计算流体动力学

馬铁犹 编著

北京航空學院出版社

计 算 流 体 动 力 学

馬 鉄 犹　编 著

北京航空學院出版社

内 容 简 介

作者根据多年来给研究生讲授计算流体动力学的讲稿编写成这本书。

书中阐述了用数值方法研究流体运动的理论基础—流体动力学诸方程的数值解法及定解条件； 选取 1975—1983年间发展的解决复杂几何形状、提高收敛速度、改进激波捕获质量以及求解层流和紊流纳维埃—司托克斯方程的方法作了详细的介绍；列举出这一学科在研究流动现象方面和在工程实际应用方面的成果。本书内容丰富，取材新颖。

本书是流体动力工程计算机辅助设计的基础教材，可用作高等院校有关专业的教师、高年级学生和研究生的参考书，可供有关的科研和设计工作者参考。

计算流体动力学
馬鉄犹 编 著
责任编辑 郭維烈
北京航空学院出版社出版
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
北京航空学院印刷厂排印 觅子店印刷厂装订
*
787×1092 1/16 印张：32 字数：816 千字
1986年 6 月第一版 1986年 6 月第一次印刷 印数：3100 册
统一书号：15432·018 定价：5.30 元

序

计算流体动力学是在经典流体动力学、数值计算方法和计算机技术的基础上建立起来的。现代航空航天飞行器的研制，要求精确的气动计算和性能预测。这些要求有力地推动计算流体动力学的发展并使之逐步形成了一门新的学科。计算流体动力学研究流体动力学诸方程的数值解法以及用数值方法模拟真实的流动现象。近十年来，它在这些方面取得一系列突破性的重大成就。现在，三维真实流場的数值模拟和跨音巡航三维整机的机辅气动设计即将实现，传统的设计方法和试验方法都将发生巨大的变革。

在这个时候，出版这本系统地介绍1975到1684年间计算流体动力学新发展的书，对国內科技界了解这门学科的发展过程和目前的水平，了解它的內容和它的工程价値都是很有意义的。

作者在这本书中，从系统而简练地叙述计算流体动力学的基础理论开始，以流場数値模拟的研究成果结束，旣重视理论，又着重说明这门学科在实际应用中的强大的生命力。

书中选取的求解流体动力学各类方程组的数値方法都是近年来有代表性的方法。当前普遍采用而又行之有效的气动设计和模拟试验工程软件很多都是根据这些方法编制出来的。作者在详细介绍这些方法的同时，旣分析了它们的优点又指出了它们的局限性。因此，新的数値方法的研究还有广阔的天地，而这本书的出版也将对我国发展计算流体动力学这门学科作出一定的贡献。

沈　元

1985年12月

前　言

流体动力学就其本质来说，是求解描述流体运动的各类微分方程组的科学。计算流体动力学则是用数値方法求解流体运动的各类方程组，它的解是对微分方程精解的近似。

作为计算流体动力学的基础，教材的第一、二、三章分析各类流体动力学微分方程组求解的可能性以及求解途径的问题，讨论了差分方法数値解逼近微分方程精解的条件问题，讨论了微分方程组求解的定解条件和差分方法数値解的定解条件问题。

计算流体动力学是实践性很强的一门科学。在六十年代以及七十年代初，广泛应用的方法有我们熟知的求解扰动势方程的*Murman*和*Cole*的混合差分法和求解全位势方程的*Jameson*方法，有求解原参数方程组的时间推进法如*MacCormack*方法和*Denton*方法，有求解粘流方程的流函涡量法和*SMAC*方法以及有工程上普遍采用的求解*Prandtl*附面层方程和主流流动方程的迭代解法等。

自七十年代中期至今，随着科学技术的发展，计算流体动力学的內容已经大为丰富了。它在解决它所面临的四个主要问题中，迅速地发展起来。这四个问题是：

1．曲边边界问题，即复杂几何形状问题；

2．计算的收斂速度问题；

3．激波捕获的质量问题；

4．*Navier—Stokes*方程求解和紊流模型问题。

教材从76年到83年的文献中，选取解决上列四方面问题的观点和方法作系统讲述，目的是向读者介绍计算流体动力学发展的近况及方向。

教材第四章网格设计介绍当前处理复杂几何形状的几种方法。

第五章以求解全位势方程的强隐式方法（*SIP*方法）为例，详细说明用差分法求解的方法和步驟。*SIP*方法是80年代初在美国发展的一种求解跨音流場的方法。

第六章和第七章讨论激波捕获问题。主要讨论的內容有偏微分方程组的间断解问题和激波捕获中的数値振蕩现象——寄生误差问题。第八章中介绍了几种提高激波捕获质量的方法。

第九章到第十三章讨论加快收斂速度问题。教材介绍了当前公认为有效的几种收斂快的计算方法，分析了这些方法所以能提高收斂速度的原因。

第十四章到第十六章，讨论粘流場求解。主要讨论*N.S.*方程的求解问题。关于边界层计算，介绍不同于附面层方程的薄层方程的解。

第十四章讨论层流不可压粘流解，介绍有限分析法和*SIMPLE*方法。这两种方法也用于求解可压缩粘流場问题。

关于可压粘流場求解的问题，先在十五章讨论层流可压*N.S.*方程的解。主要內容是介绍求解薄层方程的方法和快速收斂的隐式*MacCormack*方法。这些方法也用来求解平均*N.S.*方程。在十六章讨论紊流*N.S.*方程的求解问题和平均*N.S.*方程的求解问题。前者介绍几个在计算大涡模拟和亚格子封闭模型方面有代表性的小组的工作，后者介绍近年来平均*N.S.*方程求解方法的研究在外流流場和內流流場计算的实际应用中取得的重要进展。

编著者水平有限，错误之处，請读者指正。

马铁犹　1983年9月

目　　录

绪　论

0.1　計算流体动力学是流体力学发展的新阶段

流体力学的发展史可以划分为以下几个阶段：

0.1.1　十七世纪牛顿时期以前的准备阶段

古代人用帆或桨驶船，在箭的尾部加羽毛等，说明人类在生活和生产实践中，不断地认识和解决着流体动力学的问题。公元前的*Aristotle*(384—322*B.C.*）提出，这是固体和流体之间相互作用力的问题。*Archimedes*(287—212*B.C.*）创立液体平衡理论，奠定了流体静力学基础。

十七世纪，*Hagen*（1629—1695）确立了阻力与运动速度成二次方比例的关系式。*Newton*（1642—1729）在理论上推导了惯性阻力平方定律，给出了牛顿摩擦阻力公式。后者是现代粘性流体力学的基础。牛顿建立了动力学基本定律和方程。这个时期内，对阻力的研究和牛顿的动力学定律，为十八世纪流体动力学的创立准备了条件。

0.1.2　十八世纪是流体动力学的创建阶段

Bernoulli（1700—1783）在1738年发表的“流体动力学”著作，建立了不可压流体的压力、高度和速度之间的关系，即伯努利定律。

Euler（1707—1783）在1755年建立了理想不可压流体运动的基本方程组，奠定了连续介质分析力学的基础。速度位概念也是欧拉最先提出的。

D'Alembert（1717—1783）提出著名的达朗贝尔原理并应用到连续介质力学上，发表了液体气体分析力学。1744年，他提出“达朗贝尔疑难”问题。

Lagrange（1736—1813）于1781年提出流函数概念。他得出存在无旋运动的动力学条件，即拉格朗日定理。拉格朗日还确立了波传播的基本微分方程和波的传播速度公式。

这个阶段，欧拉、伯努利和达朗贝尔创立了理想流体动力学，拉格朗日改善了欧拉、达朗贝尔方法并发展了流体动力学的解析方法。

0.1.3　十九世纪是流体动力学基础理论全面发展阶段

不可压流体无旋运动的研究：*Cauchy*（1789—1857）于1815年发表了严密证明拉格朗日无旋流理论的文章。*Poisson*（1781—1846）于1826年解决了第一个空间流动——无旋的绕球流动——问题。*Laplace*于1827年提出著名的拉普拉斯方程。*Rankine*指出，理想不可压流体运动的位势和流函数，分别满足拉普拉斯方程，理想不可压流体动力学问题即为运动学问题。*Rankine*于1868年提出了把均匀的平移流动叠加到由源、汇、偶极子组成的系统之上的奇点法。

涡旋运动的研究：*Cauchy*于1815年和*Stokes*于1847年分别提出涡旋概念，把涡旋解释

为流体微元体的转动。*Helmholtz*创立涡旋运动理论。

小振幅波的研究：*Cauchy*于1815 年发表的论文提出了小振幅波理论。*Laplace* 指出，声波振动的传播过程接近于绝热过程，从而得出了音速公式。

非定常运动的研究：有著名的*Lamb*和*Rayleigh*。

十九世纪，还产生了流体动力学的两个重要分枝：粘性流体动力学和气体动力学。

Navier（1785—1836）于1826年导出粘性液体运动方程。*Poisson*于1831年和*Saint—Venant*（1797—1886）于1843年也导出粘性液体运动方程。*Stokes*于1845年发表了粘性流体运动理论。*Reynold*在1876—1883年试验研究粘性流体在小直径管中流动时，发现了层流和紊流。*Reynold*是紊流运动理论的创始者，1895年，他得出了雷诺方程——平均*N.S.*方程。

可压缩气体动力学是在流体动力学、热力学和声学发展的基础上产生的。可压缩气体动力学的基本方程组出现在1850 年前后。*Doppler* 在当时已指出超音流的基本特点。*Riemann*（1826—1866）于1860年，在理论上证明了连续气流中可以产生间断的黎曼问题。*Rankine*于1870年，*Hugoniot*于1887年分别建立了激波前后气流压力和密度间的关系式。

十九世纪流体力学的重大成就，在于给流体运动以严格的数学表达式。

0.1.4 二十世纪上半叶内气体动力学蓬勃发展

十九世纪末到二十世纪中期，工业叶轮机、航空飞行器和喷气推进技术的发展，要求在设计流体动力机器时和在判断它们的性能时不断地提高科学预见性，减少对经验和试验的依赖程度。这种要求促进了本世纪前五十年内气体动力学的蓬勃发展。

无粘气体动力学的发展：

1906年*Жуковский*发表著名的举力公式，把机翼举力表示为流体密度、机翼运动速度和附着涡强度的乘积。儒阔夫斯基奠定了二维平面平行流中机翼举力理论的基础。

1918—1919年，*Prandtl*提出大展弦比、有限翼展举力线理论，把机翼和尾迹用一组马蹄形涡线来代替。在假定涡系的诱导扰动速度小于来流速度的前提下，得出举力系数与迎角、弦长之间的积分关系式。

1925年 *Ackeret* 对尖缘薄翼得出简化波动方程的普遍解，导出超音线化理论并得出压力、举力和阻力的简单公式。

1927年*Glauert*和1928年*Ackeret*分别提出求解无粘无旋可压气体动力学方程组的线化方法。他们指出，在小扰动假设下，可压流作用于机翼的压力、举力和力矩是不可压流作用在机翼上的这些参数的$\dfrac{1}{(1-M_\infty^2)^{\frac{1}{2}}}$倍。此即*Prandtl—Glauert*规则。

1932年*Theodorsen*建立了用保角变换法求二维物体复势绕流正问题的精确解的理论。

1937年*Buseman*提出速度图法解二维亚音流动问题。它以速度及其矢量方向为自变量，得出位函数或流函数对速度及其矢量方向的线性微分方程。

1939年，*Gothert*给亚音可压绕流和不可压绕流的相似律提出了比 *Prandtl—Glauert* 规则更为精确的*Gothert*规则。

1944年，*Temple*发表了纯超音流中的特征线方法。1947年，*Isenberg* 和林家翘提出一整套特征线法图表；*Cronvich*提出了平面无激波位流的数值图解特征线法；*Shapiro*和

*Edelman*提出二维超音流数値图解特征线法。1948年，*Courant*和*Friedrichs* 对特征线法作了数学分析。

1944 年，*Garrick*、*Kaplan* 和錢学森都用速度图法研究了可压流体的亚音和超音的混合流动问题。

1947 年，*von—Kármán* 和錢学森都研究了跨音流相似律，得出了跨音流的卡门相似参数。

粘性流体动力学的发展：

*Prandtl*于1904年首先提出附面层理论，把不可压流的*N.S.*方程简化为不可压流附面层方程，从而把粘性流体动力学的研究转向应用，在数学和工程之间提供了一座桥梁。

1908年*Blasius*得出均匀流动下平板附面层的相似解。*Blasius* 方法把附面层方程化为常微分方程求解。1930年*Falkner—Skan*在$U=cx^m$流动下，将附面层方程变换到常微分方程求得相似解。应该提到的是 *Hiemenz* 在1911年得出 $U=cx$ 流动下在驻点附近 *N.S.*方程的相似解。

1921年，*Kármán*和*Pohlhausen*由微分形式的附面层方程通过积分得出动量积分方程。在假定一个单参数多项式速度分布下，把积分方程化为一个非线性的常微分方程求解。动量积分方法的优点是简单，但在有反压梯度附面层内，它的解存在着可靠性问题。

1931年*Buseman*和1932年*Crocco*分别提出能量积分关系，求解可压流附面层方程组。

1938年，*Howarth*提出把流函数用冪级数展开后代入附面层方程，得出三阶常微分方程组求解。

1938年，*Kármán*和錢学森用动量积分方程求解可压流的平板附面层问题。

1946年，*Illingworth*仿效*von Mises*在1927年时提出的变换，提出了*Illingworth*变换。将变换代入可压流的动量附面层方程，得出与*Falkner—Skan* 方程类似的常微分方程。

转捩问题是层流附面层的稳定性问题。

1907年*Orr*和1908年*Sommerfeld*分别得出层流不稳定性的四阶线性齐次方程—*Orr—Sommerfeld*方程。这个方程的无粘形式，早在1880年已由*Rayleigh*给出。*Rayleigh*指出速度分布有拐点是不稳定的必要条件。

1921年*Prandtl*指出，粘性流动在某一波数和雷诺数范围內，它的速度分布变得不稳定。

1929年*Tollmien*用半图解法求解*Orr—Sommerfeld*方程，证实了*Prandtl* 的假设。

1932年*Schlichting*做了平板速度分布稳定性研究。

1945年，林家翘发展了稳定性理论，1955年，发表了著名的“流体动力学稳定性理论”。

紊流平均*N.S.*方程的求解问题，是经典的流体动力学的困难问题。通常总是把它简化为紊流附面层方程求解。与层流附面层方程相比，仅多了紊流剪应力项，速度则是以平均速度代替眞实的流动速度。1921年，*Kármán*由紊流雷诺方程积分得出紊流的动量积分方程。紊流附面层方程的封闭性提出了建立剪应力项的紊流模型的要求。

1877年，*Boussinesq*提出紊流粘性概念。

1925年*Prandtl*把涡的输运类比于分子的输运，提出混合长度理论。1930 年*Kármán*建议重叠层混合长度与离壁面的距离成比例。1942年 *Prandtl* 建议外层的混合长度取常数。

1951年，*Reichardt*建议内层混合长度比例于壁面距离的平方。

1933年*Prandtl*提出紊流速度分布的内层律。1930年*Kármán*提出外层速度亏损律。1938年*Millikan*提出重叠层速度分布律。

二十世纪上半叶，气体动力学家找到了求解气动方程组的一些方法，并开始用来解决某些实际设计问题和流場分析问题。这些方法主要依靠线化技术和在近似假设下大大地简化方程式。求解的问题限于二维或轴对称简单几何形状的流动问题。理论解尚无能力描述复杂几何和三维流动的特点。实际应用中，气动力设计主要依靠经验方法。设计新的器件主要是用类比法，即由一些形状相差不大而已经使用成功的器件进行改型。设计仍是以过去的使用经验、个人才能和原始粗糙的线性理论为指导。对一个新的改型和新的设计作初步估价都要做试验。在对气体动力学研究中，非线性偏微分方程组的求解，极少进展；紊流的研究，主要是靠实验。流体动力学需寻找新的突破。

本世纪前五十年中，在研究非线性偏微分方程组求解时，发展了数值方法。

1924年出现了解代数方程组的系数矩阵的*Cholesky*方法。

1927年*Richardson*提出二阶精度外插差分格式。

1928年*Courant*、*Friedrichs*和*Lewy*提出求解双曲型方程时差分格式的稳定性条件—*CFL*条件。

1928年*Thom* 用点松驰法求解圆柱绕流的附面层方程和用点松驰法求解圆柱绕流的*Navier—Stokes*方程。手工计算工作量极为繁重。

1931年*Bush*报告了他的“微分分析器”。这是第一批成功的自动计算机之一。

一般认为，描述流体运动的非线性偏微分方程的直接求解从此开始，计算流体动力学由此得名。

1937年*Hartree*和*Womersley*最早提出偏微分方程数值解的隐式差分格式。1939年报告了求解附面层的两个应用实例——外流线性减速和椭圆柱绕流的压力分布。迭代过程用了试射法。

1944年，*Emmons*用松弛法计算了二维通道中对称翼型的绕流場。1946年，用松弛法计算了二维双曲型曲线壁面的喷管内部流場，得出了跨音流場和激波。*Emmons*用流函数作参变量，激波由拟合得出。用流函数作参变量的缺点是在给定熵值下，密度是质量通量的双值函数。五十年代，*Oswatitsch*（1950）和*Spreiter*（1955）等用非线性跨音小扰动势方程求解有激波的绕机翼跨音流場，计算工作量很大。

五十年代以后，计算机飞快发展。

费用方面，一个在1950年需要花1000元计算费的作业，在1980年只需1.0元，如图0.1所示。

计算速度方面，一个人工计算需要100年的题目，在1950年用*IBM*—650，有100小时即可完成；在1970年用*IBM*—370，则只需10分钟；到1980年用*STAR*或*CRAY*—1，仅需一分钟即可完成。

计算机的发展给流体力学巨大影响；由于流体动力学研究的物理现象丰富多采（激波、非定常运动、粘性流体、紊流现象等）；由于对现象的研究，已经建立起流体动力学的各类方程组；又由于求解非线性方程组的迫切要求等原因，流体动力学极适宜于“计算”分析。从六十年代起，研究流体动力学的数值方法蓬勃发展起来，形成了计算流体动力学这门

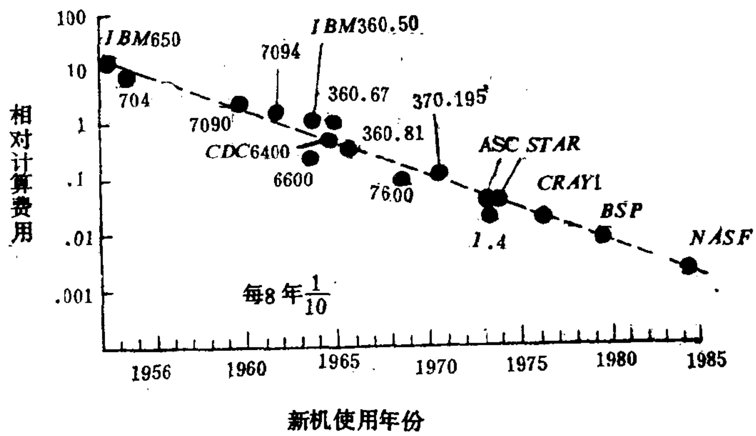


图0.1 大型计算机数值模拟流动问题所需相对计算费发展趋势

崭新的科学。流体动力学的发展进入了一个新阶段。

0.2 近代流体动力学的一支革命力量

计算流体动力学是改造近代流体动力学的一支生气勃勃的革命力量。今天，这一切都到了什么地步呢？

厂史上流体动力学的大师们建立起来的基本概念和基本定律，仍然是计算流体动力学的最基础的东西。而一维气体动力学的大部分和大量的近似方法则逐渐失去地位，甚至被人忘却。仅有少数例外，如用计算机处理线性问题的*Panel Method*，对亚音、超音和跨音流动仍然有效。又如机翼的举力线理论对低速大展弦比机翼仍然可用。

计算流体动力学则用它自己的方法处理流体动力学方程组，突破了求解非线性偏微分方程的困难；它模拟实际的气流现象；它和实物试验并驾齐驱，设计质量可以用数值试验来评价；它大大缩短了设计的时间、节省了设计费用。

无粘流非线性方程组的解：

1968年*Magnus*、*Gallaher*和*Yoshihara*用时间推进法解超临界有激波机翼绕流流場的欧拉方程组。他们用时间推进法把一个椭圆型和双曲型的杂交型问题化为一个纯双曲型问题。在推进大量时间步后，得出收敛的定常解。他们的工作是对无粘流非线性方程组求解的重大突破。

1970年*Murman*提出解小扰动势方程的形式相关方法。在亚音区用中心差分格式，在超音区用一侧差分格式。计算方法用线松弛法。这一方法的收敛速度比*Magnus*和*Yoshihara*的时间推进法的收敛速度快一个数量级。他们的成就开辟了计算跨音气体动力学的新领域。

无粘的三维跨音流場的研究：

1971年，*Bailey*, *Ballhaus*和*Steger*等计算了绕三维机翼和翼柱组合体的跨音流場。

1972年，*Jameson*计算偏航机翼的三维跨音绕流流場。*Lomax*等计算了*C*—141 机翼的跨音绕流流場。

1973年，*Jameson*用全位势方程求解跨音流場。

无粘的非定常流場的研究：

1973年，*Ehler*做了简谐振动机翼跨音绕流的非定常小扰动势方程的差分松弛解。

1974年，*Ballhaus*和*Lomax* 做了低频非定常跨音流場小扰动势方程数值解。同年，*Ballhaus*和*Steger*提出了用隐式近似因子分解法（*AF*1方法）求解低频跨音流小扰动势方程的方法。

1974年，*Magnus*和*Yoshihara*用时间推进法解欧拉方程组研究绕机翼的非定常跨音流場。

1975年，*Ehler*等又把振动机翼跨音扰动势方程的求解推广到三维。

1974年，*Beam*和*Warming*用小扰动势方程和欧拉方程两种求解方法研究非定常跨音流动。1975年，他们提出求解守恒双曲型欧拉方程组的隐式近似因子分解法(*AF*方法）。

粘流*Navier—Stokes*方程的解：

求解不可压流 *N.S.* 方程最早的是1928年的*Thom*。他用流函数和涡量作参变量，把*N.S.*方程变换为流函涡量方程求解。

1967年*Chorin*求解用速度、压力等作参变量的原参数*N.S.*方程。

1969年，*MacCormack*提出求解可压流*N.S.*方程组的有限差分格式。1972年，又提出了有限体积时间分裂法。

1977年，*Steger*用*AF*方法解薄层方程。

在层流*N.S.*方程的解取得重大进展的基础上，求解紊流*N.S.*方程及紊流模型的研究成为七十年代的重要课题。

1970年*Deardorff*用大涡模拟的方法直接求解紊流 *Navier—Stokes* 方程。其后，*Orsag*和*Patterson*(1972)，*Leonard*和*Clark*（1974）以及*Stanford*大学的*Ferziger*等都研究和发展紊流*N.S.*方程的直接解法。

目前工程上实际应用的是求解平均*N.S.*方程的方法。紊流模型的研究极为重要。计算流体动力学是研究紊流模型的有力武器。

在五十年代和六十年代，0 方程模型不断有所改进。

1950年*Rotta*，1951年*Richard*，1956年*van Driest*，1961年*Spalding*等，在内层，重叠层和外层的三层概念基础上分别得出内层紊流粘性系数的各种表示式。

1954到1956年，*Clauser*和*Coles*等得出外层紊流粘性系数公式。

六十年代末和七十年代初发展了很多紊流模型。

1969年*Nee—Kavasznay*把混合长度的涡粘概念推广为涡粘输运模型。1974年，*Saffman*和*Wilcox*提出以平方涡量和紊流动能为参变量的涡粘输运模型。

1970年*Lee*、1973年*Morel*、1974年*Lee*和*Harsha*等，根据 *Nevzgljadov*（1945）和 *Drydon*（1948）提出的紊流剪应力和动能的关系，分别提出以紊流动能为参变量的一方程模型。

1972年*Spalding*、1973年*Launder*等，根据*Kolmogolov*（1942）和 *Prandtl*(1945)提出的紊流剪应力和混合长度、紊流动能的关系，分别提出以紊流动能和混合长度为参变量的二方程模型。

1972年*Hanjalic* 和 *Launder*提出三方程紊流动能模型。它以紊流动能、紊流剪应力和紊流动能耗散率为参变量，也称为应力模型。

紊流模型的研究在不断发展。

计算流体动力学在六十年代和七十年代的成就，显示出它在人类深入研究流动现象和在工程应用方面的强大生命力。虽然，计算流体动力学本身还有待发展，它面临着的困难比它已经解决的问题要多得多，但只要目标专一，用执着的锲而不舍的精神去研究它、应用它，随着时间的推移，将无疑地会在通向目的地的道路上不断赢得新的胜利。

0.3 計算流体动力学当前面临的几个問題

在很多需要解决的问题中，着重研究解决的有激波模拟、收敛速度、紊流模型和复杂几何形状等问题。

激波模拟原则上可以作激波拟合。波系比较复杂的流場中，用拟合法探测激波位置和跟踪激波位置的变动等均很困难，限制了激波拟合法的应用。七十年代用得较普遍的是激波捕获法。但激波捕获存在着捕获的质量问题，即激波捕获的位置误差、强度误差以及捕获激波时所用的求解方法对流場其余部分的影响等。这些误差引起全流場压力分布失真，因而在气体绕流的物体表面上压力分布精度降低。引起误差的原因在于捕获激波抹平的宽度有几个网格宽超过了附面层厚度、在于激波前后的寄生误差、在于斜激波捕获质量等。1975年以来，在解决这些问题方面已取得若干进展。

复杂几何形状的处理和计算速度问题，七十年代的研究取得一些可喜成果。在物理平面內构筑能描述绕实际复杂形状物体的流体运动的曲线坐标网格。网格构筑用计算机自动生成。在解的梯度较小的区域网格稀疏，在解的梯度大的区域网线密集。把物理平面內的网格变换为计算平面內的正交网格。正交网格的行和列是有规则的，各种有效的计算方法均可采用。二维复杂几何形状绕流流場求解域的网格设计已有很多比较满意的方法，三维坐标系的网格设计的研究工作正在迅速发展。

七十年代初，*Murman* 和 *Cole* 的形式相关跨音松弛法以其收斂速度快而被广泛采用。1974年 *Ballhaus* 和 *Steger* 的*AF*1 方法以及后来 *Holst* 的*AF*2 方法等，收斂速度超过了形式相关跨音松弛法。1979年*Sankar*提出解全位势方程的*SIP*方法，收斂速度与*AF*2方法相当，稳定性则更胜于*AF*2方法。在求解原参数方程方面，1974年*Beam*和*Warming*的*AF*方法，1980年*Johnson*的升阶方程法和*Esser*的內部阻尼法的收斂速度都达到形式相关跨音松弛法的收斂速度水平。1980年和1984年*MacCormack*提出的显隐式方法的收斂速度则超过了形式相关跨音松弛法的收斂速度。

全时间相关的紊流*N.S.*方程直接数值解需用的儲存，远远超过现有先进的计算机容量，但直接数值解是值得密切注意的计算流体动力学的一个重要方面。当前常用的是平均*N.S.*方程的求解和紊流模型。可把紊流模型分为两类。第一类，沿气流方向压力变化和缓，在气流流向相邻站上，紊流附面层內的紊流结构差异很小。第二类是沿流向相邻两站的距离即使仅为附面层厚度量级，两站的紊流结构变化很大。转捩、激波对气流的作用、分离再附以及底流等均属这一类。第一类问题，用已有的各种紊流模型和平均*N.S.*方程求解二维流动问题，可得满意结果，但在求解三维流动（如后掠机翼的绕流）时，结果不很满意。若对紊流模型加以改进，有可能得出良好结果。对第二类问题，用现有紊流模型计算的结果与实测结果差异太大。只有个别第二类问题可以用第一类问题的紊流模型来计算，但需对

模型作必要的修改。一般说来，第二类问题是根本不同于第一类问题的流动现象，需要有崭新的紊流模型。比较有希望的是用“大涡模拟”，大旋涡流动用方程直接计算，亚网格尺度的小旋涡模型化。这样处理适合于各向异性的大涡特点。但小涡取时均模型可能在做转捩问题时发生困难。研究正在进行中。

在结束绪论时，应该再次强调的是计算流体动力学是一门崭新的科学。在理论上，它研究描述流动现象的各类方程的解；在工程应用上，它的目标是用数值试验代替尽可能多的实物试验和用计算机设计流体动力机械。

在即将到来的伟大的产业革命中，计算流体动力学在工程上的应用将改变气动力实验的布局和改变工程设计的面貌，从而将彻底改变人们对于实验和设计的传统观念。

计算流体动力学也将在推动产业革命的实践中不断地发展自已并越来越显示出它对科学、对产业革命的巨大推动作用！

第一章　流体动力学问题的解

1.1　流体动力学問題的解

给我们所要描述的流动现象，建立一组方程式，方程式的数目与描写流动特性的参变量的数目相等，这组方程式称为泛定方程。泛定方程描写运动的一般规律，不能确定运动的具体状态。规定具体的运动状态，需要按照方程类型给出定解条件——初始条件和边界条件。若给的定解条件是合适的，参变量的值在求解区域内满足泛定方程，在边界上满足定解条件，则参变量的值为问题的解，被提出的问题为适定性问题。

给适定问题下的经典定义是

（偏微分方程＋初始条件＋边界条件）

——证明解的存在性、唯一性和连续性——

＝适定问题

给出的定解条件适当，则问题有解。若给出的定解条件过多，则问题无解或解不存在。若给出的定解条件不够，则问题可以有很多解，即解不是唯一的。所谓连续性即问题的解在描写运动的定义域内连续地依赖于定解条件，定解条件的微小变化只引起定义域内解的微小变化。要证明问题是适定的（*Well　posed*），必须证明解的存在、唯一和连续。

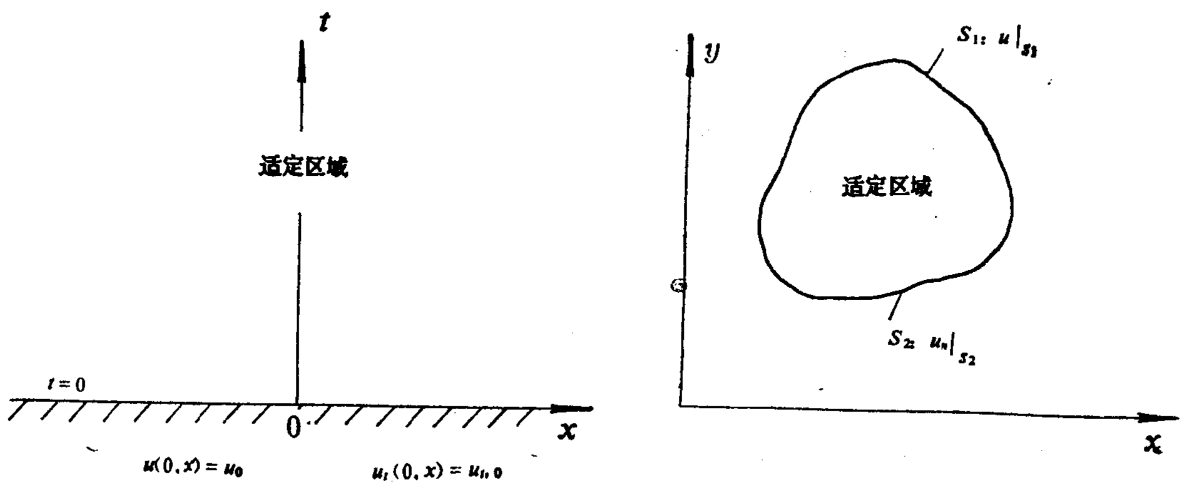
例如受迫振动的微分方程

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \tag{1.1}$$

是双曲型方程。定义域为 $-\infty<x<\infty$ 和 $0\leqslant t\leqslant T$。若给定初始条件为

$$\left.\begin{aligned} u(t=0,\ x) &= u_0 \\ u_t(t=0,\ x) &= u_{t,0} \end{aligned}\right\} \quad -\infty<x<\infty \tag{1.2}$$

则问题是适定的，适定区域如图 1.1(a) 所示。



(a)　　　　(b)

图1.1　定解条件和适定区域：（a）初值问题，（b）边值问题