

无线电波传播和电离层

第二卷

电磁波在地球附近的传播

[苏] Я. И. 阿尔别尔特 著

袁翊 译 沙踪 黄宏雄 审订

人民邮电出版社

73.11
335

无线电波传播和电离层

第二卷 电磁波在地球附近的传播

(苏联)Я.Л. 阿尔别尔特著

袁 翊 译

沙 踪 黄宏雄 审订

人民邮电出版社

1109656

内 容 简 介

本书讲述电离层的理论与实验研究结果,以及无线电波和自然界产生的电磁波沿地面、在地面波导中和在地球等离子体中的传播问题;讨论基本的物理研究方法;分析地面探测、火箭及人造卫星探测所获得的结果。可作与无线电波传播有关的物理学家、通信工程师和研究人员、大专院校无线电系教师参考。

无 线 电 波 传 播 和 电 离 层

第二卷 电磁波在地球附近的传播

[苏联] Н. Н. 阿尔别尔特 著

袁 翊 译

沙 踪 黄宏雄 审订

人 民 邮 电 出 版 社 出 版

北京东长安街27号

河北省邮电印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

各 地 新 华 书 店 经 售

开本: 787×1092 1/16

印张: 13 8/16 页数: 108

字数: 334 千字

1981年6月 第 一 版

1981年6月河北第一次印刷

印数: 1—3,500 册

统一书号: 15045·总2497—无6146

定价: 1.40 元

序 言

作为通信、导航、雷达以及各种科学实验目的（其中包括对近地等离子区——即电离层进行探测）的传输手段的无线电波和自然界产生的电磁波，覆盖从几赫甚至零点几赫到 $10^{10} \sim 10^{11}$ 赫或更高的频段，波长相当于厘米波和毫米波以至几乎接近光波。

在所有这些应用中，无线电波都是经过周围的媒质传输到一定的距离，这个距离在地球上从几十米到10000~20000公里。近年来，由于利用人造地球卫星和火箭进行研究，传播距离实际上已经达到几十万和几百万公里，更不要说无线电波从月球反射以及太阳和银河系等的无线电辐射性质的研究这些例子了。

只有在极少数的情况下才可以把无线电波的传输过程看作是自由空间传播。我们通常要碰到大量的各种不同的现象，它们使观测点的电磁场结构复杂化，这些现象是由各种不同的原因引起的，这些原因是：

1. 辐射源和观测点接近地面，以及地球曲率的影响；
2. 对流层对在地球表面传播的直接波的影响；
3. 地球和电离层之间的波导传播；
4. 电离层对电磁波的反射和散射；
5. 在上电离层，电波沿地球磁力线被导引，以及沿地球磁力线被拉长的不均匀体和其它因素的影响。

所有这些效应在不同频率上的表现，不仅在数量上不同，有时在性质上也是不同的。因此，在对所涉及的物理现象的本质以及各种不同的实际应用的讨论中，最好是分别针对不同频段的无线电波来进行。我们的意见是按下列的方式划分整个波长范围较为方便和恰当：

超长波（ $\lambda > 30$ 公里），

长波（ $\lambda = 2 \sim 30$ 公里），

中波（ $\lambda = 200 \sim 2000$ 米），

短波（ $\lambda = 10 \sim 200$ 米），

超短波（ $\lambda = 0.5 \sim 10$ 米），

微波（ $\lambda < 50$ 厘米，厘米波和毫米波）。

但是，一些现象，如地波的传播，或中波和短波从电离层的反射，不均匀体的散射等，在各个频率上就其实质而言是一样的。在不同频率上所观测到的区别可以说仅仅是“比例”的差别，这种区别仅与无量纲量（如 r_0/λ 、 σ/f 或电波透入反射媒质的深度）的变化有关，而与现象本身的实质变化无关。

这样，为了保持本书的总的倾向，我们认为对于电磁波在地球附近的传播，按照所研究的现象或“媒质”的性质所具有的共同的或一致的物理性质，而不是按照频率范围来划分章节是合适的。所援引的实验资料和理论结果按照这种方式排列将变得更有条理，而且我们相信也更有逻辑性。

在本书这一部分中所探讨的实验和理论结果，大部分现在都已经比较成熟，各个题目实际上已经达到其最后的形式，在将来也不可能有很大的变化。但是，还存在一系列没有充分

研究过的问题。在这些问题中有电离层不均匀体和地球磁场对低频波波导传播的影响，特别是对这些波从波导穿出以及它们在波导上边界过渡区域内的变换问题没有得到应有的重视。一般来说，电磁波沿地球磁场传播的模式以及它们在上电离层的散射是非常引人感兴趣的课题。这一物理分支的进一步发展必然要涉及对这些问题的研究。我们很抱歉的是不能花工夫对涉及超短波、毫米波以及接近光波的亚毫米波的许多重要题目进行讨论，因为这将超出本书的范围。

目 录

序 言

第六章 各种频率的波在光滑的和均匀的地面附近的传播	(1)
§ 29. 升高的 ($z \neq 0$) 辐射器的场的几何光学近似.....	(1)
29.1. 有效空间和有效反射区	(2)
29.2. 菲涅耳反射系数	(4)
29.3. 地球表面的电特性	(10)
§ 30. 干涉(反 射)公式.....	(11)
30.1. 垂直偶极子	(11)
30.2. 水平偶极子	(12)
30.3. 干涉公式的适用 范围(折算高度)	(14)
§ 31. 场振幅的严格计算	(15)
31.1. 辐射源和观测点位于地面上	(15)
31.2. 升高的辐射源 ($z \neq 0$)	(25)
§ 32. 地波的场相位结构和速度	(29)
32.1. 平地面	(29)
32.2. 球地面	(32)
32.3. 相速的测量	(33)
§ 33. 地面以下媒质中的场	(35)
第七章 波沿粗糙和不均匀地面的传播	(37)
§ 34. 某些实验结果	(38)
34.1. 中波	(38)
34.2. 超短波	(40)
34.3. 复杂地形结构对微波反射的影响	(43)
§ 35. 某些理论计算结果	(47)
35.1. 随机不均匀性和不平坦性	(47)
35.2. 分段均匀的路径	(48)
35.3. 缓慢斜坡	(54)
35.4. 海岸折射	(55)
第八章 对流层对沿地面传播的电波的影响	(57)
§ 36. 某些实验结果	(57)
36.1. 中波	(57)
36.2. 超短波	(58)
36.3. 微波场的变化	(61)
36.4. 微波的远距离和超远距离传播	(63)
§ 37. 对流层的折射	(68)

37.1. 正常折射	(68)
37.2. 超折射, 波导传播.....	(72)
§ 38. 对流层中的散射	(75)
38.1. 对流层的湍流	(77)
38.2. 水汽凝结体产生的散射	(78)
38.3. 分子散射	(89)
§ 39. 各种目标对无线电波的散射	(90)
39.1. 散射波的场	(90)
39.2. 目标的有效截面	(93)
第九章 地面和电离层之间的波导中的传播 (长波和甚长波)	(98)
§ 40. 场的理论计算	(99)
40.1. 具有均匀界面的球形波导和平面波导 (波导模法)	(99)
40.2. 在离辐射源近的距离上 (跳距法)	(105)
40.3. 不均匀的和各向异性的电离层	(107)
§ 41. 某些数值计算结果	(108)
41.1. 极点	(108)
41.2. 场的振幅	(109)
41.3. 附加相位和相速	(112)
41.4. 信号形状, 天电	(115)
§ 42. 某些实验结果	(119)
42.1. 长波场振幅与距离的关系	(119)
42.2. 相速	(123)
42.3. 长波的其他特性	(126)
42.4. 波导中甚低频波的截止	(128)
42.5. 极低频的谐振	(129)
第十章 地—电离层波导中的射线理论传播 (中波至超短波)	(131)
§ 43. 中波在夜间的传播	(131)
43.1. 场的时间起伏	(131)
43.2. 场振幅与距离的关系	(134)
§ 44. 中波在电离层内的相互作用和自干涉	(137)
§ 45. 短波的一些实验结果	(141)
45.1. 对距离和昼夜时间的依从关系	(141)
45.2. 场的昼夜变化和其它变化	(142)
45.3. 短波通信的扰动	(145)
§ 46. 短波在电离层内的折射	(147)
46.1. 斜向传播的相路径和群路径	(147)
46.2. 水平不均匀性的影响	(152)
46.3. 地球磁场的影响	(153)
§ 47. 短波的作用距离	(158)
47.1. 电波的轨迹, 最高可用频率, 跳距	(159)

47.2. 场振幅	(163)
§ 48. 环球回波信号	(164)
§ 49. 短波和超短波的非标准传播路径	(167)
§ 50. 超短波远距离电离层散射传播	(171)
第十一章 电磁波在上电离层和磁层内的传播	(174)
§ 51. 不同频率的电波沿地球磁力线的传播	(174)
§ 52. 波的截止和穿透电离层的传输	(179)
§ 53. 来自遥远辐射源的超短波 (高频和甚高频) 的折射	(183)
§ 54. 宇宙回波	(187)
后记	(189)
参考文献	(190)

第六章 各种频率的波在光滑的和 均匀的地面附近的传播

本章主要叙述无线电频段的电磁波在光滑的、电性能均匀的地面附近传播，不考虑对流层和电离层影响时的理论研究结果。根据波长的不同，这里将研究两种极限情况，一种是当辐射源和观测点离地面的高度与波长相比足够大时的情况，这时观测点同时接收直接波和地球表面的反射波，只是辐射和接收两点之间的某一空间区域和地球表面反射的某一有效区域有效地参与了这一过程。这种传播方式的理论非常简单，很早以前在光学中就已经完整地形成了。它主要适用于超短波和微波 (*Vvedenskii and Arenberg, 1938; Shchukin, 1940; Arenberg, 1957; Feinberg, 1961; Chernyi, 1962*)。另一种是当辐射源和观测点的高度很小（实际上等于零），因而电波“擦边”地沿地面而传播的情况。在很多情况下，参与这个过程的是辐射和接收两点之间的整个地面，并且，这种沿地球表面传播（电波绕射）的理论要复杂得多。这个理论主要是在无线电物理中为计算无线电频段上所有波长的场而详尽地研究过 (*van der Pol, 1931; Vvedenskii, 1935, 1936, 1937; van der Pol and Bremmer, 1937 a, b, 1938, 1939; Fok, 1946, 1948, 1949; Belkina, 1949; Bremmer, 1949; Azril-yant and Belkina, 1957*)。当然，由于忽略了对流层和电离层的影响，在上述两种极端情况下对各种不同频率的场的计算结果仅仅具有有限的实用性。

§ 29. 升高的 ($z \neq 0$) 辐射器的场的几何光学近似

如果把地面之上的观测点上的场看作是直接波和反射波迭加的结果，那么，这显然是应用了一般绕射问题的几何光学或射线理论近似。可以证明 (*Bremmer, 1949*)，如果观测点稍微高于视在地平线，而且，由升高的源辐射的反射波不与地面相切，那么，问题的严格解确实具有如下形式：

$$E = \frac{e^{-ikr_0}}{r_0} + \alpha \rho(\psi) \frac{e^{-ik(r_1+r_2)}}{r_1+r_2} \quad (29.1)$$

表示它是两个波的迭加（见图29.1）。而且在公式 (29.1) 中函数 $\rho(\psi)$ 表征地球的球形地面对球面波的反射系数，它既依赖于描述辐射源和观测点的相互位置的几何量，又依赖于地球的电特性，显然，还依赖于波长。系数 α 可以叫做波的扩散系数，它只依赖于几何量，而且是一个波束从球面上反射（与从平面上反射相比较）时的附加扩散的度量（图29.2）。

球面波从圆球上反射的反射系数具有相当复杂的形式，对于垂直极化波，它等于 (*Bremmer, 1949*)：

$$\rho(\psi) = \frac{-\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \ln \{ \sqrt{x} H_{k_0 R \cos \psi}^{(2)}(x) \}_{x=k_0 R_0}}{-\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \ln \{ \sqrt{x} H_{k_0 R \cos \psi}^{(1)}(x) \}_{x=k_0 R_0}} \dots \rightarrow$$

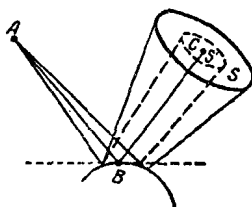
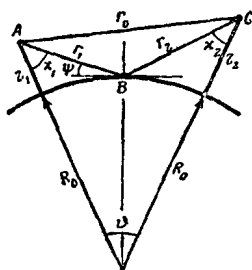


图 29.1 公式 (29.1) (29.2) 和 (29.5) 中各个量的定义

图 29.2 波的扩散系数的几何解释

$$\begin{aligned} & + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \ln \{ \sqrt{x} H_{kR \cos \psi}^{(2)}(x) \}_{x=kR_0} \\ \leftarrow \dots & \frac{+ \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \ln \{ \sqrt{x} H_{kR \cos \psi}^{(1)}(x) \}_{x=kR_0}}{(29.2)} \end{aligned}$$

式中, $H_{X \cos \psi}^{(1)}(x)$ 和 $H_{X \cos \psi}^{(2)}(x)$ 是以 x 为宗量的汉克尔函数;

$$k_0 = \frac{\omega}{c}; \quad k = k_0 \sqrt{\varepsilon - i \frac{4\pi\sigma}{\omega}}; \quad (29.3)$$

R_0 是地球半径。公式(29.2)对于水平极化波同样适用,只要在它里面用 $1/x$ 代替 x 。

但是，除接近于波切线投射的情况外，在满足关系式

$$k_0 R_0 \frac{\sin^3 \psi}{\cos^2 \psi} \gg 1 \quad (29.4)$$

的所有情况下, 函数(29.2)同平面波的非涅耳反射系数的公式近似地符合, 上述公式是式(29.2)在 $R_0 \rightarrow \infty$ 时的极限。因此, 当注意到条件(29.4)是相当宽松的时候, 可以把熟知的菲涅耳公式代到(29.1)中去。

至于扩散系数 α ，可以从几何方面将它理解为截面 S 和截面 S' 的比值的平方根，截面 S 是辐射体发出的无穷窄的射线束从球上反射以后在观测点形成的射束的截面，而截面 S' 则是当在反射点用切面代替球面后，在观测点形成的射束截面（见图 29.2）。我们看到，公式 (29.1) 中系数 α 的出现是由于波振幅的衰减正比于射束所交割的表面面积的平方根之故。相应的计算可以得出公式：

$$\alpha = \sqrt{\frac{S}{S'}} = \frac{R_0(r_1 + r_2)\sqrt{\sin\psi \cos\psi}}{\sqrt{(R_0 + z_1)(R_0 + z_2)\sin\vartheta(r_1(R_0 + z_2)\cos\chi_2 + r_2(R_0 + z_1)\cos\chi_1)}} \quad (29.5)$$

或者近似地

$$\alpha \approx \frac{(r_1 + r_2) \sqrt{\sin \psi \cos \psi}}{\sqrt{r_0(r_1 \cos \chi_1 + r_2 \cos \chi_2)}}. \quad (29.5a)$$

最后我们看到，在照射区内场的计算可以应用代入菲涅耳反射系数和修正系数(29.5)的公式(29.1)。

29.1. 有效空间和有效反射区

当直接波从辐射源发射到距离为 r_0 的接收点时（见图29.1），参与这个过程的只是被旋转椭圆体所限制的区域，它的最大截面由半径为

$$\rho_n = \frac{1}{2} \sqrt{n\lambda r_0} \quad (29.6)$$

($n = 1, 2, 3, \dots$) 的菲涅耳区所决定。这些椭圆体的焦点位于直线 r_0 的两端。严格的分析指出, 对于具有百分之几的精确度的场强计算来说, 只要保留 2~3 个, 有时甚至 1 个菲涅耳区就已足够。关系式

$$\frac{2\pi r_0}{\lambda} \gg 1 \quad (29.7)$$

满足得愈好, 则椭圆体就拉得愈长。对于非常短的波长, 椭圆体变得十分细, 因而产生光学中研究过的纯粹的射线传播。但是, 在超短波传播中, 例如当高度 z_1 和 z_2 比较小时, 有效空间椭圆体甚至可能触及地球表面。在这种情况下, 直接波的传输将变得更为复杂 (Feinberg, 1961)。

电波从地面的反射是涉及一个有效面积的另一个过程, 这个面积的大小基本上由第一菲涅耳区或者 2~3 个菲涅耳区所决定, 虽然这些菲涅耳区不是以“反射点”(图 29.3 上的 C 点) 为中心。不难指出, 第一菲涅耳区是由下述方程描述的椭圆:

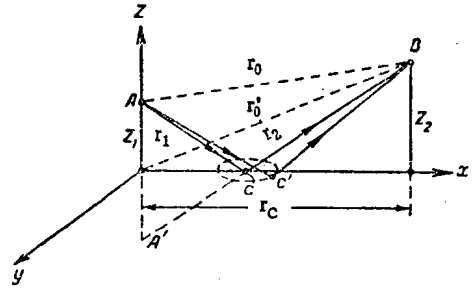


图 29.3 推导有效地面反射区的半径中出现的量

$$AC'B - ACB = \frac{\lambda}{2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z_1^2} + \sqrt{x^2 + (r_C - y)^2 + z_2^2} - (r_1 + r_2). \quad (29.8)$$

各个菲涅耳区的椭圆的半轴是与 x 轴重合的 (a 轴) 和与 x 轴方向垂直交叉的 (b 轴)。它们分别由下列二式给出:

$$2a_n = \frac{r + \frac{n\lambda}{2}}{n\lambda \left(r + \frac{n\lambda}{4} \right) + (z_1 + z_2)^2} \sqrt{n\lambda \left(r + \frac{n\lambda}{4} \right) \left[\lambda \left(r + \frac{n\lambda}{4} \right) + 4z_1 z_2 \right]}, \quad (29.9)$$

和

$$b_n = a_n \frac{\sqrt{\left(r + \frac{n\lambda}{2} \right)^2 - r^2 + (z_1 + z_2)^2}}{r + \frac{n\lambda}{2}}. \quad (29.10)$$

因为通常 $\lambda/2 \ll r$, 所以我们可以近似地将它们写为:

$$2a \approx \frac{r}{n\lambda r + (z_1 + z_2)^2} \sqrt{n\lambda r(n\lambda r + 4z_1 z_2)}, \quad (29.11)$$

$$b \approx a \sqrt{n\lambda r + (z_1 + z_2)^2}.$$

在方程式 (29.9)~(29.11) 中及在以后, $r = r_1 + r_2$ 表示入射波和反射波的传播距离之和, r_C 则表示辐射源与接收点之间的水平距离。

各个椭圆的中心位于 x 轴上, 离辐射源的距离为:

$$x_C = x_0 \left[1 + \frac{z_2 - z_1}{2z_1} \frac{n\lambda \left(r + \frac{n\lambda}{4} \right)}{n\lambda \left(r + \frac{n\lambda}{4} \right) + (z_1 + z_2)^2} \right], \quad (29.12)$$

如果辐射源的高度 z_1 大于接收点的高度 z_2 ，那么，椭圆的中心相对于反射点 C 将往辐射源方向移动；如果 $z_1 < z_2$ ，那么，将出现相反的移动。各个菲涅耳区的半径可近似地由下式给出：

$$a_n = \frac{1}{\sin \psi} \sqrt{n\lambda \frac{r'}{2}}, \quad b_n = a_n \sin \psi, \quad (29.13)$$

式中， r' 是距离 r_1 和 r_2 两者中之较大者，而 ψ 是“下滑角”（图29.1）。

在辐射源的高度比接收点的高度低得多的时候（ $z_1 \ll z_2$ ），椭圆的半轴将等于：

$$a_n \approx \frac{1}{\sin \psi} \sqrt{\frac{n\lambda z_1}{\sin \psi} \left(1 + \frac{n\lambda}{4z_1 \sin \psi}\right)}, \quad b_n = a_n \sin \psi, \quad (29.14)$$

而有效反射区的位置显然将靠近发射机。如果 $z_1 \gg z_2$ ，则：

$$a_n \approx \frac{1}{\sin \psi} \sqrt{\frac{n\lambda z_2}{\sin \psi} \left(1 + \frac{n\lambda}{1 + 4z_2 \sin \psi}\right)}, \quad b_n = a_n \sin \psi, \quad (29.15)$$

而有效反射区将靠近观测点。

对于 $z_1 = z_2 = z$ 的情况，

$$a_n = \frac{1}{\sin \psi} \sqrt{\frac{n\lambda}{2} \frac{z}{\sin \psi}}, \quad b_n = a_n \sin \psi, \quad (29.16)$$

因而，有效反射区将位于辐射源和观测点的中部。

如果辐射源和接收点两者的高度均很低，那么，人们基本上可以认为 $z_1 \approx z_2 \approx 0$ ；如果它们与波长差不多大小，或者稍大于波长 λ ，那么，参与电波传播的地面有效区将由焦点位于直线 r_c 的两端的椭圆所决定。它们的半轴等于：

$$a_n \approx \frac{|r_c|}{2} + n \frac{\lambda}{2}, \quad b_n \approx \frac{1}{2} \sqrt{n\lambda r_c}, \quad (29.17)$$

式中， $r_c = r$ 。

29.2. 菲涅耳反射系数

对于垂直极化波（电矢量位于入射平面中），菲涅耳反射系数等于：

$$\rho_{pe^{i\delta p}} = \frac{\left(\varepsilon - i \frac{4\pi\sigma}{\omega}\right) \sin \psi - \sqrt{\left(\varepsilon - i \frac{4\pi\sigma}{\omega}\right) - \cos^2 \psi}}{\left(\varepsilon - i \frac{4\pi\sigma}{\omega}\right) \sin \psi + \sqrt{\left(\varepsilon - i \frac{4\pi\sigma}{\omega}\right) - \cos^2 \psi}}, \quad (29.18)$$

而对于水平极化的电波（电矢量垂直于入射平面）：

$$\rho_{se^{i\delta s}} = \frac{\sin \psi - \sqrt{\left(\varepsilon - i \frac{4\pi\sigma}{\omega}\right) - \cos^2 \psi}}{\sin \psi + \sqrt{\left(\varepsilon - i \frac{4\pi\sigma}{\omega}\right) - \cos^2 \psi}}. \quad (29.19)$$

在图29.4~29.6上，针对各种选定的波长给出了陆地（ $\varepsilon=4$ ， $\sigma=9 \cdot 10^7$ ）和海面（ $\varepsilon=80$ ， $\sigma=3.6 \cdot 10^{10}$ ）的 ρ 和 δ 对角度 ψ 的依从关系曲线。实线是入射波为垂直极化的情况，而虚线是入射波为水平极化的情况。从图上可以看出，干燥陆地的性质在超短波时接近于介质（见图29.4上的 $\sigma=0$ ， $\varepsilon=4$ 的曲线）。而在海面上，电导率起很大的作用。对于水平极化波，在 ψ 的所有角度上 $\rho=1$ 和 $\delta=\pi$ ，而对于垂直极化波，则 $\rho=1$ 和 $\delta=0$ 只有当 ψ 角大于布儒斯特角的时候才成立。

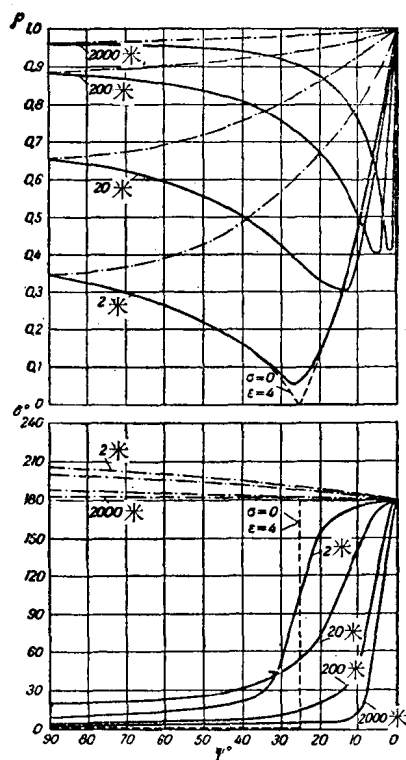


图 29.4 菲涅耳反射系数的模数和幅角 (实线是 ρ_P 和 δ_P , 虚线是 ρ_S 和 δ_S) 与角度 ψ 的关系 (陆地, $\epsilon = 4$, $\sigma = 9 \cdot 10^{-7}$)

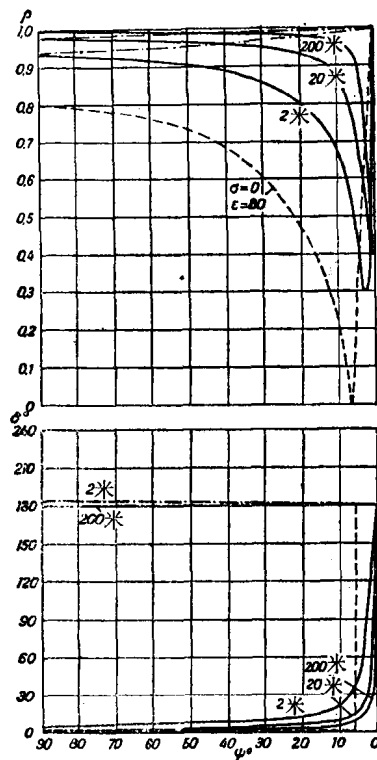


图 29.5 菲涅耳反射系数的模数和幅角 (实线是 ρ_P 和 δ_P , 虚线是 ρ_S 和 δ_S) 与角度 ψ 的关系 (海面, $\epsilon = 80$, $\sigma = 3.6 \cdot 10^{10}$)

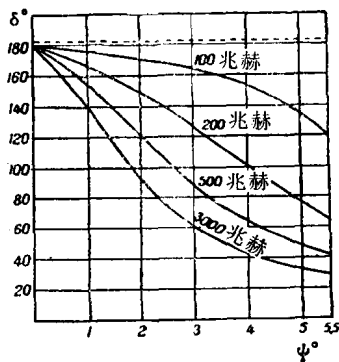
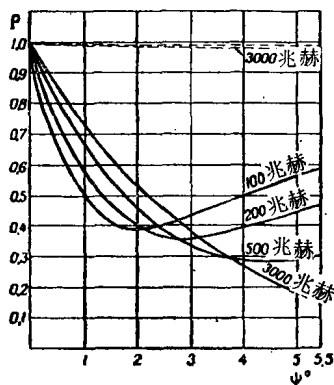


图 29.6 微波波段内几个选定频率上的海面的菲涅耳反射系数的模数和幅角 (实线表示垂直极化, 虚线表示水平极化) 对角度 ψ 的依从关系

为了确定指定的 ϵ 、 σ 和 λ 数值时的 ρ 和 δ , 可以应用公布于文献中的图 29.7 至 29.10 中的标准曲线。曲线是按选定的 $4\pi\sigma/\omega$ 值绘制的。实线是垂直极化入射波, 而虚线则是水平极化入射波。

这里给出的菲涅耳反射系数, 严格地讲只适用于均匀的和光滑的反射面的情况。在现实条件下, 这种情况很少存在, 因此, 可以预期, ρ 和 δ 的测量值与根据公式 (29.18) 和 (29.19)

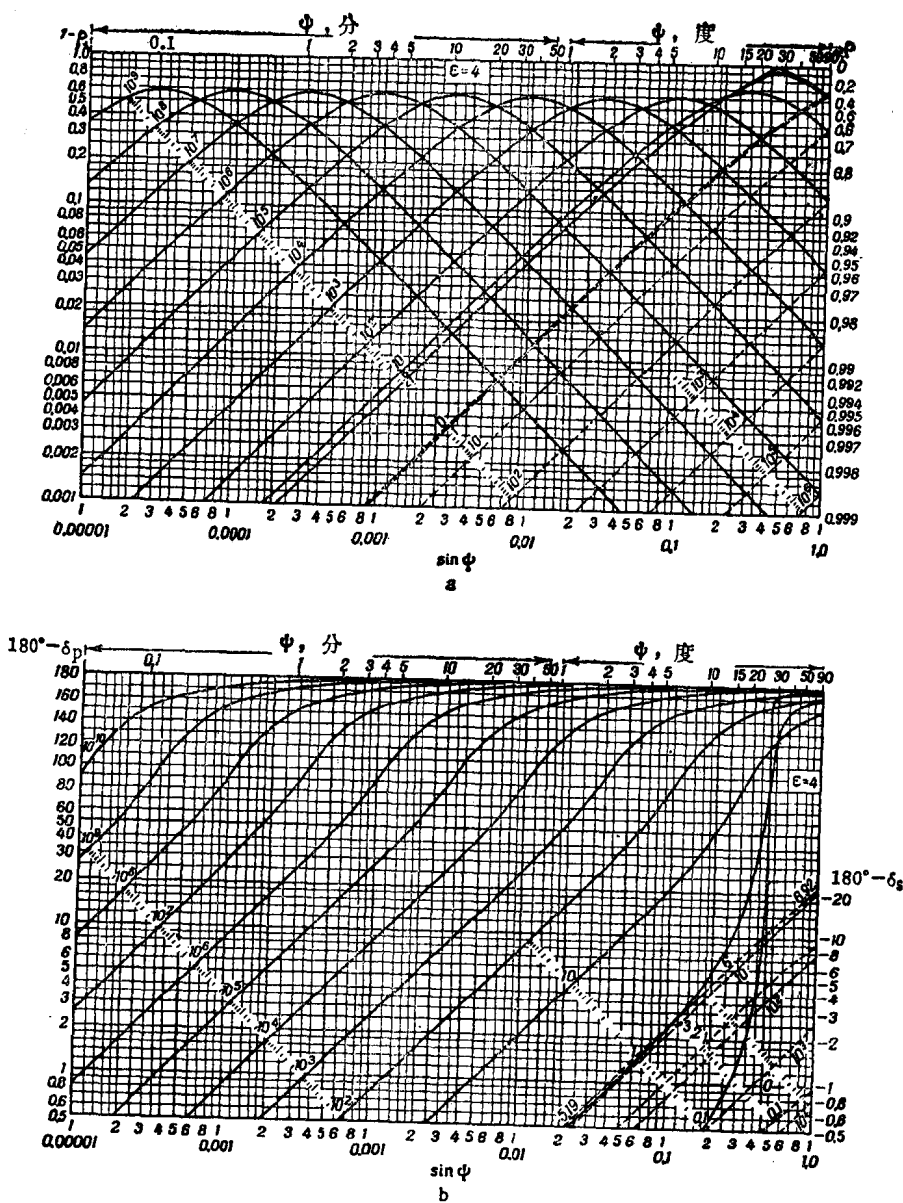


图 29.7 菲涅耳反射系数的模数和幅角在介电常数 $\epsilon = 4$ 的情况下与角度 ψ 的关系
 (实线表示垂直极化的 ρ_P 和 δ_P , 虚线表示水平极化的 ρ_S 和 δ_S)。
 各条曲线是针对 $4\pi\sigma/\omega$ 的不同数值画出的。

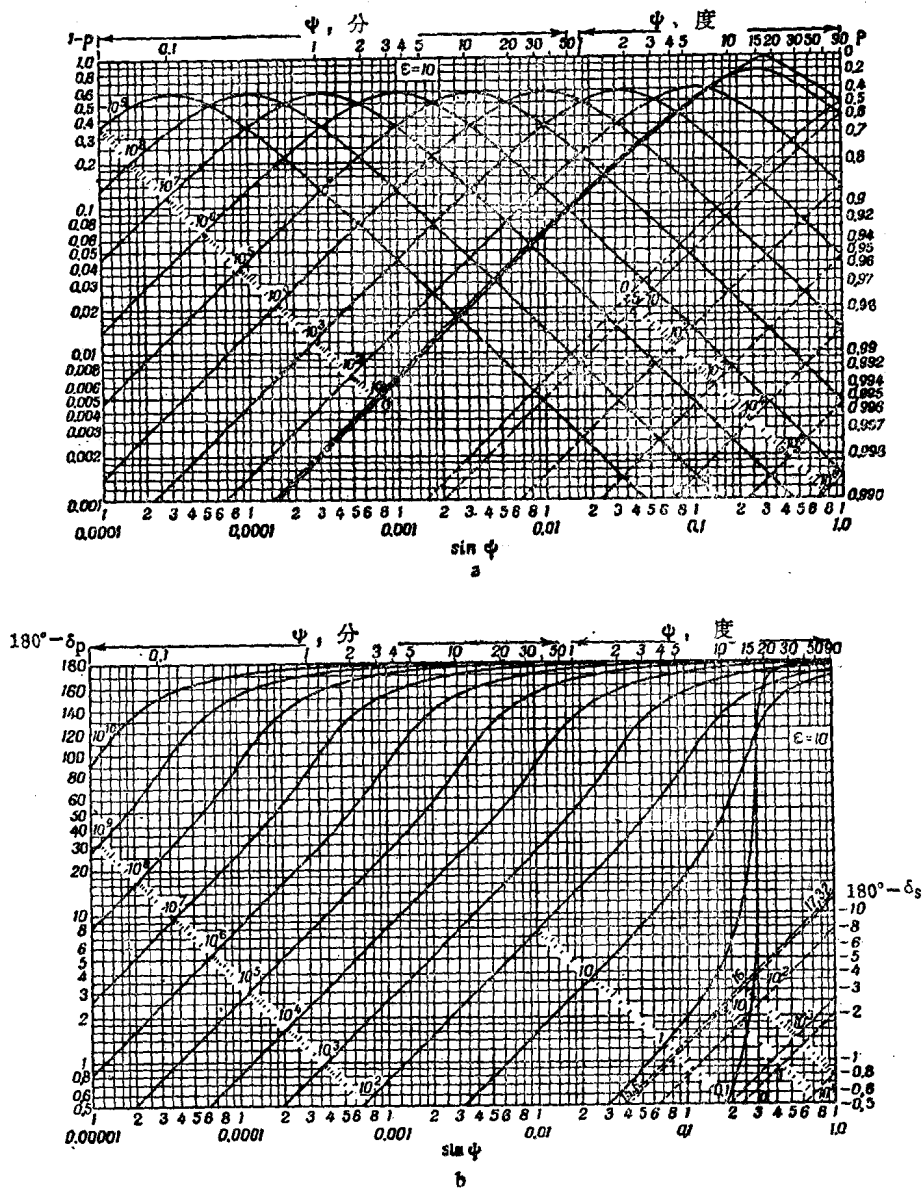


图 29.8 $\epsilon=10$ 时非混耳反射系数的模数和幅角(实线表示 ρ_P 和 δ_P , 虚线表示 ρ_S 和 δ_S)。曲线的参数为 $4\pi\sigma/\omega$

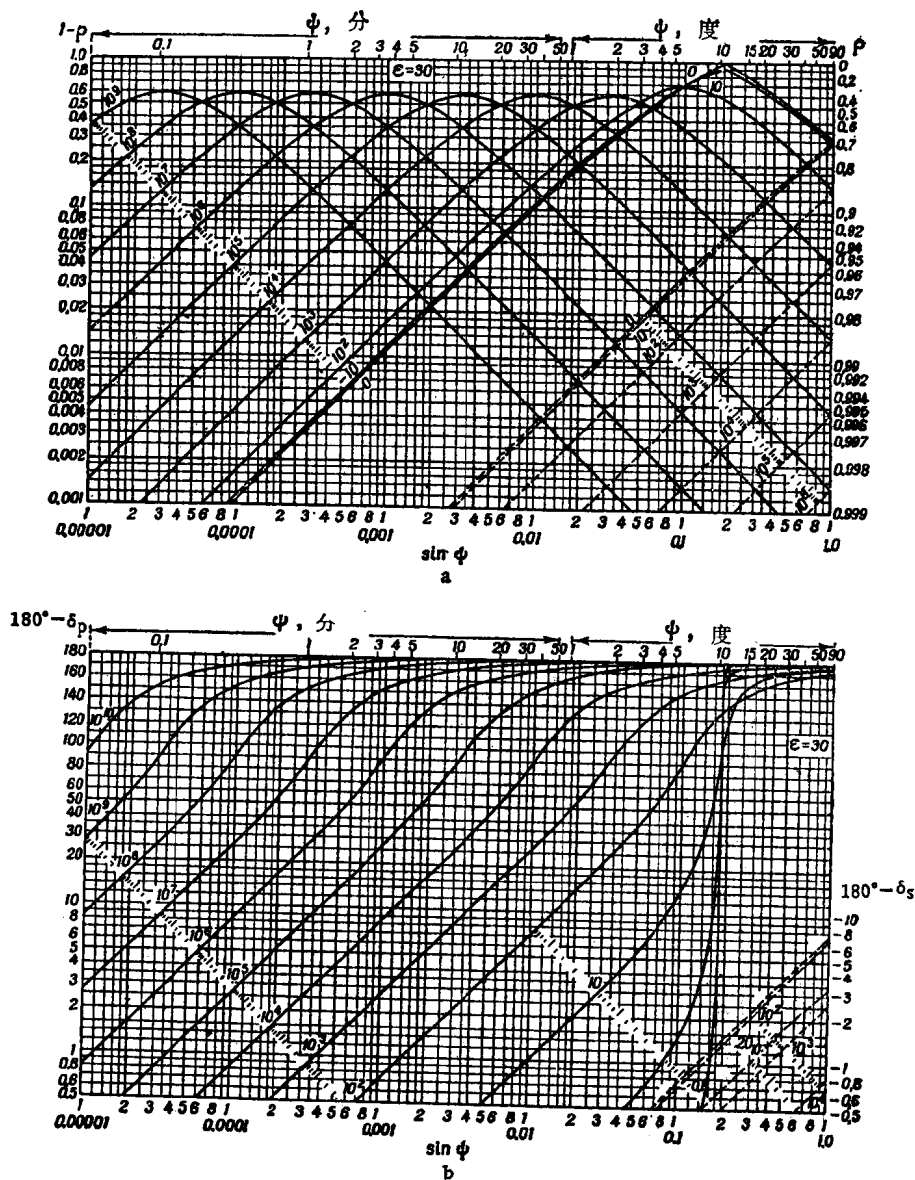


图 29.9 $\epsilon = 30$ 时菲涅耳反射系数的模数和幅角 (实线表示 ρ_P 和 δ_P , 虚线表示 ρ_S 和 δ_S)。曲线的参数为 $4\pi\sigma/\omega$

