高等学校统编教材

捷联式惯性导航系统

张树侠　孙　静　编著

国防工业出版社

U666.12
Z34

361666

捷联式惯性导航系统

张树侠　孙　静　编著

哈尔滨船舶工程学院
中文藏书
图书馆

国防工业出版社

(京)新登字106号

内 容 简 介

捷联式惯性导航系统是在传统的稳定平台式惯性导航系统的基础上发展起来的一种新技术，是惯性技术的发展方向，已被广泛应用于国防及国民经济的许多领域。为适应更新教学内容和满足有关科技人员工作的需要，我们编著了本教材。内容包括：捷联式惯性导航系统的基本工作原理、捷联矩阵的即时修正、初始对准、冗余技术及系统误差分析与仿真。

本书可作为高等院校惯性技术专业的教材，也可供相关专业高年级学生、研究生及有关科技人员参阅。

DV10/23

捷联式惯性导航系统

张树侠 孙 静 编著

国防工业出版社出版发行

（北京市海淀区紫竹院南路23号）

（邮政编码 100044）

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

787×1092毫米 16开本 印张10¼ 234千字

1992年10月第一版 1992年10月第一次印刷印数：0001— 1800册

ISBN 7-118-00993-8/U·86 定价：2.70元

出 版 说 明

根据国务院国发〔1978〕23号文件批转试行的《关于高等学校教材编审出版若干问题的暂行规定》，中国船舶工业总公司承担了全国高等学校船舶类专业教材的编审、出版的组织工作。自1978年以来，完成了两轮教材的编审、出版任务，共出版船舶类专业教材116种，对解决教学急需，稳定教学秩序，提高教学质量起到了积极作用。

为了进一步做好这一工作，中国船舶工业总公司成立了“船舶工程”、“船舶动力”两个教材委员会和“船电自动化”、“惯性导航及仪器”、“水声电子工程”、“液压”四个教材小组。船舶类教材委员会（小组）是有关船舶类专业教材建设的研究、指导、规划和评审方面的业务指导机构，其任务是为做好高校船舶类教材的编审工作，并为提高教材质量而努力。

中国船舶工业总公司在总结前两轮教材编审出版工作的基础上，于1986年制订了《1986—1990年全国高等学校船舶类专业教材选题规划》。列入规划的教材、教学参考书等共166种。本规划在教材的种类和数量上有了很大增长，以适应多层次多规格办学形式的需要。在教材内容方面力求做到两个相适应：一是与教学改革相适应；二是与现代科学技术发展相适应。为此，教材编审除贯彻“打好基础，精选内容，逐步更新，利于教学”的原则以外，还注意了加强实践性教学环节，拓宽知识面，注重能力的培养，以适应社会主义现代化建设的需要。

这批教材由各有关院校推荐，同行专家评阅，教材委员会（小组）评议，完稿后又经主审人审阅，教材委员会（小组）复审。本规划所属教材分别由国防工业出版社、人民交通出版社以及各有关高等学校的出版社出版。

限于水平和经验，这批教材的编审出版工作还会有许多缺点和不足，希望使用教材的单位和广大师生积极提出宝贵意见，以便改进工作。

中国船舶工业总公司教材编审室

1988年3月

前　言

本书系根据1987年1月全国高校船舶类惯性导航及仪器专业统编教材会议通过的“捷联式惯性导航系统”教学大纲编写的，供高等院校惯性导航专业、仪器专业及相关专业使用。讲授约36～54学时。

捷联式惯性导航系统是把惯性敏感器（陀螺仪和加速度计）直接安装在运载体上（不再需要带有常平架的稳定平台），利用惯性敏感器、基准方向及最初的位置信息来确定运载体的方位、位置和速度的自主式船位推算导航系统。

捷联技术是近年来惯性技术的一个重要发展方向。惯性技术是利用惯性原理或者其他有关原理，自主地测量和控制物体角运动及线运动参数的工程技术。它是惯性导航、惯性制导、惯性测量和惯性敏感器技术的总称。核潜艇靠惯性导航能自主地（不依赖外界）、准确地提供舰位、航速及姿态信息，以保证行动的隐蔽性、航行的安全性和攻击的准确性。现代军用飞机不但靠机载惯性导航提供位置及姿态等导航信息，还用它与机上雷达及火炮系统交联，组成攻击系统，能准确地打击目标。惯性技术还广泛应用于鱼雷制导、火炮控制以及坦克炮塔、自行火炮、雷达天线及水声基阵、轰炸机尾炮塔等的稳定，并逐步推广到石油开发、大地测量、海洋调查、地质钻探和铁路等领域，因此惯性技术在国防现代化方面占有十分重要地位，在国民经济各领域中也日益显示它的巨大作用。

捷联式惯性导航技术是一门新兴的多学科的综合技术，我们在编写本教材过程中力求做到打好基础，精选内容，逐步更新，利于教学的要求，认真结合近几年来的科研与教学实践，比较全面、系统的把捷联式惯性导航的原理、初始对准、冗余技术及系统误差分析等有关内容介绍给读者。

本书共分六章，第一章介绍了惯性导航系统的基本工作原理；第二章、第三章分别讨论了捷联式惯性导航系统的机械编排及捷联矩阵的即时修正与算法误差；第四章至第六章分别讲述了捷联式惯性导航系统的初始对准、冗余技术、系统误差及数字仿真等内容。

本书第六章由孙静编写，其余各章均由张树侠编写。哈尔滨工业大学田自耘副教授负责主审，对书稿提出了许多宝贵的意见和建议；哈尔滨船舶工程学院罗超教授、黄德鸣教授在研究、决定本书编写大纲及内容方面提出了许多好的建议；本书在编写过程中还得到了中国船舶工业总公司教材编审室部分同志的指导和帮助，这里一并致谢。

由于我们水平有限，书中一定会有一些缺点与错误，诚恳地期望各方面读者给以批评指正。

编　著　者

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　录

第一章　惯性导航系统的基本工作原理 …… 1
§1.1　惯性导航系统的基本原理 …… 1
§1.2　常用坐标系以及垂线和纬度定义 …… 3
§1.3　惯性导航系统的基本方程 …… 6
§1.4　捷联式惯性导航系统的基本概念 …… 12
§1.5　舰船位置和姿态角的确定 …… 14
第二章　捷联式惯性导航系统机械编排 …… 19
§2.1　惯性坐标系的捷联式惯性导航系统 …… 19
§2.2　游动自由方位坐标系的捷联式惯性导航系统 …… 25
§2.3　自由方位坐标系的捷联式惯性导航系统 …… 36
§2.4　地理坐标系的捷联式惯性导航系统 …… 37
§2.5　用新型陀螺仪的捷联式惯性导航系统 …… 40
第三章　捷联矩阵的即时修正与算法误差 …… 48
§3.1　捷联矩阵算法的数学基础 …… 48
§3.2　捷联矩阵的即时修正算法 …… 59
§3.3　捷联矩阵的算法误差分析 …… 67
§3.4　捷联矩阵的最佳正交性分析 …… 75
§3.5　变换四元数的最佳归一化分析 …… 78
第四章　捷联式惯性导航系统的初始对准 …… 81
§4.1　惯性导航系统初始对准的一般要求和原理 …… 81
§4.2　捷联式惯性导航系统的粗对准技术 …… 88
§4.3　捷联式惯性导航系统的精对准技术 …… 92
§4.4　捷联式惯性导航系统初始对准的参数优化设计 …… 104
第五章　捷联式惯性导航系统的冗余技术 …… 107
§5.1　冗余技术的模型化 …… 107
§5.2　惯性敏感器冗余系统的最佳配置 …… 113
§5.3　冗余度的故障检测与隔离 …… 118
第六章　捷联式惯性导航系统的误差分析 …… 126
§6.1　系统误差的分类 …… 126
§6.2　捷联式惯性导航系统中的惯性敏感器误差 …… 126
§6.3　捷联式惯性导航系统的误差分析 …… 134
§6.4　捷联式惯性导航系统的尺寸效应 …… 154
参考文献 …… 158

第一章　惯性导航系统的基本工作原理

本章简要介绍惯性导航系统的基本工作原理，并将捷联式惯性导航系统和稳定平台式惯性导航系统进行对比，以便使读者在学习捷联式惯性导航系统之前就对它有一个初步的了解。

§1.1　惯性导航系统的基本原理

什么是惯性导航系统？

惯性导航系统是利用惯性敏感器、基准方向及最初的位置信息来确定运载体的方位、位置和速度的自主式航位推算导航系统，有时简称惯导。它至少应由一个惯性测量装置、一个数字计算机和一个控制显示装置及一个专用精密电源所组成。

惯性导航系统又可以分平台式惯性导航系统和捷联式惯性导航系统两大类，前者是将陀螺仪和加速度计安装在一个稳定平台上，以平台坐标系为基准测量运载体运动参数的惯性导航系统；后者是将惯性敏感器（陀螺和加速度计）直接安装在运载体上，不再需要稳定平台和常平架系统的惯性导航系统。它们的原理方块图分别如图 1-1-1 和图1-1-2所示。

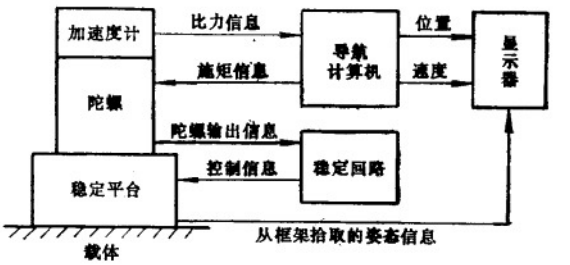

图1-1-1　平台式惯性导航系统原理方块图

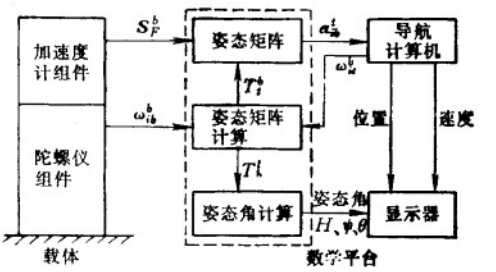

图1-1-2　捷联式惯性导航系统原理方块图

惯性测量装置可以是捷联式的，也可以是框架式的，但不管惯性测量装置的结构和程序编排怎么不同，其导航计算都可以认为是以实现相对选定的空间基准稳定为目标的。

我们可以将惯性测量装置看成是一个“黑箱”，它的输入量为来自外部环境的比力、角速率；输出量为位置、速度以及运载体相对当地地理坐标系的首向角和水平姿态角。

“捷联”(strapdown) 这一术语的英文原意就是“捆绑”的意思，因此所谓捷联系统就是将惯性测量装置的敏感器（陀螺仪与加速度计）直接捆绑在运载体上，从而可实现运动对象的自主导航目的。

“导航”已成为当今世界引人注目的问题，特别是舰船导航它直接关系到舰船航行的安全性和经济性，所以世界上发达的国家都努力开发导航技术的新领域。

惯性导航是一种自主式的导航方法。为了判断舰船与其目标的相对位置，惯性导航系统是通过精确测量载体的旋转运动角速率和直线运动加速度信息，然后送至数字计算机中依赖于数学积分技术进行计算，得出导航数据。它完全是依靠载体自身设备独立自主地进行导航，它与外界不发生任何光、声、磁、电的联系，从而实现了与外界条件隔绝的假想的“封闭”空间内实现精确导航，所以它具有隐蔽性好，工作不受气象条件和人为的外界干扰等一系列的优点。这些优点对于以军事目的而航行的各种舰船来讲，显得特别重要。惯性导航在舰船导航技术中占有突出的地位。近几年来，由于捷联技术在惯性导航系统中的应用为惯性导航系统在民用领域中的应用和发展开辟了更广阔的前景，例如广泛应用于地震、地籍、河流、油田的测量以及摄影、绘图和重力测量等方面。

惯性导航系统作为一个自主的空间基准保持系统，从原理上讲，各种类型的惯性导航系统都可以用几何学的观点来解释，它应由以下两个分系统所组成。

（1）指示当地地垂线方向的分系统。它是通过测定舰船所在地方的重力方向，再对重力偏差角进行修正，以获取大地参考椭球上该点的位置。

（2）保持惯性空间基准的分系统。它是通过指示地球自转轴的方向，来确定地心惯性坐标系。

有了地球自转轴方向和当地地垂线方向之间的几何关系，即可以确定舰船导航所需要的经纬度值。在惯性导航系统中，用加速度计测量当地地垂线的方向，用陀螺仪测量地球自转轴的方向。把所测到的这些参数连同事先给出的时间、引力场、初始位置和初始速度一起送入导航计算机，即可实时计算出载体相对所选择的导航参考坐标系的位置。所以说，两个惯性敏感器（陀螺仪和加速度计）是惯性导航系统中的核心部分。

从物理意义上来解释，惯性导航是一门信息科学，也可以说它是一个信息处理系统。根据牛顿惯性定律，当载体相对惯性空间以加速度$\boldsymbol{a}$运动时，可以用载体中的加速度计测出作用在单位质量上惯性力和引力的矢量和的大小，即比力的大小。

$$m\boldsymbol{S}_F = m\boldsymbol{a} - m\boldsymbol{g} \tag{1-1-1}$$

式中 $\boldsymbol{S}_F$——加速度计检测质量受到的比力；

m——感受加速度的检测质量；

$\boldsymbol{a}$——载体的运动加速度；

$\boldsymbol{g}$——地球的引力加速度。

式（1-1-1）表明，通过载体上加速度计测出比力后，在载体内部不必依赖外界信息而只是通过惯性元件即可测得载体相对惯性坐标系的加速度。当知道了载体的初始位置和初始速度后，只要对该加速度进行两次积分便可以分别先后获取该载体定位所需要的速度和位置信息。现以简单的平面导航为例来说明惯性导航系统的基本工作原理，见图1-1-3所示。

惯性导航系统的基本原理是很简单的，早在300多年前就提出来了，但是差不多经过了3个世纪才出现了实际应用的惯性导航系统，这里主要原因是因为具体实现上存在着许多技术难题，诸如，系统造价昂贵、设计复杂、制造困难以及维修使用人员难于培训，所以应用面较窄。若要推广应用，首先要降低造价并使用方便可靠。从图1-1-3可以看

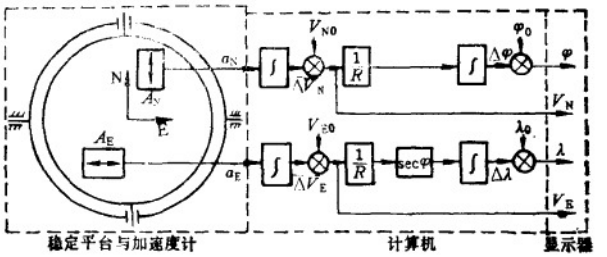

图1-1-3 惯性导航系统基本工作原理图

出，首先要建立一个进行比力测量的导航参考坐标系；其次应精确测量在所选取的导航坐标系中的比力分量，并在测得的比力分量中将惯性加速度分离出来；最后再把分离出来的惯性加速度实时进行两次积分。

以上分析只是说明惯性导航系统的工作原理。这里假设运载体仅作最简单的平面运动，它要求两个加速度计的输入轴应严格对准导航参考坐标系的两根轴。实际上，工程应用的惯性导航系统要比所述的原理复杂得多。

§1.2 常用坐标系以及垂线和纬度定义

人们都知道，讨论一个物体相对于另一个物体运动，确定其位置时必须具有与两个物体相固连的参考坐标系。在地球表面附近运动的载体不论是飞机、舰船，还是车辆，最重要的是要知道它们相对地球的地理位置和相对于地理坐标系的首向及水平姿态角，因此必须在运动物体上获得一个地理坐标系或一个惯性坐标系。陀螺仪最重要的功用之一就是用它在运载体上模拟地理坐标系或惯性坐标系。在惯性技术领域中常用的坐标系有以下几种。

一、各种坐标系的定义

1．地心惯性坐标系——$O_iX_iY_iZ_i$

我们把在空间静止或匀速直线运动的参考坐标系称为惯性参考坐标系；把坐标系原点取在地球地心 O_i 时的右手直角惯性坐标系称地心惯性坐标系（简记为 i 系）。

我们所居住的地球是一个椭球体，它除了绕太阳公转外还绕自转轴自转。地球的自转轴在惯性空间的方向变化十分缓慢，可以近似认为其自转轴的方向是不变的。以地心 O_i 为原点作右手坐标系 $O_iX_iY_iZ_i$，OZ_i 轴沿地轴指地球的北极，OX_i、OY_i 在地球赤道平面内与地轴 O_iZ_i 垂直并不随地球自转，因此 O_iZ_i、O_iX_i、O_iY_i 均指向惯性空间某一方向不变。我们可以近似地把坐标系 $O_iX_iY_iZ_i$ 看成一个惯性坐标系并称之为地心惯性坐标系，如图 1-2-1 所示。事实上，宇宙空间中的万物都处于运动之中，想要寻找绝对的惯性坐标系显然是不可能的，我们只能根据运载体导航的需要来选择惯性坐标系，对于在地球表面附近运动的舰船导航来讲，选取地心惯性坐标系是合适的。

2．地球坐标系——$O_eX_eY_eZ_e$

地球坐标系是原点位于地心，与地球固联，其中一轴与极轴重合的右手直角坐标系。它相对惯性坐标系以地球自转角速率 ω_{ie} 旋转，$\omega_{ie}=15.041088^\circ/\mathrm{h}$。地球坐标系中 OZ_i 与 O_eZ_e 重合，$O_eX_eY_eZ_e$ 在赤道平面内，O_eX_e 轴指向格林尼治经线，O_eY_e 轴指向东经 90° 方向，见图 1-2-1 所示。通常也有将 ω_{ie} 用大写字母 Ω 表示。

3．地理坐标系——$OX_tY_tZ_t$

地理坐标系是原点位于运载体所在的地球表面，其中一轴与地理垂线重合的右手直角坐标系。对于研究舰船导航来讲，地理坐标系的原点 O 选取在舰船重心处，OX_t 指东、OY_t 指北、OZ_t 沿垂线方向指天，通常称东北天坐标系。对于地理坐标系的坐标轴还有不同的取法，如北西天、北东地等。坐标轴指向不同仅仅影响某一矢量在坐标系中求取投影分量的正负号有所不同，而不影响研究舰船导航基本原理的阐述和导航参数计算结果的正确性。OZ_t 轴与赤道平面间的夹角 φ 即为当地纬度。地理坐标系是研究舰船导航的一个重要坐标系，如图 1-2-1 所示，通常简记为 t 系。由于地球的椭圆度为 1/297，而图 1-2-1 中近似地画为圆球。

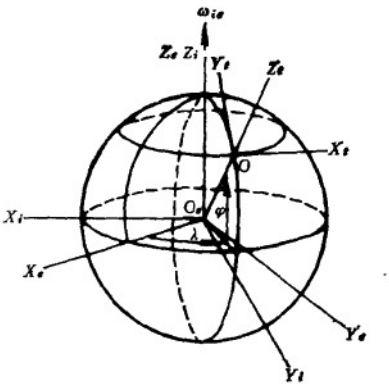

图1-2-1　坐标系示意图

4．动参考坐标系——$OX_mY_mZ_m$

动参考坐标系是原点随运载体运动，三个轴的指向分别平行于某个空间坐标系的各相应轴的坐标系。例如当把动参考坐标选取得与地理坐标系相重合时，可将这种导航坐标系构成的系统称为指北方位系统；若将 OZ_m 轴仍然选得与 OZ_t 重合，而使 OX_m 与 OX_t 及 OY_m 与 OY_t 之间相差一个自由方位角或游动方位角 α，那么这种动参考坐标系构成的系统称为自由方位系统或游动自由方位系统。

5．平台坐标系——$OX_pY_pZ_p$

与平台台体固连的右手直角坐标 $OX_pY_pZ_p$ 称为平台坐标系。在平台式惯性导航系统中，惯性敏感器(陀螺仪和加速度计)安装在与舰船角运动相隔离的平台上。对于平台式惯性导航系统，平台坐标系是通过平台台体来实现的；对于捷联式惯性导航系统，平台坐标系是通过存储在计算机中的方向余弦矩阵来实现的，因此又称为数学解析平台。在惯性导航系统中，平台坐标系是用来复现动参考坐标系。平台坐标系的坐标原点 O 位于舰船的重心处，当惯性导航系统不存在误差时，平台坐标系和动参考坐标系相重合；当惯性导航系统出现误差时，平台坐标系就会相对动参考坐标系出现误差角。对于平台式惯性导航系统来讲，其误差角是由于平台台体的加工、装配工艺不完善，惯性敏感器误差以及初始对准误差等因素造成的。而对于捷联式惯性导航系统，二者的误差角则是由于算法误差、计算机舍入误差、惯性敏感器误差及初始对准误差等原因造成的。

6．舰船坐标系——$OX_bY_bZ_b$

舰船在航行中由于受风浪的影响，经常出现偏航和纵摇、横摆，为了确定舰船相对当地地理坐标系的角位置(通常称为首向及水平姿态)，就需要有与舰船固连的坐标系。舰船坐标系的原点是舰船重心 O，纵轴 OY_b 沿舰船首尾线方向并指向舰首，横轴 OX_b 指

向舰船的右舷，OZ_b 轴垂直于舰船的甲板平面，$OX_bY_bZ_b$ 坐标系构成右手直角坐标系。当舰船没有纵摇横摆时，X_bOY_b 平面即为水平面，OZ_b 轴沿铅垂线指天顶。舰船在航行时受风浪的作用将会在预定航向附近左右偏摆，这种偏摆称为偏航。我们把预定的航行方向称为航向。在水平面内，用北向基准线与航向线间的夹角表示航向，通常该夹角为航向角并以顺时针方向计量，以 K 表示航向角。舰船坐标系相对于当地地理坐标系所确定的状态可以用姿态角表示。舰船姿态角是舰船纵摇角、横摇角、首向角的统称。

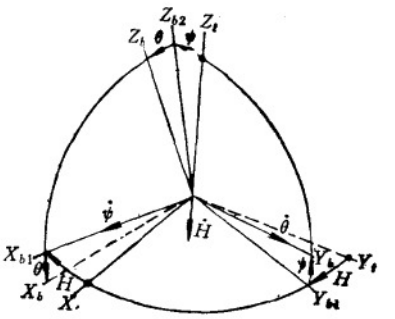

图1-2-2　姿态角坐标变换图

舰船纵轴轴向在水平面内投影方向称为首向，用北向基准线和首向方向之间的夹角 H 表示首向角，通常以顺时针方向计量，舰船纵轴与水平面之间的夹角 ψ 称为纵摇角；舰船横轴与水平面之间的夹角 θ 称为横摇角。当已知首向角 H、纵摇角 ψ、横摇角 θ 的大小时，则舰船相对当地地理坐标系的角位置完全可以确定，见图 1-2-2 所示。

二、垂线及纬度定义

在惯性导航系统中，应用地球表面某点的垂线和纬度是一个十分重要的概念。由于地球是一个不规则的球体，使得纬度和垂线的定义变得比较复杂，下面予以简要介绍。

地理纬度：地球子午圈上某点的法线与地球赤道平面的夹角。通常用作地图或航图上的纬度，又称测地纬度，如图 1-2-3 中 φ 所示。它是通过大地测量定出的纬度。

地心纬度：地球表面一点和地球几何中心的连线与地球赤道平面之间的锐角，如图 1-2-3 中 φ' 所示。

天文纬度：重力垂线和赤道平面的夹角，如图 1-2-3 中 φ_c 所示。它是通过天文方法测定的。

为了定义垂线，事先要给出大地水准面的概念。我们称由假想的、连续穿过所有陆地地块的平均海平面延伸部分所确定的地球形状为大地水准面。

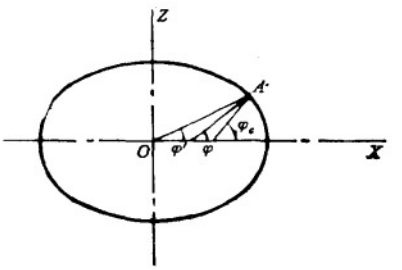

图1-2-3　各种纬度定义示意图

地理垂线：大地水准面法线的方向。

地心垂线：从地心通过观察者所在位置的径向矢量的方向。地心垂线又称几何垂线。

质量引力垂线：任一等势面的法线方向，用非旋转地球上的铅垂线方向来表示。

表观垂线：重力加速度和其他所有加速度合成矢量的方向，又称动态垂线。

当地垂线：观测者所在位置的垂线，可以是铅垂线，也可以是地理垂线或质量引力垂线。

上述几种纬度定义对于地球表面上某一点来讲实际上是不一样的，在一般工程技术

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

中应用地心纬度定义，但实际上是把地球视为圆球体。由于地球椭球体的表面和大地水准面也不完全吻合，因此天文纬度和测地纬度也不一致，但这二者的偏差很小，一般不超过 30 角秒通常可以忽略。在惯性导航系统中计算出来的结果是测地纬度而不是地心纬度。

§1.3 惯性导航系统的基本方程

一、舒勒（Schuler）原理

人们将引导运载体在其航线上运动的科学称为导航学；将引导运载体到达预定目的地的过程称为导航。为了确定航向，需要给出一导航基准。在地球表面附近运动的舰船导航基准有两个：一是以地理北极为方向称为真北；二是水平方向，它是与垂线或重力垂直的基准。

在地面上，处于静止状态的铅垂线能够准确地指示当地垂线的方向，但是在运动物体上，水平加速度将使单摆摆动而偏离当地垂线方向。图 1-3-1 表明了单摆在加速度运动中出现的偏差 α_b。加速度 a 越大，偏差角 α_b 也越大。

建立垂线基准的基本原理是假定从舰船沿非旋转球体的大圆航线运动时的这种简单情况开始。从图 1-3-1 中可以直观的看出，如果单摆相对惯性空间的角加速度 $\ddot{\alpha}_b$ 正好等于物体移动的垂线相对惯性空间的角加速度 $\ddot{\alpha}$，那末当起始条件为零并经两次积分，则有 α_b 等于 α，亦即在运动物体内在线加速度 a 的作用下，单摆的摆线始终跟踪地垂线方向。

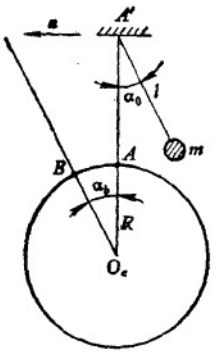

图1-3-1 在加速度作用下的单摆

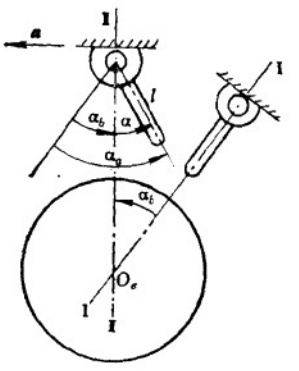

图1-3-2 加速度作用下的物理摆

用物理摆（即复摆）来分析舒勒原理更能切合实际。从图 1-3-2 看出，Ⅰ-Ⅰ垂线为舰船起始垂线，舰船未运动时，安装在舰船上的物理摆停在当地垂线方向上，在加速度 a 作用下，经过一段时间，舰船到达Ⅱ-Ⅱ位置。由于加速度作用，使摆的摆线偏开Ⅱ-Ⅱ垂线一角度 α，摆的摆线偏开初始位置Ⅰ-Ⅰ角度为 α_0，而位置Ⅰ和位置Ⅱ的地垂线变化角度值为 α_b，不难写出其物理摆运动方程式为：

$$J\ddot{\alpha}_0 = mal\cos\alpha - mgl\sin\alpha \qquad (1\text{-}3\text{-}1)$$

式中 J——摆绕支点转动的惯量；

m——摆的质量；

l——摆长，物理摆的重心到悬挂点的长度。

从图 1-3-2 看出：

$$\alpha_a=\alpha_b+\alpha \tag{1-3-2}$$

角加速度的关系为：

$$\ddot{\alpha}_a=\ddot{\alpha}_b+\ddot{\alpha} \tag{1-3-3}$$

其中

$$\ddot{\alpha}_b=a/R \tag{1-3-4}$$

这里的R为地球的半径。

若将式（1-3-3）和式（1-3-4）代入式（1-3-1），并认为α是小角度，则式(1-3-1)变为：

$$\ddot{\alpha}+\frac{mal}{J}\alpha=\left(\frac{ml}{J}-\frac{1}{R}\right)a \tag{1-3-5}$$

若适当选择物理摆参数，使得：

$$\frac{ml}{J}-\frac{1}{R}=0 \tag{1-3-6}$$

此时，物理摆的运动就与加速度a无关，即不再受到加速度a的干扰，式（1-3-6）也可以写成

$$\frac{ml}{J}=\frac{1}{R} \tag{1-3-7}$$

通常称式（1-3-7）为舒勒调谐条件。对于图 1-3-1 所示的单摆（即数学摆），由于$J=ml^2$，则舒勒调谐条件变为：

$$\frac{1}{l}=\frac{1}{R}\quad 或\quad l=R \tag{1-3-8}$$

即摆长等于地球的半径。

当满足舒勒调谐条件后，式（1-3-5）可写成

$$\ddot{\alpha}+\frac{g}{R}\alpha=0 \tag{1-3-9}$$

式（1-3-9）表示了一个无阻尼振荡运动。

令

$$\omega_s=\sqrt{\frac{g}{R}}$$

则

$$T_s=2\pi/\omega_s=2\pi\sqrt{R/g} \tag{1-3-10}$$

式中 ω_s——舒勒振荡角频率；

T_s——舒勒振荡周期。

当取地球半径$R=6371\text{km}$；$g=9.8\text{m/s}^2$，可得到α的振荡周期 $T_s=84.4\text{min}$。

当我们把物理摆的α角振荡周期通过有关结构参数的调整，使运载体有加速度时不

引起物理摆系统偏离已经对准的某一垂线，则称该物理摆为舒勒摆。如果将舒勒调谐的物理摆系统固定于一个不转动的地球平均表面上，则这时它将具有 84.4min 的固有振荡周期。

舒勒摆的物理意义在于：当由舰船线加速度 a 引起的地垂线变化的角加速度 $\ddot{\alpha}_b = a/R$ 恰好等于物理摆在线加速度 a 作用下绕其悬挂点运动的角加速度 mla/J 时，则物理摆对线加速度 a 不敏感。也就是说，若物理摆初始指向地垂线，则不论舰船怎样运动，物理摆的摆线始终指向地垂线；若物理摆初始偏离地垂线 α_0，则它就围绕地垂线以舒勒周期 $T = 84.4\text{min}$ 做不衰减的振荡。

将式（1-3-1）中 α 看成是小角度，则有

$$\ddot{\alpha}_e = \frac{ml}{J}a - \frac{ml}{J}g\alpha = \frac{ml}{J}(a - g\alpha) \tag{1-3-11}$$

由式（1-3-10）、式（1-3-2）、式（1-3-4）可以方便地画出物理摆控制方块如图 1-3-3 所示。

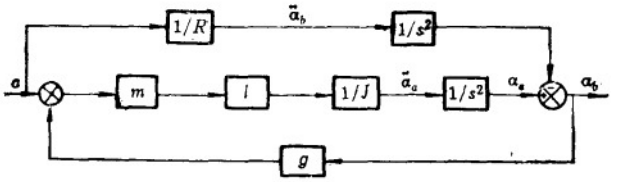

图1-3-3　物理摆控制方块图

若进一步简化可得简化方块图，如图 1-3-4 所示。

图1-3-4　物理摆的简化方块图

从图 1-3-4 中可以明显地看出，舒勒调谐条件的物理意义在于当物理摆满足舒勒调谐条件后即变成一个与加速度无关而只与初始条件有关的二阶自由振荡系统。

舒勒摆的原理及实现方法对于平台式惯性导航系统比较形象且直观；而对于捷联式惯性导航系统，由于陀螺仪和加速度计都是沿运载体坐标系轴向安装的，数学解析平台的作用要在导航计算机内实现，因此舒勒摆的原理也就全部隐含在导航计算机内的软件之中。

二、动矢量的导数

一个具有大小和方向的物理量称为矢量，例如加速度、角速度、角加速度、动量矩等。一个位置矢量也可以看成是一个径矢，而径矢对时间的导数称为速度。因此任何一个动矢量对时间的导数均应满足速度合成定理。

在图 1-3-5 中，设 $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM}$ 是某一径矢（r 也可以想象为 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{\omega}$、$\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{H}$ 等等），M 为动点，定参考坐标系为 $O_eX_iY_iZ_i$，动参考坐标系为 $OX_mY_mZ_m$，设动参考坐标系沿某一轴（例如 OZ_m）相对定参考坐标系有一旋转角速度 $\boldsymbol{\omega}$，动点 M 在定参考坐标系

中的径矢为 $\boldsymbol{R}$，动参考坐标系原点 O 在定参考坐标系 的径矢为 $\boldsymbol{R}_O$。由图 1-3-5 可知：

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}_O+\boldsymbol{r}$$

将它对时间求导数可得到：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}_O}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}+\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial t} \qquad (1\text{-}3\text{-}12)$$

为什么会这样呢？因为这是一个含有相对运动和牵连运动的复合运动问题。而牵连运动又包括 $\boldsymbol{R}_O$ 变化的平动和以 $\boldsymbol{\omega}$ 大小的转动两部分。现在我们来分析式（1-3-12）中每一项的物理意义。

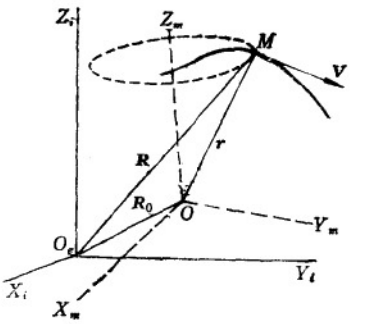

图1-3-5　动矢量示意图

$\mathrm{d}\boldsymbol{R}/\mathrm{d}t$：指动点 M 在定参考坐标系中的径矢 $\boldsymbol{R}$ 对时间的变化率，因此它是动点 M 的绝对速度。

$\partial\boldsymbol{r}/\partial t$：指动点 M 在动参考坐标系中的径矢 $\boldsymbol{r}$ 在动参考坐标中观察到的对时间的变化率，它是动点 M 的相对速度。

$\mathrm{d}\boldsymbol{R}_O/\mathrm{d}t$：指动参考坐标系原点 O 相对定参考坐标系的速度，即是动参考坐标系平动运动的牵连速度。

$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$：指动参考坐标系相对定参考坐标系转动时，动点 M 在动参考坐标上那一点位置的转动引起的牵连速度。

所以动点 M 的牵连速度为 $\mathrm{d}\boldsymbol{R}_O/\mathrm{d}t+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$。若动参考坐标系原点 O 和定参考坐标系原点 O_e 相重合，即 $\boldsymbol{R}_O$ 等于零，则式（1-3-12）可以简化为：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{R}/\mathrm{d}t=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}+\partial\boldsymbol{r}/\partial t \qquad (1\text{-}3\text{-}13)$$

根据以上分析可知，式（1-3-13）实际上是速度合成定理的另一种表示方法。这个式子比较抽象，但是科学的抽象能更深刻地反映自然界的规律，这个式子对于我们研究舰船在地球表面的运动和惯性导航系统基本方程都是一个有力的工具。

三、惯性导航系统的基本方程

当我们研究舰船在地球表面运动时，可把舰船看成刚体，为了研究导航的需要，选取一平台坐标系（简记 p 系），其原点取在舰船的重心处，设 $\boldsymbol{R}$ 为平台坐标系的原点在惯性坐标系内的径矢，如图 1-3-5 所示。

通常研究舰船运动的导航问题是要确定舰船相对地球的速度和位置。此时取惯性坐标系为地心惯性坐标系（简记为 i 系）、取地球坐标系作为动参考坐标系（简记为 e 系），这样地球坐标系 $O_eX_eY_eZ_e$ 相对地心惯性坐标系 $O_eX_iY_iZ_i$ 的牵连运动角速度为 $\omega_{ie}=\Omega=15.04088^\circ/\mathrm{h}$。若在 e 系上求径矢 $\boldsymbol{R}$ 的绝对速度，考虑到 i 系和 e 系原点重合，则式（1-3-12）可以改写为：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{R}/\mathrm{d}t|_i=\mathrm{d}\boldsymbol{R}/\mathrm{d}t|_e+\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{R} \qquad (1\text{-}3\text{-}14)$$

式中　$\mathrm{d}\boldsymbol{R}/\mathrm{d}t|_i$——$\boldsymbol{R}$ 在定系（i 系）的绝对速度；

$\mathrm{d}\boldsymbol{R}/\mathrm{d}t|_e$——$\boldsymbol{R}$ 在动系（e 系）的相对速度。

后者即为平台坐标系（p 系）坐标原点相对地球坐标系的速度矢量——即地速矢量 $\boldsymbol{V}_{ep}$，即

$$\mathrm{d}\boldsymbol{R}/\mathrm{d}t|_e=\boldsymbol{V}_{ep} \qquad (1\text{-}3\text{-}15)$$

将式（1-3-15）代入式（1-3-14）后再次求取绝对变化速率，则可得：

$$d^2\boldsymbol{R}/dt^2|_i = d\boldsymbol{V}_{ep}/dt|_i + d(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{R})/dt|_i \tag{1-3-16}$$

由于地球自转角速率可以近似地看为常量，则

$$d\boldsymbol{\Omega}/dt|_i = 0$$

这样，式（1-3-16）可以改写成：

$$d^2\boldsymbol{R}/dt^2|_i = d\boldsymbol{V}_{ep}/dt|_i + \boldsymbol{\Omega}\times d\boldsymbol{R}/dt|_i \tag{1-3-17}$$

将式（1-3-14）、式（1-3-15）代入式（1-3-17）后略加整理则有：

$$d^2\boldsymbol{R}/dt^2|_i = d\boldsymbol{V}_{ep}/dt|_i + \boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{V}_{ep}+\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{R})$$

$$= d\boldsymbol{V}_{ep}/dt|_i + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{V}_{ep} + \boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{R}) \tag{1-3-18}$$

对于式（1-3-18）中的 $d\boldsymbol{V}_{ep}/dt|_i$ 求导时，由于 $\boldsymbol{V}_{ep}$ 要在平台坐标系上取投影（即地速的各分量在平台坐标系上给出的），因此这次求取绝对速度时应把平台坐标系视为动参考坐标系，即有：

$$d^2\boldsymbol{R}_{ep}/dt^2 = d\boldsymbol{V}_{ep}/dt|_p + \boldsymbol{\omega}_{ip}\times\boldsymbol{V}_{ep} \tag{1-3-19}$$

式中

$$\boldsymbol{\omega}_{ip} = \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\omega}_{ep} = \boldsymbol{\omega}_{ie} + \boldsymbol{\omega}_{ep} \tag{1-3-20}$$

这里的 $\boldsymbol{\omega}_{ip}$ 表示平台坐标系相对地球坐标系的角速度，它决定于平台坐标系的选取，将式（1-3-19）、式（1-3-20）代入式（1-3-18），可得：

$$d^2\boldsymbol{R}/dt^2|_i = d\boldsymbol{V}_{ep}/dt|_p + (2\boldsymbol{\Omega}+\boldsymbol{\omega}_{ep})\times\boldsymbol{V}_{ep} + \boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{R}) \tag{1-3-21}$$

由于平台式惯性导航系统的实现和加速度计有着密切的联系，所以应研究加速度计运动方程与式(1-3-21)的关系。图 1-3-6 为表明安装在舰船中平台上的加速度计原理示意图。

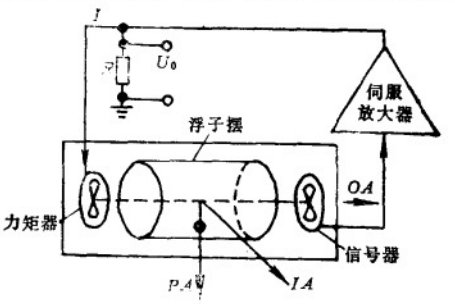

图1-3-6 加速度计原理示意图

加速度计中，把沿着或绕着输入轴的加速度转换为力或力矩的有效质量 m 称为检测质量，根据牛顿定律有：

$$\boldsymbol{F} = m\cdot d^2\boldsymbol{R}/dt^2|_i \tag{1-3-22}$$

式中 $\boldsymbol{F}$——作用于加速度计中检测质量块上的外力，

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_t + m\boldsymbol{g}_m \tag{1-3-23}$$

式中 $\boldsymbol{F}_t$——作用在质量块上的弹簧约束力；

$m\boldsymbol{g}_m$——作用在质量块上的万有引力。

将式（1-3-23）代入式（1-3-22）略作变化可得：

$$\left.\frac{d^2\boldsymbol{R}}{dt^2}\right|_i = \frac{\boldsymbol{F}_t}{m} + \boldsymbol{g}_m \tag{1-3-24}$$

式（1-3-24）中的 $d^2\boldsymbol{R}/dt^2|_i$ 为加速度计的检测质量块所承受的绝对加速度，也即舰船

或平台坐标系原点的绝对加速度；g_m为万有引力加速度；F_t/m为非引力加速度。令$S_F=F_t/m$，它表示单位检测质量块所承受的弹簧约束力。将S_F定义为比力，即表示作用在单位检测质量块上惯性力与引力的矢量和。S_F的大小与弹簧变形成正比，而加速度计的输出正是与加速度计的约束弹簧变形成正比，所以说惯性导航系统中的加速度计实际上检测的并非是运载体的加速度而是比力S_F的大小，这是惯性导航系统理论中最重要的基本概念之一。

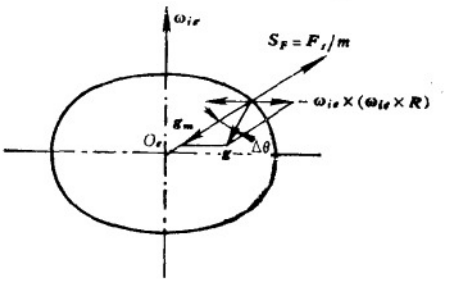

图1-3-7　重力加速度的物理意义

将式（1-3-24）代入式（1-3-19），得：

$$S_F+g_m=\mathrm{d}V_{ep}/\mathrm{d}t|_p+(2\Omega+\omega_{ep})\times V_{ep}+\Omega\times(\Omega\times R) \tag{1-3-25}$$

若令 $g=g_m-\Omega\times(\Omega\times R)$，并定义$g$为重力加速度，它表明由地球对其表面或其表面附近的物体施加的引力在地球表面引起的加速度，它的数值随着观察点的纬度和高度而变，国际上已公认北纬45°的海平面上的数值9.80665 m/s²为标准重力加速度。用图1-3-7进一步讨论一下重力加速度的物理意义，图中给出地球表面上的一个质点M，其质量为m。它悬挂在一根细线上，这时它受到了细线的拉力F_t，质点M还受到万有引力mg_m。这两个力的作用结果使质点M随地球以向心加速度$\Omega\times(\Omega\times R)$运动，即

$$F_t+mg_m=m\Omega\times(\Omega\times R)$$

令$g=F_t/m$，则有：

$$g=g_m-\Omega\times(\Omega\times R) \tag{1-3-26}$$

从图1-3-7和式（1-3-26）可以看出，重力加速度方向是与该质点所受到的约束力F_t相反方向。它还可以看成是地球引力加速度g_m与矢量$\Omega\times(\Omega\times R)$的合矢量，地垂线的方向正是沿$g$的方向，而水平面则与$g$垂直。从图1-3-7可明显看到，$g$与$g_m$之间有一个很小的夹角$\Delta\theta$，显然$\Delta\theta$的大小与地理纬度有关，当$\varphi=45°$时，$\Delta\theta$大约为10′。将式（1-3-26）代入式（1-3-25），则得：

$$\dot{V}_{ep}=S_F-(2\Omega+\omega_{ep})\times V_{ep}+g \tag{1-3-27}$$

式（1-3-27）就是矢量形式的惯性导航系统基本方程。方程中的各项物理意义如下：

V_{ep}——为进行导航计算需要获得的舰船相对地球的加速度矢量；

S_F——加速度计所量测到的比力矢量；

$(2\Omega+\omega_{ep})\times V_{ep}$——地球自转和舰船相对地球运动而产生的附加加速度。

由于附加加速度同样会被加速度计中的检测质量块所感受，为了计算$\dot{V}_{ep}$需要从S_F中扣除，所以该附加加速度又称为有害加速度。

当然惯性导航系统基本方程也可以写成沿平台坐标系的投影形式。平台系的取法不同，惯性导航系统基本方程沿平台坐标系的具体投影形式也不同。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com