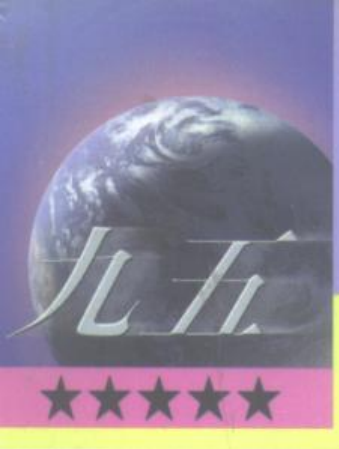




普通高等教育“九五”部级重点教材

B

普通高等教育机电类规划教材

金属塑性成形

华中理工大学 李尚健 主编

过程模拟



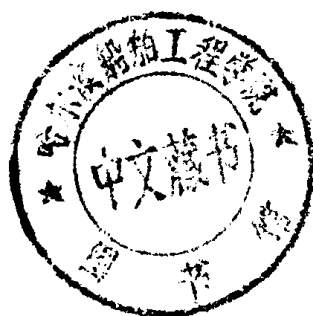
机械工业出版社

429346

普通高等教育机电类规划教材

金属塑性成形过程模拟

主编 李尚健
参编 董湘怀 孙 胜 陈国学
刘建生 马庆贤
主审 彭大暑



机械工业出版社

本书为机械工业部重点教材，全书阐述金属塑性成形过程模拟基本理论和实施方法，内容包括金属塑性变形力学基础，塑性成形过程的上限元模拟、刚塑性和刚黏塑性有限元模拟、小应变弹塑性和有限应变弹塑性有限元模拟、动力分析方法和塑性成形过程的物理模拟等；有两章分别讨论体积成形的有限元模拟和板料成形的有限元模拟；在附录中给出了一个完整的刚塑性有限元模拟的教学程序。书中也反映了当前上述各种塑性成形模拟方法的新成果和最新进展。

本书为高等院校金属材料工程专业和材料成型与控制工程专业本科生教材，也可作为材料加工工程等有关专业研究生教材，并可供从事金属塑性成形和模具 CAD 的科技人员参考。

2141/07

金属塑性成形过程模拟

华中理工大学 李尚健 主编

责任编辑：王霄飞 杨燕 版式设计：冉晓华

封面设计：海之帆 责任校对：孙志筠

责任印制：路琳

机械工业出版社出版（北京市百万庄大街 22 号）

邮政编码：100037

（北京市书刊出版业营业许可证出字第 117 号）

北京市密云县印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

*

开本 $787 \times 1092^{1/16}$ ·印张 17.25·字数 418 千字

1999 年 5 月第 1 版第 1 次印刷

印数 0 001—2 000 定价：24.00 元

*

ISBN 7-111-06873-4/TP·904（课）

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

前 言

本书为机械工业部重点教材。本书是根据 1997 年 4 月在洛阳召开的第二届全国高等学校材料工程类专业教学指导委员会塑性成形工艺及设备专业指导小组第二次会议关于“九五”专业教材的建议,机械工业部教育司关于普通高等教育“九五”机械工业部重点教材编写的要求编写的。

科学技术飞速的发展,使得“模拟技术”一词已为人们所熟知,模拟技术已有效地应用于相当广阔的领域。模拟技术在金属塑性加工的理论研究和生产实际中已显示其作用,金属塑性成形过程模拟正成为对塑性成形进行科学预测、工艺优化和定量控制的有效方法,在塑性加工领域中获得愈来愈广泛的应用。成形模拟的商品软件已在生产实际中应用;模拟技术也是塑性加工虚拟制造系统中的一项重要技术。因此,掌握模拟技术已经成为从事塑性成形和模具设计的技术人员所需具备的一项基本技能。目前,迫切需要一本较系统和全面地介绍各种金属塑性成形过程的数值模拟和物理模拟的基本理论和应用技术,适合于大学高年级学生学习、理解和掌握,能促进学生知识结构的更新、研究能力和计算机应用能力培养的《金属塑性成形过程模拟》教材。

本教材是一本新编教材。编写过程中征求了多方面的意见,认为金属塑性成形过程模拟内容丰富,又是一种有效的实用技术,作为专业教材,既要适合于大学高年级学生学习、理解和掌握,又要有一定的实用性,有适当的广度和深度,适用面较广;既容易入门,又可以作为深入研究的桥梁。编者在本教材编写中体现了这种要求。根据编者多年来在塑性成形模拟的科研和教学工作中的经验和体会,概念和内容叙述力求通俗易懂,论述简明清晰。本书内容选取和编排,既有系统性和科学性,各章又有相对独立性;既反映应用较成熟的内容,也反映最新进展。适合于各校根据具体情况和教学时数,安排、选取所需教学内容。本书可作为高等院校金属材料工程专业和材料成型与控制工程专业本科生教材,也可作为材料加工工程等有关专业研究生教材,并可供从事金属塑性成形和模具 CAD 的科技人员参考。

全书内容共分八章和一个附录。在第一章中,对金属塑性成形过程模拟方法和发展作了概述介绍。第二章简明论述金属塑性变形力学基础。第三章讲述金属塑性成形的上限元模拟。第四章讲述塑性成形的刚塑性和刚黏塑性有限元分析。第五章讲述塑性成形的小应变弹塑性和有限应变弹塑性有限元分析、塑性成形的动力分析方法和动力松弛法。第六章讲述金属体积成形的有限元模拟。第七章讲述金属板料成形的有限元模拟。第八章讲述塑性成形过程的物理模拟。在附录中给出一个完整的刚塑性有限元模拟教学程序。有适当实例说明应用情况。也反映了当前上述各种塑性成形模拟方法的新成果及最新进展。

本书的主编为华中理工大学李尚健(第一章第二节,第二章第一、二节和第五章)。参编人员有华中理工大学董湘怀(第一章第一节,第二章第三、四节和第七章)、山东工业大学孙胜(第三章)、清华大学陈国学(第四章)、太原重型机械学院刘建生(第六章和附录)、清华大学马庆贤(第八章)。

本书由中南工业大学彭大暑教授主审,武汉汽车工业大学姜奎华教授、南昌大学林治平

IV

教授、哈尔滨工业大学张凯锋教授、湘潭大学彭炎荣教授和华中理工大学李志刚教授等进行了审稿，对书稿提出了不少宝贵意见。在此一并表示衷心感谢。

限于编者的学识与水平有限，书中错误和不足之处，敬请读者批评指正。

编 者
1998 年 9 月

主要符号

$[]$ 矩阵	$\bar{\epsilon}$ 等效应变
A_{ij} 二阶张量 A 的分量, 也用于表示二阶张量 A ; 或表示矩阵 $[A]$ 的元素	E_{ij} 格林应变张量
$[]^T$ 矩阵的转置	e_{ij} 阿尔曼斯应变张量
$[]^{-1}$ 矩阵的逆	$\dot{\omega}_{ij}$ 旋转速率张量
$\{\}$ 列向量 (列阵)	$[N]$ 形函数矩阵
A_i 列向量 $\{A\}$ 的分量	$[B]$ 应变—位移矩阵 (应变矩阵) 或应变率—速度矩阵 (应变率矩阵)
$\{\}^T$ 列向量的转置, 即行向量 (行阵)	$[k]$ 单元刚度矩阵
$\dot{A}$ 变量 A 对时间的微商	$[K]$ 整体刚度矩阵
$A_{,i} = \partial A / \partial x_i$ 变量 A 对坐标 x_i 的偏导数	$[C]^e$ 弹性矩阵
$\Delta()$ 变量 $()$ 的增量	$[C]^{ep}$ 弹塑性矩阵
$\delta()$ 变量 $()$ 的虚增量或变分	$[J]$ 雅可比矩阵
$\{X\}$ 初始态的笛卡尔直角坐标	J 雅可比行列式
$\{x\}$ 变形态的笛卡尔直角坐标	$[M]$ 质量矩阵
$\{x'\}$ 局部笛卡尔直角坐标系的坐标	$[C]$ 阻尼矩阵
$\{u\}$ 在局部坐标系中表示的位移	$[I]$ 单位矩阵
$\{U\}$ 在整体坐标系中表示的位移	$\{a\}$ 加速度
$\{P\}$ 节点外力	$\{b\}$ 单位体积上的体积力
$\{F\}$ 节点内力	$\{p\}$ 单位面积上的表面力
σ_{ij} 应力分量, 直角坐标系中的柯西应力张量	$\dot{W}$ 变形功
σ'_{ij} 应力偏量	Π 总位能或泛函
$\bar{\sigma}$ 等效应力	ξ, η, ζ 等参坐标
σ_m 平均 (正) 应力	E 弹性模量
σ_s 屈服应力	E_t 材料硬化系数 (即 $\bar{\sigma} - \bar{\epsilon}$ 曲线的斜率)
τ_{ij} 柯西应力张量	G 剪切弹性模量
$\hat{\tau}_{ij}$ 柯西应力张量的久曼导数	ν 泊松比
T_{ij} 拉格朗日应力张量	ρ 质量密度
S_{ij} 克希荷夫应力张量	μ 摩擦系数
ϵ_{ij} 应变分量	V 物体的体积
ϵ_{ij}^e 弹性应变分量	S 物体的表面积
ϵ_{ij}^p 塑性应变分量	t 时间

目 录

前言	
主要符号	
第一章 绪论	1
第一节 金属塑性成形过程模拟方法概述	1
第二节 金属塑性成形过程模拟课程的目的和任务	3
参考文献	4
第二章 金属塑性变形力学基础	5
第一节 应变	5
第二节 应力	16
第三节 本构方程	22
第四节 基本方程和原理	33
参考文献	40
第三章 金属塑性成形的上限元 (UBET) 模拟	41
第一节 概述	41
第二节 单元模型	44
第三节 总上限功率	50
第四节 正向模拟	53
第五节 反向模拟	56
第六节 模拟实例	64
参考文献	67
第四章 金属塑性成形的刚塑性有限元分析	68
第一节 概述	68
第二节 理论基础	69
第三节 刚塑性变形的广义变分原理	71
第四节 刚塑性有限元列式	79
第五节 刚黏塑性有限元法	85
第六节 数值计算中的几个特殊问题	91
第七节 耦合热变形分析	100
参考文献	107
第五章 金属塑性成形的弹塑性有限元分析	109
第一节 概述	109
第二节 小应变弹塑性有限元分析	109

第三节 有限应变弹塑性有限元分析	121
第四节 动力分析方法	130
参考文献	140
第六章 金属体积成形的有限元模拟	142
第一节 概述	142
第二节 平面变形和轴对称问题	142
第三节 三维问题	157
第四节 接触边界条件的处理	160
第五节 刚塑性有限元模拟分析步骤	165
第六节 程序设计	167
第七节 模拟实例	169
参考文献	174
第七章 金属板料成形的有限元模拟	176
第一节 板壳单元	176
第二节 膜单元	183
第三节 板料成形模拟中的几个问题	184
第四节 缺陷分析	191
第五节 有限元模拟计算步骤	192
第六节 程序设计	194
第七节 板料成形模拟实例	196
第八节 晶体塑性模型的应用	200
参考文献	204
第八章 塑性成形过程的物理模拟	205
第一节 概述	205
第二节 相似原理	205
第三节 网格法	210
第四节 云纹法	212
第五节 光塑性法	219
参考文献	222
附录 刚塑性有限元模拟程序	223
A-1 程序功能和特点	223
A-2 程序使用说明	223
A-3 计算例题	227
A-4 源程序清单	231

第一章 绪 论

第一节 金属塑性成形过程模拟方法概述

金属塑性成形是利用金属的塑性，通过模具（或工具）使简单形状的毛坯成形为所需工件的技术。在塑性成形中，材料的塑性变形规律、模具与工件之间的摩擦现象、材料中温度和微观组织的变化及其对制件质量的影响等等，都是十分复杂的问题。这使得塑性成形工艺和模具设计缺乏系统的、精确的理论分析手段，而是主要地依据工程师长期积累的经验。对于复杂的成形工艺和模具，设计质量难以得到保证；一些关键性的设计参数要在模具制造出来之后，通过反复的调试、修改才能确定。这样就浪费了大量的人力、物力和时间。而借助于模拟方法，则能使人们获得对于塑性成形过程规律的认识，以较小的代价、在较短的时间内找到最优的或可行的设计方案。

随着实验和理论分析的发展，塑性成形过程模拟方法有了很大发展，并已应用于科学研究和生产实践。所谓模拟，即是针对某个现象或过程的原型，建立一个与该现象或过程具有相似性而又便于人们进行观测和控制的模型，通过研究模型在各种条件下的响应来推测原型在相应条件下的响应，从而获得对于原型规律性的认识。金属塑性成形过程的模拟方法分为物理模拟和数值模拟两大类。

物理模拟即采用物理模型进行实验模拟。要使得物理模拟的结果能正确地推广到原型，就应该在模拟中使模型与原型之间满足相似条件。金属塑性成形过程的物理模拟方法有网格法、云纹法，等等。

数值模拟采用一组数学方程（一般是微分方程）和定解条件将实际过程抽象成理论模型，采用电子计算机求得该理论模型在不同条件下的数值解，以此推测在相应条件下所发生的实际过程。随着计算机技术的发展，数值模拟方法越来越显示出巨大的优越性。首先，它不需要建造物理模型，因而节省了大量人力、物力和时间，并使得在设计阶段即可对不同的设计方案及时进行评估，筛选出合理的或最优的方案。其次，数值模拟能提供工件和模具中各物理量（如应力、应变、温度等）分布的详尽数据，使人们获得对于实际过程的深入、全面的了解。最后，数值模拟有着极大的灵活性，能用于模拟在目前尚不能提供的虚拟条件下模型的性态，从而为探索性的研究提供了手段。另一方面，由于建立理论模型时对原型的简化处理，所依据的理论的不完善和计算误差等等，数值模拟的结果应该用物理模拟来检验。

数值模拟方法是建立在塑性成形过程力学分析的基础之上的。分析金属成形过程的目的在于：①预测工件的几何形状是否满足产品的精度要求，是否会产生表面缺陷；②预测工件的内部质量，是否会发生破裂等；③预测模具的受力和磨损；④据此选择适当的材料和工艺及模具参数。金属成形过程的分析方法主要可分为两大类。一类是近似的解析计算方法，其中包括主应力法、滑移线法、界限法（包括上限法和下限法）、功平衡法等。这类方法一般用来计算成形过程所需的力和能。其优点是简便易行并能得到问题的解析解，但只适宜于简

单的成形问题。另一类是数值方法，其中包括有限差分法、有限元法和边界元法。这类方法能用于获得金属塑性成形过程中应力、应变和温度分布，成形缺陷等详尽的数值解，能用于分析十分复杂的成形过程。本书介绍上限元法和有限元法。

上限元法起源于 1936 年前苏联 A.A. Гвоздев 的工作。40 年代末到 50 年代初，A.A. Марков、R. Hill、W. Prager、P. G. Hodge 等人相继提出了一系列上下限极值原理，以及弹塑性和刚塑性材料的各种变分原理。工藤英明 (Kudo) 于 1958 年提出了单位变形区技术。上限元技术 (简称 UBET) 是 70 年代中期由 R. P. Mcdermott, A. N. Bramley 和 A. S. Cramphorn 等人把工藤英明的划分单元和规范的思想与计算机技术结合而发展起来的一种上限法。与有限元法相比，上限元法的分析精度不够高，但简便易行，可大大节省计算时间，有些问题可以手工计算。

有限元法起源于 40 年代提出的结构力学中的矩阵算法。“有限元法”这一术语是克拉夫于 1960 年提出来的。它起初是作为一种力学分析的数值计算方法，后来发展成为求解偏微分方程边值、初值问题的一种一般的离散化方法。

有限元法的基本思想是把连续体视为离散单元的集合体来考虑。在应用有限元法分析问题时，首先采用“化整为零”的办法，将连续体分解为有限个性态比较简单的“单元”，对这些单元分别进行分析；然后采用“积零为整”的办法，将各单元重新组合为原来的连续体的简化了的“模型”，通过求解这个模型得到问题的基本未知量（例如位移）在若干离散点上的数值解；最后，根据得到的数值解再回到各个单元中计算其他物理量（例如应变、应力）。

对金属弹塑性和刚塑性变形用有限元法进行分析的实施步骤可归纳如下：

- 1) 用假想的线或面将连续体分成若干“有限单元”，这些单元具有简单的几何形状。
- 2) 假设这些单元在且仅在其边界上的若干个离散节点处互相连接。将这些节点的位移（或速度）作为问题的基本未知量。
- 3) 选择适当的插值函数，以便由每个“有限单元”的节点位移（或速度）唯一地确定该单元中的位移（或速度）分布。
- 4) 利用位移（或速度）函数对坐标的偏导数可根据节点位移（或速度）唯一地确定一个单元中的应变（或应变速率）分布。由单元的应变（或应变速率）以及材料的本构关系，可确定单元的应力分布。
- 5) 根据虚功原理可建立每个单元中节点位移（或速度）和节点力之间的关系，即单元刚度方程。
- 6) 将每个单元所受的外载荷根据作用力等效的原则移置到该单元的节点上，形成等效节点力。
- 7) 按照各节点整体编号及节点自由度的顺序，将各单元的刚度方程迭加，组装成问题的整体刚度方程。
- 8) 根据边界节点必须满足的位移（或速度）条件，修改整体刚度方程。
- 9) 求解整体刚度方程，得到节点位移（或速度）。
- 10) 根据求得的节点位移（或速度）计算各单元的应变（或应变速率）和应力。

在金属成形过程中，工件发生很大的塑性变形，在位移与应变的关系中存在几何非线性，在材料的本构关系（应力-应变关系）中存在材料非线性，即物理非线性。不仅如此，

成形所用模具型面的几何形状往往比较复杂，工件与模具的接触状态不断改变，摩擦规律也难以准确地描述。由于以上种种原因，金属塑性成形问题难于求得精确解。有限元法是目前进行非线性分析的最强有力的工具，因此也成为金属塑性成形过程模拟的最流行的方法。

在塑性成形过程的有限元模拟中，根据材料应变与位移以及应变与应力之间的关系的不同可将有限元法分为小变形弹塑性有限元法，有限应变弹塑性有限元法、刚塑性有限元法和黏塑性有限元法。

1967年，Marcal和King首先提出了弹塑性有限元法。1968年，Yamada等推导了塑性应力-应变矩阵。1970年，Hibbit等提出了建立在有限变形理论基础上的大变形有限元列式。70年代中期，Osias、McMeeking等采用欧拉描述法建立了大变形有限元列式。此后大变形弹塑性有限元法不断完善。采用弹塑性有限元法分析金属成形问题，不仅能计算工件的变形和应力、应变分布，而且还能有效地处理卸载问题，计算金属成形过程结束后工件的回弹和残余应力、残余应变的分布。因此，它适宜于板料成形等问题的模拟。但是，弹塑性有限元法采用的增量型本构关系不允许使用大的变形增量，总的计算时间较长。

在大变形的金属成形问题中，有时可以忽略其中的弹性变形，而采用刚塑性材料模型。1971年德国的Lung，1973年美国的Lee和Kobayashi分别提出了刚塑性有限元法。采用刚塑性有限元法，由于不需考虑材料弹塑性状态的变化，所以可采用比弹塑性有限元法大的增量步长，从而减少计算时间。但刚塑性有限元法不能确定刚性区的应力、应变分布，也不能处理卸载问题。在锻造等体积成形问题中，金属材料的塑性变形量很大；由于温度的影响，材料的弹性参数难以确定；同时回弹的影响不大。因此，用刚塑性有限元法模拟体积成形过程是比较适宜的。为了考虑变形速率对金属塑性流动和变形抗力的影响，可采用由刚塑性有限元法扩展而得的刚黏塑性有限元法。

在金属塑性成形过程的有限元模拟方面，各国学者已做了大量的研究工作。80年代末期以来，金属塑性成形过程的计算机模拟技术逐渐成熟并进入实用阶段。在一些工业发达国家，它已经成为检验模具设计的有效手段。展望未来，作为力学、材料科学和计算机应用跨学科领域的塑性成形模拟技术将获得新的发展。更精确的材料本构模型将得到应用，从而使人们更深入地洞察各种材料在塑性成形过程中发生的变形、微观组织的变化、材料破坏机理等。计算机技术和计算方法的发展，将使得模拟所需时间大大缩短。塑性成形过程模拟与塑性成形工艺及模具计算机辅助设计（CAD）技术的集成，它与可视化技术和人工智能的结合，将形成一种方便高效的智能化设计和研究手段，它不仅能用于检验和优化设计，也可用于探索新的塑性成形工艺和材料。

第二节 金属塑性成形过程模拟课程的目的和任务

科学技术飞速发展的今天，使得“模拟技术”一词已广为人们所熟识，模拟技术已有效地应用于相当广阔的领域。模拟技术在金属塑性加工的理论研究和生产实际中已显示其作用，金属塑性成形过程模拟正成为对塑性成形进行科学预测、工艺优化和定量控制的有效方法，在塑性加工领域获得愈来愈广泛的应用。成形模拟的商品软件已在生产实际中应用；模拟技术也是塑性加工虚拟制造系统中的一项重要技术。掌握模拟技术已经成为从事塑性成形和模具设计的技术人员所需具备的一项基本技能。本课程的目的是使学生掌握必要的金属塑

性成形过程模拟基本原理，为应用实用程序或商品软件和进一步的研究及开发新程序打下基础。通过课程学习，应掌握金属塑性成形理论的基本概念，一种或多种塑性成形过程数值模拟的理论和基本公式、模拟程序的设计和应用方法，了解常用的物理模拟方法。学习本课程需具备的基础知识是高等数学、线性代数、理论力学、金属塑性成形原理和有限元法基础方面的知识。本课程的任务是：

1) 简明阐述金属塑性变形力学基础。其中包括有限变形理论和塑性成形动力分析方法的基本概念。

2) 阐述金属塑性成形的上限元模拟基本理论和实施方法。

3) 阐述金属塑性成形的刚塑性和刚黏塑性有限元模拟基本理论和实施方法。

4) 阐述金属塑性成形的弹塑性有限元模拟基本理论和实施方法。

5) 阐述金属塑性成形过程的物理模拟常用方法的基本理论及实施方法。

课程教学应是通过适量知识的教学，培养学生学习和运用金属塑性成形过程模拟的能力，研究分析问题和解决问题的能力 and 创造能力。从教学角度考虑，本书内容的编排为上限元模拟，刚塑性和刚黏塑性有限元模拟，弹塑性有限元模拟和物理模拟，各部分内容具有相对独立性，课程教学内容的选取可有一定灵活性，因此有利于根据具体情况和教学时数，选取所需课程教学内容。

参 考 文 献

- 1 Owen D R J et al.. Advanced Computational Strategy for 3-D Large Scale Metal Forming. Simulation of Materials Processing: Theory, Method and Applications, Shen & Dawson (eds). Rotterdam: Balkema, 1995
- 2 杜忠友, 孙胜, 关庭栋. 上限单元法的发展与展望. 力学与实践, 1994, 16 (4): 6~10
- 3 [英] 监凯维奇 OC 著. 有限元法. 尹泽勇, 江伯南译. 北京: 科学出版社, 1985
- 4 肖景容, 李尚健主编. 塑性成形模拟理论. 武汉: 华中理工大学出版社, 1994

第二章 金属塑性变形力学基础

第一节 应 变

一、物体构形和运动的描述

我们把物体中所有物质点瞬时位置的集合——某一瞬时物体在空间占据的区域 V 定义为该物体的构形。为了描述物体的运动和变形，需要选择某一特定时刻的构形作为参考构形，以确定每一时刻每一质点的位置。如果已知 t 时刻以前所有时刻的构形的力学特性，而要研究的是 t 时刻现时构形的变形问题，那么可以把初始构形 V_0 或 t 时刻以前的任一时刻的构形作为参考构形。

物质点的位置，可以用质点在坐标系中的位置坐标表示。本章采用笛卡尔直角坐标系作为参考坐标系。在三维坐标参考系中（见图 2-1），设在 $t = t_0 = 0$ 时刻物体任一质点 a 的位置坐标为 X_i ($i = 1, 2, 3$)，此时的构形为初始构形，记为 V_0 。此后某一时刻 t ，物体运动到一个新位置，各质点间的相互位置关系发生了变化，物体产生了变形，质点 a 的位置坐标从 X_i 改变为 x_i ($i = 1, 2, 3$)。显然 x_i 是 X_i 和时间 t 的函数，即

$$x_i = x_i(X_1, X_2, X_3, t) \quad (2-1)$$

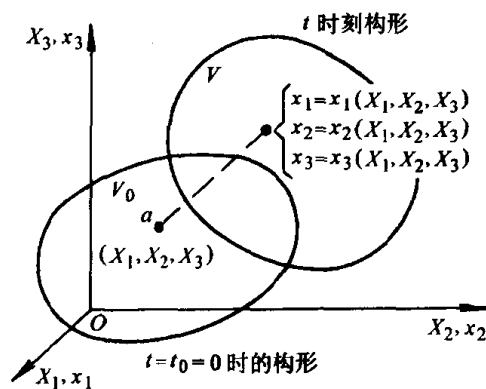


图 2-1 物体的构形

变形态构形或变形后构形记为 V 。

假设物体及其运动和变形都是连续的，则 V_0 中每一质点 X_i 仅与 V 中一个质点 x_i 对应，反之亦然。于是，可认为函数 $x_i(X_j, t)$ 是单值、连续和可微的，且雅可比 (Jacobi) 行列式不等于零，即

$$J = \left| \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (2-2)$$

也有

$$X_i = X_i(x_1, x_2, x_3, t) \quad (2-3)$$

$$j = \left| \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right| \neq 0 \quad (2-4)$$

$$j = J^{-1} \quad (2-5)$$

从数学上讲,式(2-1)和式(2-3)定义了以 t 为参数的初始构形与现时构形之间的互逆变换。从物理上看,式(2-1)和式(2-3)反映了物体质点与它在每瞬间所处空间位置的关系,质点 a 的初始坐标 X_i 与时间 t 无关,不同的初始坐标代表不同的质点,可把坐标 X_i 看作是识别物质点的“标志”,所以称 X_i 为物质坐标,物质坐标也称拉格朗日(Lagrange)变量或拉格朗日坐标;坐标 x_i 是识别空间质点的“标志”,同一空间点在不同时刻由不同的物质点所占据,所以 x_i 称为空间坐标,也称欧拉(Euler)变量或欧拉坐标。

在连续介质力学中,对物体质点的运动,可以有两种描述和研究方法。一种方法是把物体质点的运动和物体的各物理量看成是物质坐标 X_i 和时间 t 的函数,并研究这些函数的变化规律,这样的描述和研究方法称为拉格朗日方法。另一种方法是把物体质点的运动和物体的各物理量看成是空间坐标 x_i 和时间 t 的函数,并研究这些函数的变化规律,这样的描述和研究方法称为欧拉方法。

二、应变张量

变形有伸缩、剪切和弯曲等多种形态,物体变形的标志是物体中质点之间的距离发生了变化。物体刚性运动(刚体旋转和平移)不产生变形。因此可用质点间距离的变化来描述变形。

1. 格林应变张量和阿尔曼斯应变张量

如图2-2所示,以三维空间笛卡儿直角坐标系为参考坐标系来描述和分析。在初时刻两相邻的质点 $P(X_i)$ 和 $Q(X_i + dX_i)$,其间的距离为 dL_0 。

$$(dL_0)^2 = (dX_1)^2 + (dX_2)^2 + (dX_3)^2 = \delta_{ij} dX_i dX_j \quad (2-6)$$

在终时刻,此两质点到达新的位置 $P'(x_i)$ 和 $Q'(x_i + dx_i)$,其间的距离为 dL

$$(dL)^2 = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2 = \delta_{ij} dx_i dx_j \quad (2-7)$$

由于 $x_i = x_i(X_1, X_2, X_3)$ 和 $X_i = X_i(x_1, x_2, x_3)$,假设这些函数连续可微,有

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j, dX_i = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} dx_j \quad (2-8)$$

采用拉格朗日变量时,式(2-7)可写成

$$(dL)^2 = \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial X_i} \frac{\partial x_\beta}{\partial X_j} dX_i dX_j$$

由上式和式(2-6)得两点间距离(也就是连接两点的线元的长度)的平方的改变量为

$$(dL)^2 - (dL_0)^2 = (\delta_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial X_i} \frac{\partial x_\beta}{\partial X_j} - \delta_{ij}) dX_i dX_j \quad (2-9)$$

记

$$E_{ij} = \frac{1}{2} (\delta_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial X_i} \frac{\partial x_\beta}{\partial X_j} - \delta_{ij}) \quad (2-10)$$

则 $(dL)^2 - (dL_0)^2 = 2E_{ij} dX_i dX_j$,等式左边为标量, $dX_i dX_j$ 是二阶张量,由张量识别定

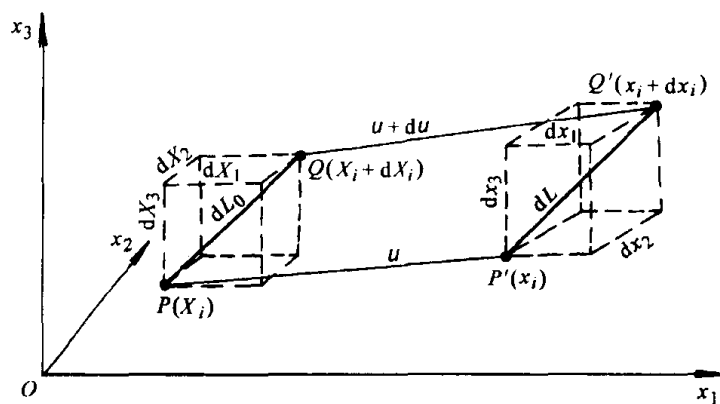


图 2-2 位移与变形

理知 E_{ij} 是二阶张量, 并且从式 (2-10) 看出 $E_{ji} = E_{ij}$, 即 E_{ij} 是二阶对称张量。格林 (Green) 和圣维南 (St. Venant) 首先采用式 (2-10) 表达的 E_{ij} 作为有限变形的度量。一般称 E_{ij} 为格林应变张量。

采用欧拉变量时, 式 (2-6) 可写成

$$(dL_0)^2 = \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial X_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial X_\beta}{\partial x_j} dx_i dx_j$$

由此式和式 (2-7) 得两点间距离的平方的改变量为

$$(dL)^2 - (dL_0)^2 = \left(\delta_{ij} - \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial X_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial X_\beta}{\partial x_j} \right) dx_i dx_j \quad (2-11)$$

记

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\delta_{ij} - \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial X_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial X_\beta}{\partial x_j} \right) \quad (2-12)$$

同理可知 e_{ij} 是二阶对称张量, 即 $e_{ji} = e_{ij}$ 。应变张量 e_{ij} 是阿尔曼斯 (Almansi) 和哈默尔 (Hamel) 在有限应变分析中引入的, 称为阿尔曼斯应变张量。

2. 格林应变张量与阿尔曼斯应变张量的关系

由式 (2-12) 可得

$$\delta_{\alpha\beta} = 2e_{\alpha\beta} + \delta_{mn} \frac{\partial X_m}{\partial x_\alpha} \frac{\partial X_n}{\partial x_\beta}$$

将此关系代入式 (2-10), 有

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(2 \frac{\partial x_\alpha}{\partial X_i} \frac{\partial x_\beta}{\partial X_j} e_{\alpha\beta} + \delta_{mn} \frac{\partial X_m}{\partial x_\alpha} \frac{\partial X_n}{\partial x_\beta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial X_i} \frac{\partial x_\beta}{\partial X_j} - \delta_{ij} \right)$$

从而可得到

$$E_{ij} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial X_i} \frac{\partial x_\beta}{\partial X_j} e_{\alpha\beta} \quad (2-13)$$

同理可得

$$e_{ij} = \frac{\partial X_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial X_\beta}{\partial x_j} E_{\alpha\beta} \quad (2-14)$$

上述两式表达了 e_{ij} 与 E_{ij} 的相互变换关系。

3. 应变与位移的关系

在变形分析中, 有时采用位移为变量来分析是方便的。记初时刻位置坐标为 X_i 的质点在终时刻的位置坐标为 x_i , 则其位移分量 u_i 为

$$u_i = x_i - X_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2-15)$$

有

$$\frac{\partial x_\alpha}{\partial X_i} = \frac{\partial u_\alpha}{\partial X_i} + \delta_{\alpha i}, \quad \frac{\partial X_\alpha}{\partial x_i} = \delta_{\alpha i} - \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i}$$

代入式 (2-10) 和式 (2-12), 得

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left[\delta_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial X_i} + \delta_{\alpha i} \right) \left(\frac{\partial u_\beta}{\partial X_j} + \delta_{\beta j} \right) - \delta_{ij} \right]$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left[\delta_{ij} - \delta_{\alpha\beta} \left(\delta_{\alpha i} - \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} \right) \left(\delta_{\beta j} - \frac{\partial u_\beta}{\partial x_j} \right) \right]$$

从而得到应变与位移的关系式

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right) \quad (2-16)$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \quad (2-17)$$

顺便指出, 从式 (2-16) 和式 (2-17) 可知, 它们分别有六个独立的方程, 六个独立的应变分量只联系着三个位移分量, 因此, 当应变给定后, 求解位移分量, 应变分量必须满足相容性条件 (也称协调方程), 所求得的位移才是连续的。如果用位移法求解, 即由位移求应变, 相容性条件自然满足。

4. 格林应变和阿尔曼斯应变的几何意义

从下面的分析, 可以比较简单直观地了解格林应变和阿尔曼斯应变的几何意义。

(1) E_{11} 、 E_{22} 、 E_{33} 和 e_{11} 、 e_{22} 、 e_{33} 与线元伸长度的关系

1) 应变分量 E_{11} 、 E_{22} 、 E_{33} :

若初始态构形 V_0 中微小线元 dL_0 的分量为

$$dX_1 = dL_0, dX_2 = dX_3 = 0$$

dL_0 为线元初始态的长度, 其终态长度为 dL 。定义线元的伸长度为

$$E_1 = \frac{dL - dL_0}{dL_0} = \frac{dL - dX_1}{dX_1}$$

则有

$$dL = (1 + E_1)dX_1 \quad (a)$$

按照格林应变张量的定义, 此时有

$$(dL)^2 - (dL_0)^2 = 2E_{11}(dX_1)^2$$

所以

$$dL = \sqrt{1 + 2E_{11}}dX_1 \quad (b)$$

于是, 由式 (a) 和式 (b), 便得到变形前平行于第一坐标轴的线元的应变分量 E_{11} 与伸长度 E_1 之间的关系式

$$E_1 = \sqrt{1 + 2E_{11}} - 1 \quad (2-18)$$

同理可知变形前平行于第二坐标轴的线元的应变分量 E_{22} 与其伸长度 E_2 的关系, 以及变形前平行于第三坐标轴的线元的应变分量 E_{33} 与其伸长度 E_3 的关系分别是

$$E_2 = \sqrt{1 + 2E_{22}} - 1 \quad (2-19)$$

$$E_3 = \sqrt{1 + 2E_{33}} - 1 \quad (2-20)$$

2) 应变分量 e_{11} 、 e_{22} 、 e_{33} :

仿照关于 E_{11} 、 E_{22} 、 E_{33} 的讨论, 对初始长度为 dL_0 、变形后的长度为 dL 的线元, 选取参考坐标系使其第一坐标轴平行于变形后的线元 dL , 即 $dx_1 = dL$, 定义此线元的伸长度为 $e_1 = (dL - dL_0) / dL = (dx_1 - dL_0) / dx_1$, 仿照上述步骤, 可得到

$$e_1 = 1 - \sqrt{1 - 2e_{11}} \quad (2-21)$$

同理可知

$$e_2 = 1 - \sqrt{1 - 2e_{22}} \quad (2-22)$$

$$e_3 = 1 - \sqrt{1 - 2e_{33}} \quad (2-23)$$

(2) E_{12} 、 E_{23} 、 E_{31} 和 e_{12} 、 e_{23} 、 e_{31} 与线元角度变化的关系

1) 应变分量 E_{12} 、 E_{23} 、 E_{31} :

设在初始构形 V_0 中有两正交线元 dL_0 和 dL'_0

$$dL_0 \text{ 为 } dX_1 = dL_0, dX_2 = dX_3 = 0 \quad (c)$$

$$dL'_0 \text{ 为 } dX'_1 = 0, dX'_2 = dL'_0, dX'_3 = 0 \quad (d)$$

变形后, 在变形态构形 V 中此两线元分别变为 dL (dx_i) 和 dL' (dx'_i), 其夹角为 α_3 。有

$$\begin{aligned} dx \cdot dx' &= dL dL' \cos \alpha_3 = dx_k dx'_k = \frac{\partial x_k}{\partial X_1} dX_1 \frac{\partial x_k}{\partial X'_2} dX'_2 = \\ &= \frac{\partial x_k}{\partial X_1} \frac{\partial x_k}{\partial X'_2} dL_0 dL'_0 \end{aligned} \quad (e)$$

由式 (2-10) 和式 (e) 可得

$$dL dL' \cos \alpha_3 = 2E_{12} dL_0 dL'_0 \quad (f)$$

由式 (b) 知 $dL = \sqrt{1 + 2E_{11}} dL_0$ 和 $dL' = \sqrt{1 + 2E_{22}} dL'_0$, 代入式 (f) 可得

$$\cos \alpha_3 = \frac{2E_{12}}{\sqrt{1 + 2E_{11}} \sqrt{1 + 2E_{22}}} \quad (g)$$

若把角度变化定义为

$$\Gamma_{12} = \frac{\pi}{2} - \alpha_3 \quad (h)$$

便得应变分量 E_{12} 与角度变化 Γ_{12} 之间的关系, 即

$$\sin \Gamma_{12} = \frac{2E_{12}}{\sqrt{1 + 2E_{11}} \sqrt{1 + 2E_{22}}} \quad (2-24)$$

同理,

$$\sin \Gamma_{23} = \frac{2E_{23}}{\sqrt{1 + 2E_{22}} \sqrt{1 + 2E_{33}}} \quad (2-25)$$

$$\sin \Gamma_{31} = \frac{2E_{31}}{\sqrt{1 + 2E_{33}} \sqrt{1 + 2E_{11}}} \quad (2-26)$$

其中, $\Gamma_{23} = \frac{\pi}{2} - \alpha_1$, $\Gamma_{31} = \frac{\pi}{2} - \alpha_2$ 。

2) 应变分量 e_{12} 、 e_{23} 、 e_{31} :

仿照关于 E_{12} 、 E_{23} 、 E_{31} 的讨论, 若假设在变形态构形 V 中相互正交的线元 dx_2 与 dx_3 、 dx_3 与 dx_1 和 dx_1 与 dx_2 在初始态构形 V_0 中的夹角分别为 β_1 、 β_2 和 β_3 , 并把三对线元的角度变化分别定义为

$$\begin{cases} \gamma_{12} = \frac{\pi}{2} - \beta_3 \\ \gamma_{23} = \frac{\pi}{2} - \beta_1 \\ \gamma_{31} = \frac{\pi}{2} - \beta_2 \end{cases} \quad (i)$$

则同样可得到

$$\begin{cases} \sin \gamma_{12} = \frac{2e_{12}}{\sqrt{1-2e_{11}}\sqrt{1-2e_{22}}} \\ \sin \gamma_{23} = \frac{2e_{23}}{\sqrt{1-2e_{22}}\sqrt{1-2e_{33}}} \\ \sin \gamma_{31} = \frac{2e_{31}}{\sqrt{1-2e_{33}}\sqrt{1-2e_{11}}} \end{cases} \quad (2-27)$$

从上述分析知, E_{11} 、 E_{22} 、 E_{33} 和 e_{11} 、 e_{22} 、 e_{33} 与线元长度变化有直接的关系, E_{12} 、 E_{23} 、 E_{31} 和 e_{12} 、 e_{23} 、 e_{31} 与线元角度变化有直接的关系。

5. 变形梯度

一个连续介质体在 t 时刻其所有质点的集合给出了此物体此时此刻的位形, 即 $x_i = x_i(X_j, t)$ 给出 t 时刻连续介质体的位形。并有

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j \quad (t \text{ 固定}) \quad (2-28)$$

记

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad (2-29)$$

F_{ij} 称为变形梯度。由于 dx_i 和 dX_j 是向量, 故知 F_{ij} 是二阶张量, 称其为变形梯度张量。下面讨论通过变形梯度计算变形和变形梯度的分解。

把式 (2-28) 和式 (2-29) 代入式 (2-7) 有

$$\begin{aligned} (dL)^2 &= (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2 = dx_k dx_k = \\ &= (F_{ki} dX_i)(F_{kj} dX_j) = F_{ki} F_{kj} dX_i dX_j \end{aligned}$$

记

$$C_{ij} = F_{ki} F_{kj} = \frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} \quad (2-30)$$

有

$$(dL)^2 = C_{ij} dX_i dX_j$$

由上式和式 (2-6) 得

$$(dL)^2 - (dL_0)^2 = (C_{ij} - \delta_{ij}) dX_i dX_j = 2E_{ij} dX_i dX_j$$

知 C_{ij} 与 E_{ij} 的关系

$$C_{ij} - \delta_{ij} = 2E_{ij} \quad (2-31)$$

所以, C_{ij} 也表征物体的变形。 C_{ij} 称右柯西-格林变形张量。

采用实体记法, dx_i 记为 $d\mathbf{x}$, dX_i 记为 $d\mathbf{X}$, F_{ij} 记为 $\mathbf{F}$, C_{ij} 记为 $\mathbf{C}$, 即有