测井工程师
进修丛书

声波测井理论基础及其应用

[illegible]

石油工业出版社

测井工程师进修丛书

声波测井理论基础及其应用

王冠贵 编著

石油工业出版社

内 容 提 要

本书系统介绍目前国内外采用的各种声波测井方法的理论基础及资料解释。书中重点论述了声波测井的物理基础、声波在弹性体中的波动方程、波的吸收、反射与折射，以及声波在裸眼井中传播的理论。介绍了声速、声波全波列、环行声波、井下超声电视等测井方法的原理、声波波型（或声学图象）分析、信息提取及资料解释。此外，对用于套管井内的声幅、变密度、超声脉冲反射等测井方法的原理及其在地质、钻井、固井、开发等方面的应用也作了简要的介绍。最后，还对压电陶瓷晶体的物理特性及其效应作了介绍。本书内容广泛、深入，反映了现代声波测井技术水平。

本书可作为测井工程师的进修用书，也可作为大专院校有关师生以及地质、油田开发、井下作业技术人员的参考用书。

测井工程师进修丛书
声波测井理论基础及其应用
王冠贵 编著
*
石油工业出版社出版
（北京安定门外外馆东后街甲36号）
北京顺义燕华营印刷厂排版印刷
新华书店北京发行所发行
*
787×1092毫米 16开本 12 1/2印张 312千字 印1—2,000
1988年2月北京第1版 1988年2月北京第1次印刷
书号：15037·2821 定价：2.40元
ISBN 7-5021-0173-X/TE·171

目　录

第一章　声波测井的物理基础

本章从应力、应变的定义和胡克定律着手，来推导弹性体的波动方程和无界弹性体中波动方程的解，还讨论平面波在弹性介质传播过程中能量衰减及在弹性介质分界面上的反射与折射。

1.1　位移、应变和应力

在均匀各向同性弹性介质中，假设波在里面传播时不会因为摩擦引起振幅衰减。当外力作用在弹性体上时，体内任两相邻的点 P（x，y，z）及Q（x+∂x，y+∂y，z+∂z）就会产生位移，其中 P 点移到 P′点，其位移为$\vec{u}_P=\{u_x, u_y, u_z\}$，Q点移到Q′点，其位移为$\vec{u}_Q=\{u'_x, u'_y, u'_z\}=\{u_x+\partial u_x, u_y+\partial u_y, u_z+\partial u_z\}$。它们都是场点的函数，按泰勒展开式，忽略高次项得

$$u'_x(x+\partial x, y+\partial y, z+\partial z)=u_x+\partial u_x=u_x+\frac{\partial u_x}{\partial x}\partial x+\frac{\partial u_x}{\partial y}\partial y+\frac{\partial u_x}{\partial z}\partial z$$

$$u'_y(x+\partial x, y+\partial y, z+\partial z)=u_y+\partial u_y=u_y+\frac{\partial u_y}{\partial x}\partial x+\frac{\partial u_y}{\partial y}\partial y+\frac{\partial u_z}{\partial z}\partial z$$

$$u'_z(x+\partial x, y+\partial y, z+\partial z)=u_z+\partial u_z=u_z+\frac{\partial u_z}{\partial x}\partial x+\frac{\partial u_z}{\partial y}\partial y+\frac{\partial u_z}{\partial z}\partial z$$

（1.1.1）

令：

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}=e_{xx};\quad \frac{\partial u_y}{\partial y}=e_{yy};\quad \frac{\partial u_z}{\partial z}=e_{zz} \qquad (1.1.2)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u_y}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial y}=e_{xy}=e_{yx}\\
&\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial x}=e_{zx}=e_{xz}\\
&\frac{\partial u_z}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial z}=e_{yz}=e_{zy}
\end{aligned}\right\} \qquad (1.1.3)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y}=2\omega_z\\
&\frac{\partial u_x}{\partial z}-\frac{\partial u_z}{\partial x}=2\omega_y\\
&\frac{\partial u_z}{\partial y}-\frac{\partial u_y}{\partial z}=2\omega_x
\end{aligned}\right\} \qquad (1.1.4)$$

位移式（1.1.1）可改写成

8810451

$$\left.\begin{aligned}u'_x&=u_x+\delta u_x=u_x+\left(e_{xx}\delta x+\tfrac{1}{2}e_{xy}\delta y+\tfrac{1}{2}e_{xz}\delta z\right)+\left(\omega_y\delta z-\omega_z\delta y\right)\\u'_y&=u_y+\delta u_y=u_y+\left(\tfrac{1}{2}e_{yx}\delta x+e_{yy}\delta y+\tfrac{1}{2}e_{yz}\delta z\right)+\left(\omega_z\delta x-\omega_x\delta z\right)\\u'_z&=u_z+\delta u_z=u_z+\left(\tfrac{1}{2}e_{zx}\delta x+\tfrac{1}{2}e_{zy}\delta y+e_{zz}\delta z\right)+\left(\omega_x\delta y-\omega_y\delta x\right)\end{aligned}\right\}\qquad(1.1.5)$$

下面证明：e_{xx}，e_{yy}，e_{zz}分别表示P点附近的弹性介质在X，Y，Z 轴 方向的相对伸长称线应变。e_{xy}、e_{yz}、e_{zx}为角应变，分别表示立方体体积元在XOY，YOZ，ZOX平面中角度的变动，ω_x，ω_y，ω_z相当于体积元的旋转。式(1.1.5)表示Q点的位移除了与P点作同 方向平移外，还有线形变、角形变和旋转等。

1.1.1 线 应 变

图1.1.1为弹性立方体体积元在XOY平面上的投影，A点移到A′点，其位移为｛u_x，u_y｝；B点移动到B′点。其位移为｛u_{xB}，u_{yB}｝，其它以此类推，表1.1.1列出各点的坐标。

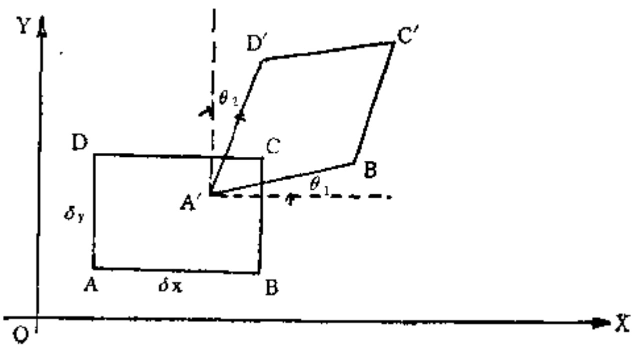

图1.1.1 体积元线形变角形变分析图

表1.1.1

点 号	X 坐 标	Y 坐 标
A	x	y
B	$x+\delta x$	y
C	$x+\delta x$	$y+\delta y$
D	x	$y+\delta y$
A′	$x+u_{xA}(x,\ y)=x+u_x$	$y+u_{yA}(x,\ y)=y+u_y$
B′	$x+\delta x+u_{xB}(x+\delta x,\ y)$ $=x+\delta x+u_x+\frac{\partial u_x}{\partial x}\delta x$	$y+u_{yB}(x+\delta x,\ y)$ $=y+u_y+\frac{\partial u_y}{\partial x}\delta x$
C′	$x+\delta x+u_{xC}(x+\delta x,\ y+\delta y)$ $=x+\delta x+u_x+\frac{\partial u_x}{\partial x}\delta x+\frac{\partial u_x}{\partial y}\delta y$	$y+\delta y+u_{yC}(x+\delta x,\ y+\delta y)$ $=y+\delta y+u_y+\frac{\partial u_y}{\partial x}\delta x+\frac{\partial u_y}{\partial y}\delta y$
D′	$x+u_{xD}(x,\ y+\delta y)$ $=x+u_x+\frac{\partial u_x}{\partial y}\delta y$	$y+\delta y+u_{yD}(x,\ y+\delta y)$ $=y+\delta y+u_y+\frac{\partial u_y}{\partial y}\delta y$

线应变用相对伸长度量，X轴方向线应变为

$$e_{xx}=\frac{(\overline{A'B'})_x-(\overline{AB})_x}{(\overline{AB})_x}=\frac{\left[\left(x+\delta x+u_x+\frac{\partial u_x}{\partial x}\delta x\right)-\left(x+u_x\right)\right]-\delta x}{\delta x}$$

$$=\frac{\partial u_x}{\partial x}$$

同理在Y轴和Z轴方向上的线应变为

$$e_{yy}=\frac{\partial u_y}{\partial y}, \qquad e_{zz}=\frac{\partial u_z}{\partial z}$$

1.1.2 角 应 变

角应变用角度改变来度量。图1.1.1中$\overline{AB}$位移后为$\overline{A'B'}$，向Y轴偏移θ_1角；$\overline{AD}$位移后为$\overline{A'D'}$，向X轴偏移θ_2角，则在XOY平面上总的角应变e_{xy}为

$$e_{xy}=e_{yx}=\theta_1+\theta_2$$

$$\theta_1\approx tg\theta_1=\frac{(\overline{A'B'})_y}{(\overline{A'B'})_x}=\frac{\left(y+u_y+\frac{\partial u_y}{\partial x}\delta x\right)-(y+u_y)}{\left(x+\delta x+u_x+\frac{\partial u_x}{\partial x}\delta x\right)-(x+u_x)}$$

$$=\frac{\frac{\partial u_y}{\partial x}\delta x}{\delta x+\frac{\partial u}{\partial x}\delta x}\doteq\frac{\partial u_y}{\partial x}$$

$$\theta_2\approx tg\theta_2=\frac{(\overline{A'D'})_x}{(\overline{A'D'})_y}=\frac{\left(x+u_x+\frac{\partial u_x}{\partial y}\delta y\right)-(x+u_x)}{\left(y+\delta y+u_y+\frac{\partial u_y}{\partial y}\delta y\right)-(y+u_y)}$$

$$=\frac{\frac{\partial u_x}{\partial y}\delta y}{\delta y+\frac{\partial u_y}{\partial y}\delta y}\doteq\frac{\partial u_x}{\partial y}$$

$$\therefore\quad e_{xy}=e_{yx}=\frac{\partial u_y}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial y}$$

同理可算出YOZ、ZOX平面的角应变分别为

$$e_{yz}=e_{zy}=\frac{\partial u_z}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial z}$$

$$e_{zx}=e_{xz}=\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial x}$$

1.1.3 体 应 变

外力作用下弹性体体积发生变化称体应变，体应变用体积相对变化来度量，由于角应变仅使弹性体发生边角关系变化，故弹性体体应变主要由线应变引起，体应变θ计算如下：

$$\Theta=\frac{V'-V}{V}$$

体积元原体积　$V=\delta x\delta y\delta z$

形变后体积 $V'=(\delta x+\frac{\partial u_x}{\partial x}\delta x)(\delta y+\frac{\partial u_y}{\partial y}\delta y)(\delta z+\frac{\partial u_z}{\partial z}\delta z)$

因此 $$\Theta=\frac{(1+\frac{\partial u_x}{\partial x})(1+\frac{\partial u_y}{\partial y})(1+\frac{\partial u_z}{\partial z})\delta x\delta y\delta z-\delta x\delta y\delta z}{\delta x\delta y\delta z}$$

$$\doteq\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$=e_{xx}+e_{yy}+e_{zz} \tag{1.1.6}$$

已知 $\vec{u}=u_x\vec{i}+u_y\vec{j}+u_z\vec{k}$ 故

$\Theta=\operatorname{div}\vec{u}$

1.1.4 科希方程组和应变张量

式(1.1.2)线应变和式(1.1.3)角应变共6个方程合称科希方程组。

描述弹性体形变有9个量

$$\begin{pmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{yx} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_{zz} \end{pmatrix}$$

称为形变(应变)张量；形变张量由9个分量组成，它是坐标数3的二次方，又称二秩形变张量；其中$e_{xy}=e_{yx}$，$e_{yz}=e_{zy}$，$e_{zx}=e_{xz}$，又称二秩对称形变张量。

1.1.5 位移矢量场的旋度

立方体体积元在XOY平面上投影为ABCD，形变后为 A′B′C′D′，形变后的面积元有否发生转动，就要看面积元形变前后对角线之间的夹角ω_z(图1.1.2)。

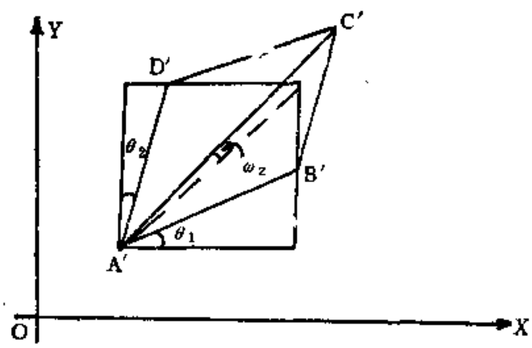

图1.1.2 面积元对角线的转角

$$\omega_z=\left[\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}-\theta_1-\theta_2)+\theta_1\right]-\frac{\pi}{4}$$

$$=\frac{1}{2}(\theta_1-\theta_2)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)$$

同理在YOZ和ZOX平面,面积元对角线所转的角分别为

$$\omega_x=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}-\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)$$

$$\omega_y=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}-\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)$$

写成矢量形式

$$\vec{\omega}=\frac{1}{2}\operatorname{curl}\vec{u}$$

1.1.6 应 力

作用在物体体积上的力称体力，如重力 $F_g = \vec{g}\,\Delta m = \rho\vec{g}\,\Delta V$，电场力 $\vec{F_e} = \Delta q\vec{E} = \rho_e\vec{E}\Delta V$ 都属体力，都和受力物质的体积有关。

作用在物体表面上的力称面力，如压力 $\vec{F_P} = -P\vec{n}\Delta S$，式中P是压强，$\vec{n}$ 是 ΔS 面上的外向法线。弹性力 $\vec{F_t} = T_n\vec{n}\,\Delta S$，$T_n$ 是 ΔS 面上外法线方向应力，弹性力 $\vec{F_t}$ 方向与 ΔS 外法线方向一致。它们都属面力，都与受力物体表面积有关。应力不是“力”，它的量纲为力的量纲除面积的量纲。

在弹性体P点附近取一立方体体积元（图1.1.3），边长为 δx、δy、δz。立方体体积元共有六个壁面，只有三个壁面交于P点，规定正法线方向为三个坐标轴方向，对P点的三个壁面它们的正法线不是外向法线而是内向法线。

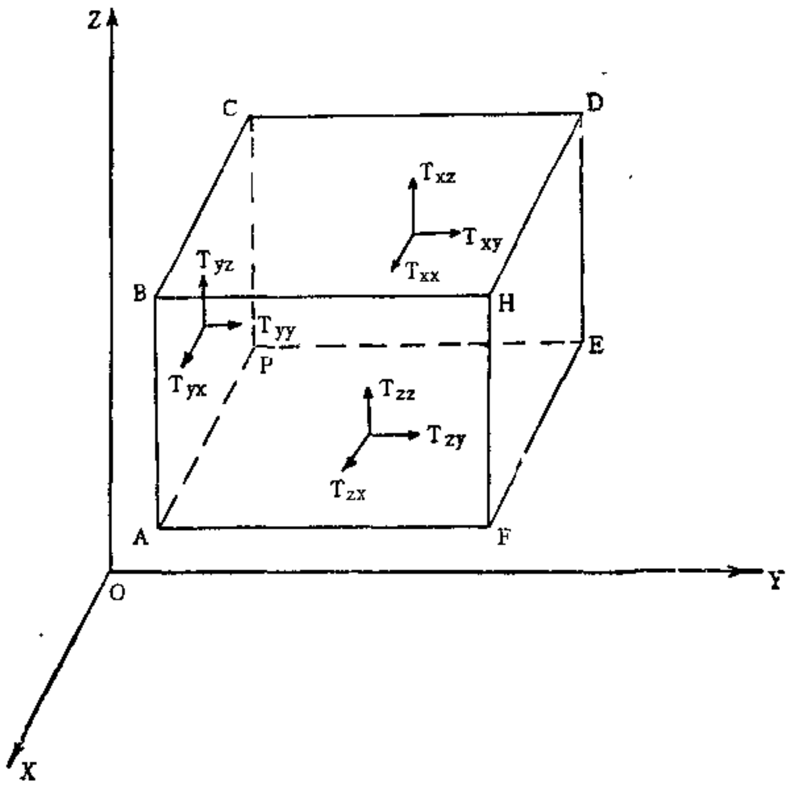

图1.1.3 P点应力分量示意图

立方体体积元在外力作用下发生形变，同时产生反抗外力的弹性力。对三个壁面分别考察。

1. **PEDC壁面**

内法线方向为X轴方向，面积为 $\delta y\delta z$，在该面上产生反抗外力的弹性力为

$$\Delta\vec{F}_1 = \vec{T}_1\,\delta y\delta z$$

这里 $\vec{T}_1$ 可看成矢量，它可以分解为三个直角分量 $\vec{T}_1 = \{T_{xx},\ T_{xy},\ T_{xz}\}$。每个分量第一个角码表示应力所在的平面法线方向，第二个角码表示应力的方向。

2. **PABC壁面**

内法线方向为Y轴方向，面积为$\delta z\delta x$，在该面上产生反抗外力的弹性力为

$$\Delta \vec{F}_2 = \vec{T}_2\ \delta x\delta z$$

其中$\vec{T}_2 = \{T_{yx},\ T_{yy},\ T_{yz}\}$

3. PAFE壁面

内法线方向为Z轴方向，面积为$\delta x\delta y$，在该面上产生反抗外力的弹性力为

$$\Delta \vec{F}_3 = \vec{T}_3\ \delta x\delta y$$

其中$T_3 = \{T_{zx},\ T_{zy},\ T_{zz}\}$

当立方体体积元很小时，所有的应力可以认为是在P点上的。总共有九个分量，以矩阵形式表示

$$\begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix}$$

称二秩应力张量，其中T_{xx}、T_{yy}、T_{zz}为垂直壁面应力称法应力，其它为平行于壁面的应力称切应力。根据力矩平衡条件，有$T_{xy}=T_{yx}$、$T_{yz}=T_{zy}$、$T_{zx}=T_{xz}$，故上述张量又称二秩对称应力张量。

1.2 应力—应变关系和弹性常数

实验证明，对大多数固体，当外力不超过弹性极限值时，应力和应变成正比，这一实验规律叫胡克定律。

1.2.1 胡克定律的普遍形式

在各向异性介质中，任意一个方向上的应力可能使弹性体在各个方向上产生形变，也就是说六个应力分量的任意一个都是六个应变分量的线性函数，则

$$\begin{pmatrix} T_{xx} \\ T_{yy} \\ T_{zz} \\ T_{yz} \\ T_{zx} \\ T_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{zz} \\ e_{yz} \\ e_{zx} \\ e_{xy} \end{pmatrix} \qquad (1.2.1)$$

它共有36个弹性常数C_{ij}($i=1,2,\cdots\cdots,6$；$j=1,2,\cdots\cdots,6$)。Love证明，如果弹性能是应变的单值函数，则$C_{ij}=C_{ji}$，独立弹性常数的数目是21个❶，最复杂的晶体需要这21个弹性常数来确定应力—应变关系。在具有对称面的晶体中，数目可减少，立方形晶体只有3个弹性常数。

1.2.2 各向同性介质中的胡克定律

在均匀各向同性介质中，应力—应变关系与坐标系选择无关，由此得出独立的弹性常数只有2个，就是Lame常数λ和μ，μ又称切变模量❷。对于流体，μ等于零，故只需要知道λ。

❶见钱伟长、叶开源著：《弹性力学》第65～70页。

❷见钱伟长、叶开源著：《弹性力学》第71～76页。

在各向同性的固体中：

$$\left.\begin{aligned}\lambda &= C_{12}=C_{13}=C_{21}=C_{23}=C_{31}=C_{32}\\ \mu &= C_{44}=C_{55}=C_{66}=\tfrac{1}{2}(C_{11}-C_{12})\\ \lambda+2\mu &= C_{11}=C_{22}=C_{33}\end{aligned}\right\} \qquad (1.2.2)$$

其它所有弹性常数为零，由此（1.2.1）式简化成

$$\left.\begin{aligned}T_{xx} &= \lambda\Theta+2\mu e_{xx}\\ T_{yy} &= \lambda\Theta+2\mu e_{yy}\\ T_{zz} &= \lambda\Theta+2\mu e_{zz}\\ T_{yz} &= \mu e_{yz}\\ T_{zx} &= \mu e_{zx}\\ T_{xy} &= \mu e_{xy}\end{aligned}\right\} \qquad (1.2.3)$$

此即各向同性固体弹性介质的胡克定律。在各向同性的流体中，μ等于零，则

$$\left.\begin{aligned}T_{xx} &= -P=\lambda\Theta\\ T_{yy} &= -P=\lambda\Theta\\ T_{zz} &= -P=\lambda\Theta\end{aligned}\right\} \qquad (1.2.4)$$

式中P是流体静压力，从下面（1.2.9）式可知$\lambda=\kappa$，κ为体积弹性模量或不可压缩系数，则

$$-P=\kappa\Theta \qquad (1.2.5)$$

液体的κ值比气体大，对于不可压缩流体$\kappa=\infty$。

1.2.3 弹性常数

λ和μ完全确定各向同性弹性介质的弹性性质。然而，为了方便起见，常应用另外3个弹性常数，即杨氏模量E，泊松比σ及体积弹性模量κ。它们与λ、μ的关系如下：

1. 杨氏模量E

当弹性杆在与轴线垂直的截面受到均匀分布应力作用，而侧面不受力时，杨氏模量E就是所加应力与相对伸长之比。令X轴与弹性杆轴线平行，这时所加应力就是T_{xx}，其余5个应力分量都为零，（1.2.3）式变为

$$\begin{aligned}T_{xx} &= \lambda\Theta+2\mu e_{xx}\\ 0 &= \lambda\Theta+2\mu e_{yy}\\ 0 &= \lambda\Theta+2\mu e_{zz}\end{aligned}$$

由此解得：

$$e_{xx}=\frac{\lambda+\mu}{\mu(3\lambda+2\mu)}T_{xx}$$

$$e_{yy}=e_{zz}=\frac{-\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}T_{xx}$$

根据定义：

$$E=\frac{T_{xx}}{e_{xx}}=\frac{(3\lambda+2\mu)\mu}{\lambda+\mu} \qquad (1.2.6)$$

2. 泊松比σ

侧表面为自由的弹性杆，横向相对压缩（$-e_{yy}$）与纵向相对伸长e_{xx}之比值为泊松比。

$$\sigma=\frac{-e_{yy}}{e_{xx}}=\frac{\frac{\lambda T_{xx}}{2\mu(3\lambda+2\mu)}}{\frac{(\lambda+\mu)T_{xx}}{\mu(3\lambda+2\mu)}}=\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \tag{1.2.7}$$

3. 体积弹性模量κ

当固体受均匀的静压时，所加压力P与体积相对减小（$-\Theta$）之比称体积压缩模量κ。根据式（1.2.3），

$$T_{xx}=-P=\lambda\Theta+2\mu e_{xx}$$
$$T_{yy}=-P=\lambda\Theta+2\mu e_{yy}$$
$$T_{zz}=-P=\lambda\Theta+2\mu e_{zz}$$
$$T_{yz}=T_{zx}=T_{xy}=0$$

由此得

$$P=-\frac{1}{3}(3\lambda+2\mu)\Theta$$

$$\kappa=\frac{P}{-\Theta}=\lambda+\frac{2}{3}\mu \tag{1.2.8}$$

对于流体，$\mu=0$

故

$$\kappa=\lambda \tag{1.2.9}$$

已知E和σ，也可将λ、μ计算出来

$$\left.\begin{aligned}\lambda&=\frac{\sigma E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\\ \mu&=\frac{E}{2(1+\sigma)}\end{aligned}\right\} \tag{1.2.10}$$

1.3 固体和流体的运动方程

为导出弹性介质的波动方程，先对立方体体积元进行受力分析。

1.3.1 立方体体积元受力分析

立方体体积元共有6个壁面，每个壁面受到3个弹性力分量作用，共有18个弹性力分量，按图1.3.1进行逐面分析：

1）外法线为$-X$方向的壁面，面积为dydz，3个弹性力分量分别为

$$T_{-xx}dydz=-T_{xx}(x,y,z)dydz$$
$$T_{-xy}dydz=-T_{xy}(x,y,z)dydz$$
$$T_{-xz}dydz=-T_{xz}(x,y,z)dydz$$

与此对应，外法线X方向的壁面，面积为dydz，其弹性力分量为

$$T'_{xx}dydz=T_{xx}(x+dx,y,z)dydz=\left(T_{xx}+\frac{\partial T_{xx}}{\partial x}dx\right)dydz$$

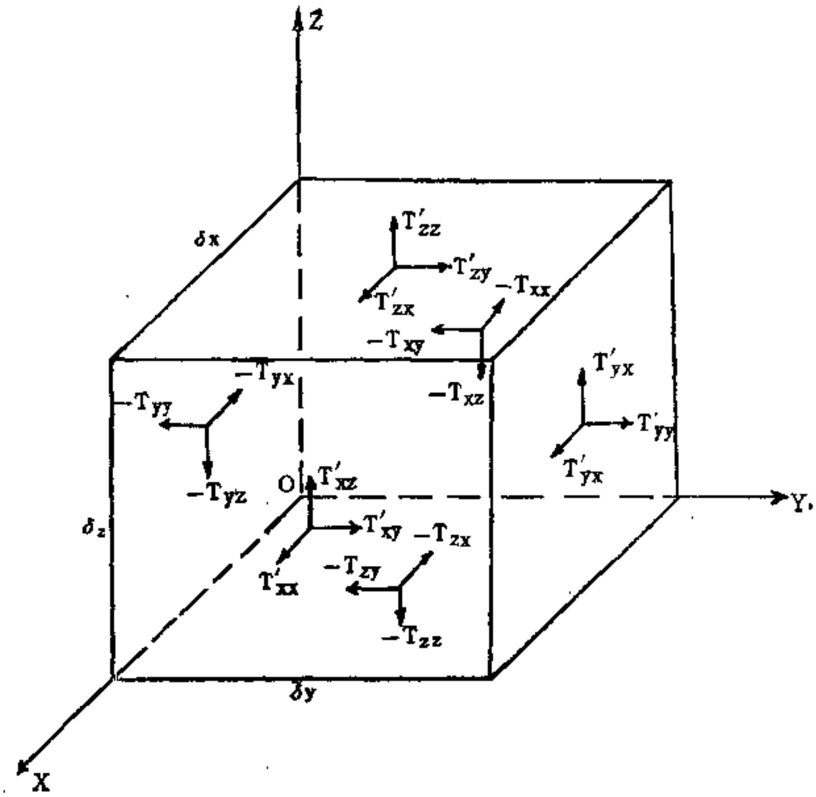

图1.3.1　立方体体积元弹性力分析

$$T'_{xy}dydz = T_{xy}(x+dx, y, z)dydz = \left(T_{xy} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial x}dx\right)dydz$$

$$T'_{xz}dydz = T_{xz}(x+dx, y, z)dydz = \left(T_{xz} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial x}dy\right)dydz$$

2）外法线为－Y方向的壁面，面积为 dxdz，其弹性力分量为

$$T_{-yx}dxdz = -T_{yx}(x, y, z)dxdz$$

$$T_{-yy}dxdz = -T_{yy}(x, y, z)dxdz$$

$$T_{-yz}dxdz = -T_{yz}(x, y, z)dxdz$$

与此对应，外法线为Y方向的壁面，面积为 dxdz，其弹性力分量为

$$T'_{yx}dxdz = T_{yx}(x, y+dy, z)dxdz = \left(T_{yx} + \frac{\partial T_{yx}}{\partial y}dy\right)dxdz$$

$$T'_{yy}dxdz = T_{yy}(x, y+dy, z)dxdz = \left(T_{yy} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y}dy\right)dxdz$$

$$T'_{yz}dxdz = T_{yz}(x, y+dy, z)dxdz = \left(T_{yz} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial y}dy\right)dxdz$$

3）外法线为－Z方向的壁面，面积为 dxdy，其弹性力分量为

$$T_{-zx}dxdy = -T_{zx}(x, y, z)dxdy$$

$$T_{-zy}dxdy = -T_{zy}(x, y, z)dxdy$$

$$T_{-zz}dxdy=-T_{zz}(x,y,z)dxdy$$

与此对应，外法线为Z方向的壁面，面积为 dxdy，其弹性力分量为

$$T'_{zx}dxdy=T_{zx}(x,y,z+dz)dxdy=\left(T_{zx}+\frac{\partial T_{zx}}{\partial z}dz\right)dxdy$$

$$T'_{zy}dxdy=T_{zy}(x,y,z+dz)dxdy=\left(T_{zy}+\frac{\partial T_{zy}}{\partial z}dz\right)dxdy$$

$$T'_{zz}dxdy=T_{zz}(x,y,z+dz)dxdy=\left(T_{zz}+\frac{\partial T_{zz}}{\partial z}dz\right)dxdy$$

另外作用在立方体体积元上的体力有3个分量。设 f 为单位质量所受的力，立方体体积元质量为dm，则所受的体力

$$d\vec{F}=\vec{f}dm=\vec{f}\rho dxdydz$$

它在X、Y、Z方向三个分量为

$$f_x\rho dxdydz$$
$$f_y\rho dxdydz$$
$$f_z\rho dxdydz$$

1.3.2 力平衡方程

立方体体积元处于平衡状态，由牛顿第一定律知，各坐标轴方向的分力的代数和应等于零，在X轴方向共有 6个面力和 1个体力：

$$\Sigma F_x=(T'_{xx}-T_{xx})dydz+(T'_{yx}-T_{yx})dxdz$$
$$+(T'_{zx}-T_{zx})dxdy+f_x\rho dxdydz=0$$

化简得

$$\frac{\partial T_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial T_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial T_{zx}}{\partial z}+f_x\rho=0$$

已知应力为二秩对称应力张量，且$T_{ij}=T_{ji}$则

$$\frac{\partial T_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial T_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial T_{xz}}{\partial z}+f_x\rho=0$$

同理，在Y、Z轴方向$\Sigma_y=0$，$\Sigma F_z=0$，分别得

$$\frac{\partial T_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial T_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial T_{yz}}{\partial z}+f_y\rho=0$$

$$\frac{\partial T_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial T_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial T_{zz}}{\partial z}+f_z\rho=0 \qquad (1.3.1)$$

式(1.3.1)消除了立方体体积元的影响，成为弹性体的力平衡方程。

1.3.3 力矩平衡方程

立方体体积元没有转动的条件是绕各坐标轴的力矩之和为零，即

$$\Sigma M_x=0,\ \Sigma M_y=0,\ \Sigma M_z=0$$

先分析绕X轴的力矩，规定：①所有弹性力都集中在体积元相应壁面中心，体力集中在体积元中心；②将X旋转轴移至体积元法线为X轴方向的壁面中心；③逆时针方向力矩为正。由于立方体体积元上有18个面力3个体力，列表1-1分析其力矩情况。

表1—1

壁面法线方向	弹性力或体力	离旋转轴距离	对应壁面法线方向	弹性力或体力	离旋转轴距离	力矩
X	$T'_{xx}dydz$ $T'_{xy}dydz$ $T'_{xz}dydz$	与轴平行 0 0	$-X$	$-T_{xx}dydz$ $-T_{xy}dydz$ $-T_{xz}dydz$	与轴平行 0 0	0
Y	$T'_{yx}dxdz$ $T'_{yy}dxdz$ $T'_{yz}dxdz$	与轴平行 0 $^1/_2dy$	$-Y$	$-T_{yx}dxdz$ $-T_{yy}dxdz$ $-T_{yz}\ dxdz$	与轴平行 0 $^1/_2dy$	$(T'_{yz}+T_{yz})\cdot {^1/_2}dxdydz$
Z	$T'_{zx}\ dxdy$ $T'_{zy}\ dxdy$ $T'_{zz}\ dxdy$	与轴平行 $^1/_2dz$ 0	$-Z$	$-T_{zx}\ dxdy$ $-T_{zy}\ dxdy$ $-T_{zz}\ dxdy$	与轴平行 $^1/_2dz$ 0	$-(T'_{zy}+T_{zy})$ $\cdot {^1/_2}dxdydz$
体力		0				0

得出

$$\Sigma M_x=[(T'_{yz}+T_{yz})-(T'_{zy}+T_{zy})]\cdot\frac{1}{2}dxdydz=0$$

$\therefore$ $\qquad T_{yz}=T_{zy}$

同理，绕Y轴的力矩$\Sigma M_y=0$，得

$$T_{xz}=T_{zx}$$

绕Z轴的力矩$\Sigma M_z=0$，得

$$T_{xy}=T_{yx}$$

此结果证明了应力张量的对称性。

1.3.4 运动方程

立方体体积元在外力场作用下，在X、Y、Z轴方向的加速度分别为$\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}$、$\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}$、$\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}$根据牛顿第二定律

$$\Sigma F_x=\rho dV\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}$$

$$\Sigma F_y=\rho dV\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}$$

$$\Sigma F_z=\rho dV\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}$$

得

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial T_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial T_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial T_{xz}}{\partial z}+\rho f_x=\rho\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}\\
&\frac{\partial T_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial T_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial T_{yz}}{\partial z}+\rho f_y=\rho\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}\\
&\frac{\partial T_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial T_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial T_{zz}}{\partial z}+\rho f_z=\rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}
\end{aligned}\right\}\qquad(1.3.2)$$

此方程对各向同性的和各向异性的弹性介质都适合。它有9个未知数（T_{xx}、T_{yy}、T_{zz}、T_{xy}、T_{yz}、T_{zx}、u_x、u_y、u_z），3个方程是不能解9个未知数，引进胡克定律6个方程就可解此9个未知数。已知均匀各向同性介质的胡克定律表达式最简单，因此尽可能将弹性介质按均匀各向同性介质处理。如裸眼井声波测井，可将整个场的定义域分成若干部分（井筒部分、地层部分），在每一部分中介质可以认为是均匀介质，称为分区均匀介质，在每个分区介质内求解微分方程，然后按边界条件将求得的解“衔接”起来，得到整个定义域中的解。

将均匀介质胡克定律表达式（1.2.3）代入式（1.3.2），经整理得

$$\left.\begin{aligned}(\lambda+\mu)\frac{\partial\Theta}{\partial x}+\mu\nabla^2u_x+\rho f_x&=\rho\frac{\partial^2u_x}{\partial t^2}\\(\lambda+\mu)\frac{\partial\Theta}{\partial y}+\mu\nabla^2u_y+\rho f_y&=\rho\frac{\partial^2u_y}{\partial t^2}\\(\lambda+u)\frac{\partial\Theta}{\partial z}+\mu\nabla^2u_z+\rho f_z&=\rho\frac{\partial^2u_z}{\partial t^2}\end{aligned}\right\}\qquad(1.3.3)$$

式中拉普拉斯算子 $\nabla^2=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$。将这组方程写成矢量形式

$$(\lambda+\mu)\nabla\Theta+\mu\nabla^2\vec{u}+\rho\vec{f}=\rho\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}\qquad(1.3.4)$$

或
$$(\lambda+\mu)\mathrm{grad\ div}\ \vec{u}+\mu\nabla^2\vec{u}+\rho\vec{f}=\rho\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}$$

式（1.3.3）或（1.3.4）只有3个未知数，用3个方程就可求解。

对于流体，$\mu=0$和$\lambda=\kappa$，不计体力，得

$$\left.\begin{aligned}\kappa\frac{\partial\Theta}{\partial x}&=\rho\frac{\partial^2u_x}{\partial t^2}\\\kappa\frac{\partial\Theta}{\partial y}&=\rho\frac{\partial^2u_y}{\partial t^2}\\\kappa\frac{\partial\Theta}{\partial z}&=\rho\frac{\partial^2u_z}{\partial t^2}\end{aligned}\right\}\qquad(1.3.5)$$

写成矢量形式

$$\kappa\nabla\Theta=\rho\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}$$

或
$$\kappa\mathrm{grad\ div}\vec{u}=\rho\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}$$

1.4 固体和流体的波动方程

1.4.1 用势函数Φ和Ψ表示的波动方程

引进两个势函数，令

$$\vec{u}=\vec{u}_c+\vec{u}_s=\nabla\Phi+\nabla\times\vec{\Psi}$$