开大学数学教学丛书

高等代数与解析几何

下册

孟道骥 著



科学出版社

南开大学数学教学丛书

高等代数与解析几何(下)

孟道骥　著

科学出版社

1998

内容简介

解析几何，高等代数与数学分析是大学数学系的三大基础课程．南开大学数学系将解析几何与高等代数统一为一门课程，本书就是力求反映这种思想的尝试．

本书分上、下册，第一章讨论多项式理论．第二章介绍行列式，包括用行列式解线性方程组的 Cramer 法则．第三章矩阵，主要介绍矩阵的计算，初等变换及矩阵与线性方程组的关系．第四章介绍线性空间．第五章介绍线性变换．第六章 λ-矩阵是为了讨论复线性变换而设的．第七章介绍 Euclid 空间．第八章介绍双线性函数与二次型，第九章讨论二次曲面．第十章介绍仿射几何与射影几何，本书附有相当丰富的习题．

本书读者对象：高校数学系师生，数学工作者．

图书在版编目(CIP)数据

高等代数与解析几何　(下)/孟道骥著．-北京：科学出版社，1998
(南开大学数学教学丛书)

ISBN 7-03-006195-0

Ⅰ．高…　Ⅱ．孟…　Ⅲ．①高等代数-高等学校-教学参考资料②解析几何-高等学校-教学参考资料　Ⅳ．013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(97)第 17484 号

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
北京双青印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1998 年 8 月第　版　开本：850×1168　1/32
1998 年 8 月第一次印刷　印张：10
印数：1-4 000　字数：263 000

定价：17.00　元

目 录

第五章　线性变换

所谓线性变换就是一个线性空间到自身的同态映射 (即线性映射). 线性变换除线性映射的一般性质外，还有许多特殊的性质. 例如特征值，特征向量，不变子空间等等. 另外，就是将线性变换具体化为方阵. 利用线性变换的方阵表示给出线性变换的分类理论.

线性变换是线性代数中很重要的理论，线性变换的应用也极为广泛.

5.1　线性变换的定义

定义 1　设 V 是数域 $\mathbf{P}$ 上的线性空间. $\mathcal{A}$ 是 V 的一个**变换** (即 V 到 V 的映射), 并满足

$$\mathcal{A}(\alpha+\beta)=\mathcal{A}\alpha+\mathcal{A}\beta,\ \forall\alpha,\beta\in V, \tag{1}$$

$$\mathcal{A}(k\alpha)=k\mathcal{A}\alpha,\ \forall k\in\mathbf{P},\ \alpha\in V, \tag{2}$$

则称 $\mathcal{A}$ 是 V 的一个**线性变换**.

等式 (1), (2) 分别叫做 $\mathcal{A}$ **保持加法**与**保持纯量乘法**.

例 1　设 $A\in\mathbf{P}^{n\times n}$. 定义 $\mathbf{P}^{n\times 1}$ 中变换 $\mathcal{A}$ 为

$$\mathcal{A}(\alpha)=A\alpha,\ \forall\alpha\in\mathbf{P}^{n\times 1},$$

则 $\mathcal{A}$ 是 $\mathbf{P}^{n\times 1}$ 的一个线性变换. □

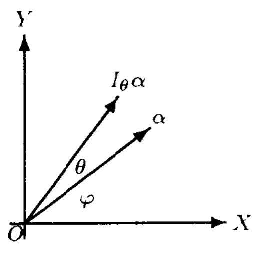
例 2　在 $\mathbf{P}^{n\times n}$ 中取定一个元素 A. 定义 $\mathbf{P}^{n\times n}$ 中变换 $\mathrm{ad}A$ 如下:

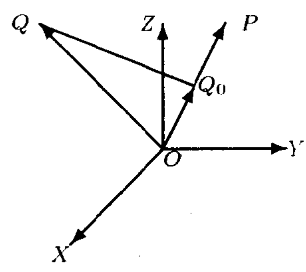
$$\mathrm{ad}A(B)=AB-BA,\ \forall B\in\mathbf{P}^{n\times n},$$

则由

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}A(B+C) &= A(B+C)-(B+C)A\\ &= (AB-BA)+(AC-CA)\\ &= \mathrm{ad}A(B)+\mathrm{ad}A(C),\\ \mathrm{ad}A(kB) &= A(kB)-(kB)A\\ &= k(AB-BA)\\ &= k\,\mathrm{ad}A(B)\end{aligned}$$

知 $\mathrm{ad}A$ 是 $\mathbf{P}^{n\times n}$ 的线性变换. □





例 3 在平面上取定直角坐标系 XOY. 每个平面向量均由过原点 O 的向量表示. 将每个向量绕原点 O 旋转 θ 角. 这样得到平面向量空间的一个变换, 记为 I_θ.

设向量 α 的长度为 r, 幅角为 φ, 则 α 的坐标为 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r\cos\varphi\\r\sin\varphi\end{pmatrix}$. $I_\theta\alpha$ 的长度为 r 幅角为 $\theta+\varphi$. 因而坐标为 $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r\cos(\theta+\varphi)\\r\sin(\theta+\varphi)\end{pmatrix}$. 故

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.$$

由此不难看出 I_θ 是一个线性变换. 如上左图.

例 1 在空间取定直角坐标系 $OXYZ$. 设 $\overrightarrow{OP}=\alpha\neq 0$. 又 $\beta=\overrightarrow{OQ}$. 过 Q 作 OP 的垂线，垂足为 Q_0. 称向量 $\overset{rightarrow}{OQ_0}$ 为 β 在 α 上的 **投影**. 定义变换 Π_α 为将 β 映到 β 在 α 上的投影，记为 $\Pi_\alpha\beta$. 见上右图.

设 α、β、$\Pi_\alpha\beta$ 的坐标分别为

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

于是 $\Pi_\alpha\beta=\lambda\alpha$. 且 $|\lambda\alpha|^2+|\overrightarrow{QQ_0}|^2=|\overrightarrow{OQ}|^2$. 而

$$\overrightarrow{QQ_0}=\Pi_\alpha\beta-\beta=\begin{pmatrix} \lambda x_0-x \\ \lambda y_0-y \\ \lambda z_0-z \end{pmatrix}.$$

于是有

$$\begin{aligned}&(\lambda x_0)^2+(\lambda y_0)^2+(\lambda z_0)^2\\&\quad+(\lambda x_0-x)^2+(\lambda y_0-y)^2+(\lambda z_0-z)^2\\&=x^2+y^2+z^2.\end{aligned}$$

由此可得

$$\lambda=(xx_0+yy_0+zz_0)/(x_0^2+y_0^2+z_0^2).$$

因而

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}&=\lambda\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}\\&=\frac{1}{x_0^2+y_0^2+z_0^2}\begin{pmatrix} x_0^2x+x_0y_0y+x_0z_0z \\ x_0y_0x+y_0^2y+y_0z_0z \\ x_0z_0x+y_0z_0y+z_0^2z \end{pmatrix}\\&=\frac{1}{x_0^2+y_0^2+z_0^2}\begin{pmatrix} x_0^2 & x_0y_0 & x_0z_0 \\ x_0y_0 & y_0^2 & y_0z_0 \\ x_0z_0 & y_0z_0 & z_0^2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

由此知 Π_α 是线性变换.

例 5 设 $C^\infty(a, b)$ 是区间 (a, b) 上任意次可微函数的集合. 则 $C^\infty(a,b)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的无限维线性空间. $\frac{d}{dx}$ 是 $C^\infty(a, b)$ 的变换. 由微分学知 $\frac{d}{dx}$ 保持加法与纯量乘法. 故 $\frac{d}{dx}$ 是 $C^\infty(a, b)$ 的线性变换.

例 6 闭区间 $[a, b]$ 上全体连续函数的集合 $C[a, b]$ 是 $\mathbf{R}$ 上的线性空间. 在 $C[a, b]$ 中定义变换 S 如下

$$S(f(x)) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad \forall f(x) \in C[a, b],$$

则由积分学知 S 保持加法与纯量乘法, 因而是 $C[a, b]$ 上的线性变换.

下面总假定 V 是数域 $\mathbf{P}$ 上的线性空间.

零变换 0, 即 $0(\alpha) = 0$, $\forall \alpha \in V$.

在书写时, 数零, 零向量与零变换都不加区别. 但要注意它们在意义上的区别.

恒等变换 (单位变换) id, 即 $\mathrm{id}(\alpha) = \alpha$, $\forall \alpha \in V$.

显然这是线性变换. 有时也记为 $\mathcal{E}$, I.

数乘变换 k, 即将 α 对应到 $k\alpha$, 这儿 k 是 $\mathbf{P}$ 中一个固定的数. 显然, 这是线性变换. 且 $k = 0$ 时, 为零变换; $k = 1$ 时, 为恒等变换.

由于线性变换是一类特殊的同态映射. 故同态映射的性质对线性变换都成立. 例如

$\mathcal{A}(0) = 0$; $\mathcal{A}(-\alpha) = -\mathcal{A}(\alpha)$;

$\mathcal{A}\left(\sum\limits_{i=1}^{r} k_i\alpha_i\right) = k_i \sum\limits_{i=1}^{r} \mathcal{A}(\alpha_i)$;

若 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 线性相关, 则 $\mathcal{A}(\alpha_1), \mathcal{A}(\alpha_2), \ldots, \mathcal{A}(\alpha_r)$ 线性相关;

$\mathcal{A}(V)$ 是 V 的子空间 ($\dim \mathcal{A}(V)$ 叫 $\mathcal{A}$ 的**秩**, 记为 $\mathrm{r}(\mathcal{A})$, $\mathrm{rank}\mathcal{A}$), 等等.

习 题

判断 1 — 12 中定义的变换 $\mathcal{A}$ 是否为线性变换.

1 在线性空间 V 中, $\mathcal{A}\xi=\xi+\alpha$, 其中 α 为 V 的一固定向量.

2 在线性空间 V 中, $\mathcal{A}\xi=\alpha$, 其中 α 为 V 的一固定向量.

3 在 $\mathbf{P}^{1\times 3}$ 中 $\mathcal{A}(x_1,\ x_2,\ x_3)=(x_1^2,\ x_2+x_3,\ x_3^2)$.

4 在 $\mathbf{P}^{1\times 3}$ 中 $\mathcal{A}(x_1,\ x_2,\ x_3)=(2x_1-x_2,\ x_2+x_3,\ x_1)$.

5 在 $\mathbf{P}[x]$ 中, $\mathcal{A}f(x)=f(x+1)$.

6 在 $\mathbf{P}[x]$ 中, $\mathcal{A}f(x)=f(x_0)$, 其中 x_0 是 $\mathbf{P}$ 中一固定的数.

7 把复数域作为复数域上的线性空间. $\mathcal{A}\xi=\bar{\xi}$, $\bar{\xi}$ 为 ξ 的共轭数.

8 把复数域作为实数域上的线性空间. $\mathcal{A}\xi=\bar{\xi}$.

9 在 $\mathbf{P}^{n\times n}$ 中, $\mathcal{A}(X)=BXC$, 其中 B, C 是 $\mathbf{P}^{n\times n}$ 中两个固定矩阵.

10 在 $C^\infty(a,\ b)$ 中

$$\mathcal{A}f(x)=\frac{d^2f(x)}{dx^2}+x\frac{df(x)}{dx}+\sin x\cdot f(x).$$

11 在 $C^\infty(a,\ b)$ 中

$$\mathcal{A}f(x)=\left(\frac{df(x)}{dx}\right)^2+x\frac{df(x)}{dx}+\sin x\cdot f(x).$$

12 在 $C[a, b]$ 中

$$\mathcal{A}f(x) = \int_a^x K(t)f(t)\,dt, \quad \forall f(x) \in C[a, b],$$

其中 $K(x)$ 是 $C[a, b]$ 的一固定函数.

13 求 $\mathbf{P}[x]$ 的线性变换 $\frac{d}{dx}$ 的像及核:

$$\frac{d}{dx}\mathbf{P}[x] = \left\{\frac{df(x)}{dx} \mid f(x) \in \mathbf{P}[x]\right\},$$

$$\ker\frac{d}{dx} = \left\{f(x) \in \mathbf{P}[x] \mid \frac{df(x)}{dx} = 0\right\}.$$

14 求 $\mathbf{P}[x]$ 的线性变换 L_x:

$$L_x(f(x)) = xf(x)$$

的像 $L_x(\mathbf{P}[x])$ 及核 $\ker L_x$.

5.2 线性变换的运算

设 V 是数域 $\mathbf{P}$ 上的线性空间. $\mathrm{End}\,V$ 为 V 的所有线性变换的集合. 本节将定义 $\mathrm{End}\,V$ 中的几种运算.

1. 加法 设 $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathrm{End}\,V$. $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 的 **和** 定义为

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})\alpha = \mathcal{A}\alpha + \mathcal{B}\alpha, \ \forall \alpha \in V.$$

求和的运算称为加法.

事实上，若 α, $\beta \in V$, $k \in \mathbf{P}$, 我们有

$$\begin{aligned}
(\mathcal{A}+\mathcal{B})(\alpha+\beta) &= \mathcal{A}(\alpha+\beta)+\mathcal{B}(\alpha+\beta)\\
&= \mathcal{A}\alpha+\mathcal{B}\alpha+\mathcal{A}\beta+\mathcal{B}\beta\\
&= (\mathcal{A}+\mathcal{B})\alpha+(\mathcal{A}+\mathcal{B})\beta.\\
(\mathcal{A}+\mathcal{B})(k\alpha) &= \mathcal{A}(k\alpha)+\mathcal{B}(k\alpha)\\
&= k\mathcal{A}\alpha+k\mathcal{B}\alpha\\
&= k(\mathcal{A}+\mathcal{B})\alpha.
\end{aligned}$$

因而 $\mathcal{A}+\mathcal{B} \in \operatorname{End} V$.

2. 纯量乘法 设 $k \in \mathbf{P}$, $\mathcal{A} \in \operatorname{End} V$ 定义 k 与 $\mathcal{A}$ 的积如下：

$$(k\mathcal{A})\alpha = k \cdot \mathcal{A}\alpha,\ \forall \alpha \in V.$$

不难证明 $k\mathcal{A} \in \operatorname{End} V$.

3. 乘法 设 $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \in \operatorname{End} V$. 则 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 的积 $\mathcal{AB}$ 为

$$(\mathcal{AB})\alpha = \mathcal{A}(\mathcal{B}\alpha),\ \forall \alpha \in V.$$

若 k, $l \in \mathbf{P}$, α, $\beta \in V$, 则

$$\begin{aligned}
&(\mathcal{AB})(k\alpha+l\beta) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(k\alpha+l\beta))\\
&= \mathcal{A}(k\mathcal{B}\alpha+l\mathcal{B}\beta)\\
&= k\mathcal{A}(\mathcal{B}\alpha)+l\mathcal{A}(\mathcal{B}\beta)\\
&= k(\mathcal{AB})\alpha+l(\mathcal{AB})\beta.
\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\mathcal{A}"] \arrow[dr, "\mathcal{AB}"'] & V \arrow[d, "\mathcal{B}"] \\
& V
\end{tikzcd}$$

故 $\mathcal{AB} \in \operatorname{End} V$.

线性变换对于上述三种运算满足下面性质.

定理 1 设 V 是数域 $\mathbf{P}$ 上的线性空间，V 的所有线性变换的集合为 $\operatorname{End} V$. 则

1) $\operatorname{End} V$ 对加法及纯量乘法为 $\mathbf{P}$ 上线性空间;

2) $\operatorname{End} V$ 中乘法满足结合律

$$\mathcal{A}(\mathcal{BC}) = (\mathcal{AB})\mathcal{C},\ \forall \mathcal{A},\ \mathcal{B},\ \mathcal{C} \in \operatorname{End} V,$$

且

$$\mathrm{id}\,\mathcal{A}=\mathcal{A}\,\mathrm{id}=\mathcal{A},\quad 0\mathcal{A}=\mathcal{A}0=0;$$

3) $\mathrm{End}\,V$ 中乘法及加法适合分配律

$$\mathcal{A}(\mathcal{B}+\mathcal{C})=\mathcal{A}\mathcal{B}+\mathcal{A}\mathcal{C},\quad (\mathcal{B}+\mathcal{C})\mathcal{A}=\mathcal{B}\mathcal{A}+\mathcal{C}\mathcal{A};$$

4) $\mathrm{End}\,V$ 中乘法与纯量乘法满足

$$k(\mathcal{A}\mathcal{B})=(k\mathcal{A})\mathcal{B}=\mathcal{A}(k\mathcal{B}),\ \forall k\in\mathbf{P},\ \mathcal{A},\ \mathcal{B}\in\mathrm{End}\,V.$$

证 本定理可直截了当地验证. 读者可自行完成. 特别指出, 线性空间 $\mathrm{End}\,V$ 的零元素就是 V 的零变换 0. $\mathcal{A}$ 的负元素 $-\mathcal{A}=(-1)\mathcal{A}$. 于是

$$(-\mathcal{A})\alpha=-\mathcal{A}\alpha,\ \forall\alpha\in V.$$

若 $k\in\mathbf{P}$, 则 $k\,\mathrm{id}$ 就是由 k 决定的数乘变换 k.

此外, 乘法交换律一般不成立. □

定义 1 若 V 的线性变换 $\mathcal{A}$ 还是一一对应, 则称 $\mathcal{A}$ 为 **可逆线性变换**, 否则称 $\mathcal{A}$ 为 **不可逆**.

显然, $\mathcal{A}$ 可逆当且仅当 $\mathcal{A}^{-1}$ 存在.

定理 2 设 V 是数域 $\mathbf{P}$ 上的线性空间. $GL(V)$ 为 V 的所有可逆线性变换的集合. 则

1) $\mathrm{id}\in GL(V)$;

2) $\mathcal{A}\in GL(V)$, 则 $\mathcal{A}^{-1}\in GL(V)$, 且 $(\mathcal{A}^{-1})^{-1}=\mathcal{A}$;

3) $\mathcal{A},\ \mathcal{B}\in GL(V)$, 则 $\mathcal{A}\mathcal{B}\in GL(V)$, 且

$$(\mathcal{A}\mathcal{B})^{-1}=\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}^{-1}.$$

证 $\mathcal{A}$ 为 V 的可逆线性变换, 即 V 到 V 的同构映射. 因而由 §4.11 知定理成立. □

定义 2 设 V 是数域 $\mathbf{P}$ 上的线性空间. 又 $\mathcal{A}\in\mathrm{End}\,V$. 定义

$$\mathcal{A}^0=\mathrm{id},\quad \mathcal{A}^{n+1}=\mathcal{A}\mathcal{A}^n.$$

$\mathcal{A}^n$ 称为 $\mathcal{A}$ 的 n **次幂**.

又若 $f(x)=\sum\limits_{i=0}^{m} a_i x^i \in \mathbf{P}[x]$. 定义

$$f(\mathcal{A}) = a_0\,\mathrm{id} + a_1\mathcal{A} + \cdots + a_m\mathcal{A}^m.$$

称为 $\mathcal{A}$ 的一个 **多项式**.

定理 3 设 $\mathcal{A}$ 是 $\mathbf{P}$ 上线性空间 V 的线性变换. 定义 $\mathbf{P}[x]$ 到 $\mathrm{End}\,V$ 的映射 $\varphi_{\mathcal{A}}$ 为

$$\varphi_{\mathcal{A}}(f(x)) = f(\mathcal{A}),\ \forall f(x) \in \mathbf{P}[x].$$

则有以下结论.

1) $\varphi_{\mathcal{A}}$ 是线性空间 $\mathbf{P}[x]$ 到线性空间 $\mathrm{End}\,V$ 的线性映射.

2) $\varphi_{\mathcal{A}}$ 保持乘法, 即

$$\varphi_{\mathcal{A}}(f(x)g(x)) = \varphi_{\mathcal{A}}(f(x))\varphi_{\mathcal{A}}(g(x)),\ \forall f(x),\ g(x) \in \mathbf{P}[x].$$

3) $\ker\varphi_{\mathcal{A}} = \{f(x) | f(\mathcal{A}) = 0\}$ 是 $\mathbf{P}[x]$ 的子空间. 且若 $f(x) \in \ker\varphi_{\mathcal{A}}$, 则

$$f(x)g(x) \in \ker\varphi_{\mathcal{A}},\ \forall g(x) \in \mathbf{P}[x].$$

证 1) 设 $f(x)=\sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i,\ g(x)=\sum\limits_{i=0}^{n} b_i x^i,\ k \in \mathbf{P}$. 则

$$\begin{aligned}
\varphi_{\mathcal{A}}(f(x)+g(x)) &= \varphi_{\mathcal{A}}\left(\sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)x^i\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)\mathcal{A}^i = \sum_{i=0}^{n} a_i\mathcal{A}^i + \sum_{i=0}^{n} b_i\mathcal{A}^i \\
&= \varphi_{\mathcal{A}}(f(x)) + \varphi_{\mathcal{A}}(g(x)). \\
\varphi_{\mathcal{A}}(kf(x)) &= \varphi_{\mathcal{A}}\left(\sum_{i=0}^{n} k a_i x^i\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n} k a_i\mathcal{A}^i = k\sum_{i=0}^{n} a_i\mathcal{A}^i \\
&= k\varphi_{\mathcal{A}}(f(x)).
\end{aligned}$$

故 1) 成立.

2) 首先, 由于线性变换乘法的结合律, 故有

$$\mathcal{A}^m \mathcal{A}^n = \mathcal{A}^{m+n}, \quad m,\ n \in \mathbf{Z},\ m \geq 0,\ n \geq 0.$$

于是

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathcal{A}}(f(x)g(x)) &= \sum_{k=0}^{2n}\left(\sum_{i+j=k} a_i b_j\right)\mathcal{A}^k \\ &= \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \mathcal{A}^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} b_j \mathcal{A}^j\right) \\ &= \varphi_{\mathcal{A}}(f(x))\varphi_{\mathcal{A}}(g(x)).\end{aligned}$$

因而 2) 成立.

3) 由 §4.11 知 $\ker\varphi_{\mathcal{A}}$ 是 $\mathbf{P}[x]$ 的子空间. 设 $\alpha \in \ker\varphi_{\mathcal{A}}$, $g(x) \in \mathbf{P}[x]$. 于是由

$$\varphi_{\mathcal{A}}(f(x)g(x)) = f(\mathcal{A})g(\mathcal{A}) = 0,$$

知 $f(x)g(x) \in \ker\varphi_{\mathcal{A}}$. □

推论 1 $m,\ n \in \mathbf{Z},\ m \geq 0,\ n \geq 0$. 则

$$(\mathcal{A}^n)^m = \mathcal{A}^{mn}.$$

这是因为 $(x^n)^m = x^{mn}$ 由 2) 即可得上式. □

推论 2 若 $\ker\varphi_{\mathcal{A}} \neq 0$, 以 $d_{\mathcal{A}}(x)$ 表示 $\ker\varphi_{\mathcal{A}}$ 中次数最低的首一多项式, 称为 $\mathcal{A}$ 的 **最低多项式**. 则 $f(x) \in \ker\varphi_{\mathcal{A}}$ 当且仅当 $d_{\mathcal{A}}(x)|f(x)$. 等价地说, 有

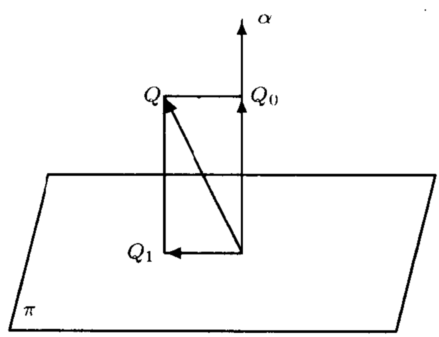
$$\ker\varphi_{\mathcal{A}} = \{d_{\mathcal{A}}(x)g(x)|g(x) \in \mathbf{P}[x]\}.$$

证 以 $q(x)$, $r(x)$ 表示 $f(x)$ 除以 $d_{\mathcal{A}}(x)$ 的商式与余式. 由

$$f(\mathcal{A}) = d_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})q(\mathcal{A}) + r(\mathcal{A}) = r(\mathcal{A}),$$

知 $f(x)\in\ker\varphi_{\mathcal{A}}$ 当且仅当 $r(x)\in\ker\varphi_{\mathcal{A}}$. 但 $d_{\mathcal{A}}(x)$ 为 $\ker\varphi_{\mathcal{A}}$ 中次数最低者. 若 $r(x)\neq 0$, 由 $\deg r(x)<\deg d_{\mathcal{A}}(x)$. 这是不可能的. 故 $r(x)=0$. □

例 1 设 α 为空间一非零向量. 在直角坐标系 $OXYZ$ 中 $\overrightarrow{OP}=\alpha$. 过 O 作平面 π 与 α 垂直. 又 $\beta=\overrightarrow{OQ}$. β 在 α 上的投影为 $\Pi_\alpha\beta=\overrightarrow{OQ_0}$. 过 Q 作 π 的垂线, 垂足为 Q_1. $\overrightarrow{OQ_1}$ 为 β 在 π 上的投影. 如下图.



记为 $\Pi_{\alpha'}$. 由于 id, $\Pi_\alpha\in\operatorname{End}V$. 故 $\mathrm{id}-\Pi_\alpha\in\operatorname{End}V$. 但

$$(\mathrm{id}-\Pi_\alpha)\beta=\mathrm{id}\beta-\Pi_\alpha\beta=\Pi_{\alpha'}\beta.$$

故 $\Pi_{\alpha'}=\mathrm{id}-\Pi_\alpha\in\operatorname{End}V$.

显然有

$$\Pi_\alpha^2=\Pi_\alpha,\quad \Pi_{\alpha'}^2=\Pi_{\alpha'}.$$

因而 $x^2-x\in\ker\varphi_{\Pi_\alpha}$, $x^2-x\in\ker\varphi_{\Pi_{\alpha'}}$. 但 $\Pi_\alpha\neq 0$, $\Pi_\alpha\neq\mathrm{id}$; $\Pi_{\alpha'}\neq 0$, $\Pi_{\alpha'}\neq\mathrm{id}$. 故

$$d_{\Pi_\alpha}(x)=d_{\Pi_{\alpha'}}(x)=x^2-x.$$ □

例 2 $d_{\mathrm{id}}(x)=x-1$.

例 3 $d_0(x) = x$.

例 4 设 $\mathcal{D} = \frac{d}{dx} \in \operatorname{End} \mathbf{P}[x]_n$. 显然

$$\mathcal{D}^n(f(x)) = 0, \quad \forall f(x) \in \mathbf{P}[x]_n;$$

$$\mathcal{D}^k(x^{n-1}) \neq 0, \quad k < n.$$

故

$$d_{\mathcal{D}}(x) = x^n. \qquad \square$$

例 5 设 $a \in \mathbf{P}$. 定义 $S_a \in \operatorname{End} \mathbf{P}[x]_n$ 如下:

$$S_a(f(x)) = f(x+a), \quad \forall f(x) \in \mathbf{P}[x]_n.$$

由于

$$f(x+a) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a^k}{k!} \frac{d^k f(x)}{dx^k}.$$

因而

$$S_a = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a^i}{i!} \mathcal{D}^i. \qquad \square$$

例 6 $\mathcal{D} = \frac{d}{dx}$ 作为 $\mathbf{P}[x]$ 中线性变换, 最低多项式不存在. 即 $\ker \varphi_{\mathcal{D}} = (0)$.

事实上, 设 $f(x) \in \mathbf{P}[x]$, $\deg f(x) = m$. 则

$$f(\mathcal{D})x^m \neq 0.$$

故 $f(x) \notin \ker \varphi_{\mathcal{D}}$, $\forall f(x) \in \mathbf{P}[x]$. $\square$

以后, 将证明若 $\dim V < \infty$, 则任何 $\mathcal{A} \in \operatorname{End} V$ 的最低多项式一定存在.

最后, 若 $\mathcal{A} \in GL(V)$, $k \in \mathbf{Z}$, 定义

$$\mathcal{A}^{-k} = (\mathcal{A}^{-1})^k.$$