·工科数学教学参考丛书(一)·

高等数学常见题型分析

四川工业学院数学教研室 编

电子科技大学出版社

工科数学教学参考丛书

高 等 数 学

常 见 题 型 分 析

四川工业学院数学教研室 主编

电子科技大学出版社

内 容 提 要

本书是《工科数学教学参考丛书》的第一册，书中简明地列出了高等数学的常见题型并结合例子分析其解法，以帮助学生加深对所学概念与公式的理解，提高解决问题的技能。本书也可供教师讲授高等数学习题课时参考。

工科数学教学参考丛书

高等数学常见题型分析

四川工业学院数学教研室　主编

*

电子科技大学出版社出版

（成都建设北路二段四号）邮编 610054

四川省仁寿县印刷厂印装

新华书店经销

*

开本　850×1168　1/32　印张 9.5　字数 250 千字

版次 1996 年 2 月第一版　印次　1997 年 1 月第二次印刷

印数 6001－9000 册

ISBN7-81043-490-X/O・43

定价 9.80 元

前　言

作为工科院校重点课程建设内容之一，我们编写了这套《工科数学教学参考丛书》。该书是这丛书中的第一册，编写时按工科《高等数学教学大纲》的要求，简明地列出了高等数学的常见题型并结合例子分析其解法，以帮助学生加深对所学概念的理解和提高解决问题的技能。它也可供教师讲授高等数学习题课时参考。

书中的选例以工科院校考试的中等难度的题目为主，未选入超出通常考试要求的过难、过繁的例子，以使学生易于阅读与掌握。对于各院校考试中使用较少的客观性试题(如是非题、选择题等)书中也未选入。为了便于复习时使用，有少数章节也偶尔选入了涉及后面章节所述概念的例子，对于初学者，可暂时跳过它而不会影响对其它题型的阅读与理解。

本书的编写得到了学院和基础科学部领导的热忱指导与支持，在此表示感谢！书中各章依次由我室鲁家琳、伊良忠、何明星与朱　雯、蒲　俊、张文忠、陈　华、杨孝春、彭　谦、龚茵杰、陈绍炀、张成武等老师编写，由蔺大正老师绘图，最后由主编张文忠统稿，由许蜀麟、张　浩审阅校核。

愿本书能在促进高等数学教学质量的提高上起到有益的作用。限于编者水平，有不妥之处，敬请识者指正。

四川工业学院基础科学部
数学教研室　　1995.8.

目 录

第一章　函数与极限

题型一　函数的概念与性质

(一)　求函数的表达式

例 1　设 $f(x+3)=\dfrac{x+1}{x+2}$，求 $f(x)$.

解　令 $x+3=t$，则 $x=t-3$.

所以　$f(x+3)=\dfrac{t-3+1}{t-3+2}=\dfrac{t-2}{t-1}$，

即　$f(t)=\dfrac{t-2}{t-1}$，所以　$f(x)=\dfrac{x-2}{x-1}$.

注　上题是利用函数的表示法与用什么字母表示无关的“特性”，这是一种常用的方法.

例 2　设 $f(\dfrac{1}{x})=x+\sqrt{1+x^2}\quad(x\neq 0)$，求 $f(x)$.

解　令 $\dfrac{1}{x}=t$，则 $x=\dfrac{1}{t}$.

所以　$f(t)=\dfrac{1}{t}+\sqrt{1+(\dfrac{1}{t})^2}=\dfrac{1}{t}+\dfrac{\sqrt{1+t^2}}{|t|}$，

即
$$f(x)=\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}\qquad(x\neq 0).$$

例 3　设 $f(x\operatorname{tg}\dfrac{x}{2})=(x+\sin x)\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+\cos x$，求 $f(x)$.

解　$(x+\sin x)\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=x\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+\dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$

$$= x\,\text{tg}\frac{x}{2} + 2 - \frac{2}{1+\text{tg}^2\frac{x}{2}},$$

$$\cos x = \frac{1-\text{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\text{tg}^2\frac{x}{2}} = -1 + \frac{2}{1+\text{tg}^2\frac{x}{2}},$$

故　$f(x\,\text{tg}\frac{x}{2}) = x\,\text{tg}\frac{x}{2} + 1$，所以　$f(x) = x+1$.

例 4　$f(t) = \lim\limits_{x\to\infty} t(1+\frac{1}{x})^{2tx}$，求 $f(t)$.

解　$f(t) = \lim\limits_{x\to\infty} t\,[(1+\frac{1}{x})^{x}]^{2t} = t\,e^{2t}$，

注　此题是利用极限运算求函数的表达式. 同样的方法可求得下题.

例 5　$f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x^n}{1+x^n}$　$(x \geqslant 0)$.

解　当 $0 \leqslant x < 1$ 时，$f(x) = 0$，

$x = 1$ 时，$f(x) = \frac{1}{2}$，

$x > 1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n}{1+x^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^n} = 1$，

故　$f(x) = 1$，

所以
$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x < 1, \\ \frac{1}{2}, & x = 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

(二)　求函数的定义域

例 1　求 $y = \log_{x-1}(16 - x^2)$ 的定义域.

解 由 $\begin{cases}16-x^2>0,\\x-1>0,\\x-1\neq 1,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-4<x<4,\\x>1,\\x\neq 2,\end{cases}$

故函数的定义域为 $1<x<2$ 及 $2<x<4$.

例 2 已知 $f(x)=\sin x$, $f[\varphi(x)]=1-x^2$，求 $\varphi(x)$ 及其定义域.

解 $f[\varphi(x)]=1-x^2=\sin[\varphi(x)]$,

故 $$\varphi(x)=\arcsin(1-x^2).$$

由 $-1\leqslant 1-x^2\leqslant 1$，即 $0\leqslant x^2\leqslant 2$.

所以 $\varphi(x)$ 的定义域为 $x\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

例 3 已知 $f(x)=e^{x^2}$，而 $f[\varphi(x)]=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$，试求函数 $\varphi(x)$ 及其定义域.

解 $f[\varphi(x)]=e^{\varphi^2(x)}=1-x$,

故 $$\varphi^2(x)=\ln(1-x).$$

而 $\varphi(x)\geqslant 0$，所以 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$.

$\varphi(x)$ 的定义域为 $1-x\geqslant 1$，即 $x\leqslant 0$.

（三） 求函数的值域

例 1 求 $y=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+17$ 的值域.

解 采用配方法,

$$\begin{aligned}y&=[(x-1)(x-4)][(x-2)(x-3)]+17\\&=(x^2-5x+5-1)(x^2-5x+5+1)+17\\&=(x^2-5x+5)^2+16,\end{aligned}$$

故 $$y\in[16,+\infty).$$

例 2 求 $y=\dfrac{3}{x^2-x+1}$ 的值域.

解 应用判别式法，将原式改写为 $x^2y-xy+y-3=0$，

由 $\Delta=(-y)^2-4y(y-3)\geqslant 0$，得 $y(12-3y)\geqslant 0$，

即 $0\leqslant y\leqslant 4$. 显然 $y\neq 0$，故 $y\in(0,4]$.

例 3 求 $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ 的值域.

解 应用反函数法，当 $x\neq 1$ 时，由原式可知

$$xy-y=x+2$$

即 $x=\dfrac{y+2}{y-1}$，$y\neq 1$，

由此得 $y\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

例 4 求 $y=\dfrac{4x-3}{x^2+1}$ 的值域.

解 应用导数法. $y'=\dfrac{-4x^2+6x+4}{(x^2+1)^2}$.

令 $y'=0$，得 $x_1=2$，$x_2=-\dfrac{1}{2}$.

经计算可得 $f''(x_1)<0$，$f''(x_2)>0$，故当 $x=2$ 时，

$f(x)$ 有极大值 1；当 $x=-\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 有极小值 -4，

又因 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x-3}{x^2+1}=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x-3}{x^2+1}=0$，

故 $f(2)=1$，$f(-\dfrac{1}{2})=-4$. 分别是 $f(x)$ 的最大值和最小值，

因此 $$f(x)\in[-4,1].$$

（四） 函数的性质

例 1 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有定义，$x_1>0$，$x_2>0$，

求证:

(1) 若$\dfrac{f(x)}{x}$单调下降，则 $f(x_1+x_2)\leqslant f(x_1)+f(x_2)$;

(2) 若$\dfrac{f(x)}{x}$单调上升，则 $f(x_1+x_2)\geqslant f(x_1)+f(x_2)$.

证 (1) 因$\dfrac{f(x)}{x}$单调下降，$x_1>0$, $x_2>0$, $x_1+x_2>x_1$, $x_1+x_2>x_2$. 故有

$$\frac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2}\leqslant\frac{f(x_1)}{x_1},\qquad \frac{x_1 f(x_1+x_2)}{x_1+x_2}\leqslant f(x_1),$$

$$\frac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2}\leqslant\frac{f(x_2)}{x_2},\qquad \frac{x_2 f(x_1+x_2)}{x_1+x_2}\leqslant f(x_2),$$

上两式相加得 $f(x_1+x_2)\leqslant f(x_1)+f(x_2)$.

同理可证(2).

例 2 $f(x)$是$(-\infty,+\infty)$内连续的偶函数，且 $F(x)=\int_0^x (x-2t)f(t)\,dt$，判断函数$F(x)$的奇偶性.

解 $F(-x)=\int_0^{-x}(-x-2t)f(t)\,dt$

$$\xlongequal{u=-t}\int_0^x(-x+2u)f(-u)(-d\,u)$$

$$=\int_0^x(x-2u)f(u)\,du=F(x).$$

所以 $F(x)$为偶函数.

例 3 (1) 若$f(x)$为可导的周期函数，问$f'(x)$、$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$是否为周期函数?

(2) $f(x)$、$g(x)$都是周期函数，问$f(x)+g(x)$是否为周期函数?

解 (1) $f(x)$为周期函数，设周期为T，则

$f(x+T)=f(x)$，两边对 x 求导得 $f'(x+T)=f'(x)$，即 $f'(x)$ 为周期函数.

而 $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ 不一定为周期函数，例如 $f(x)=\cos x+1$ 为周期函数，而 $F(x)=\int_0^x(\cos t+1)\,dx=\sin x+x$ 非周期函数.

(2) $f(x)+g(x)$ 不一定为周期函数，例如

$f(x)=\sin x$，其周期 $T_1=2\pi$，

$g(x)=\sin\sqrt{2}\,x$，其周期 $T_2=\frac{2\pi}{\sqrt{2}}$.

若 $f(x)+g(x)=\sin x+\sin\sqrt{2}\,x$ 为周期函数，则有周期 T 是 2π 和 $\frac{2\pi}{\sqrt{2}}$ 的最小公倍数，即 $T=2\pi m$，$T=\frac{2\pi}{\sqrt{2}}n$，所以 $\frac{m}{n}=\frac{1}{\sqrt{2}}$，这是不可能的.

题型二 求数列的极限

（一） 经过变形求数列的极限

例 1 计算数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2a^n+3(-b)^n}{2a^{n+1}+3(-b)^{n+1}}$ $(a>b>0)$.

解 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2+3(-\frac{b}{a})^n}{2a-3b(-\frac{b}{a})^n}=\frac{1}{a}$.

注 该法关键在于认清分子、分母中绝对值最大的项，分子、分母同除以 a^n.

例 2 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n})}{(n+1)+2(n+2)+\cdots+n(n+n)}$.

解 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3\cdot\dfrac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}}{n^2\cdot\dfrac{n+1}{2}+\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2[1-(\frac{1}{2})^{n+1}]}{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{n})+\frac{1}{6}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})}$$

$$=\frac{2}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}=\frac{12}{5}.$$

注 求这类极限时，先将分子、分母中的无穷多项利用求和公式化为有限多项，再采用例 1 的方法.

例 3 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n})\quad(x\neq 0)$.

解 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin x}{2\sin\frac{x}{2}}\cdot\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{4}}\cdot\dfrac{\sin\frac{x}{4}}{2\sin\frac{x}{8}}\cdots\dfrac{\sin\frac{x}{2^{n-1}}}{2\sin\frac{x}{2^n}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}$$

$$=\frac{\sin x}{x}.$$

注 本题是利用三角函数之间的关系，将无穷多个因式的积化为有限多个因式的积，再利用重要极限.

例 4 利用定积分的定义求极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}(\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n}+\frac{2}{n}\cos\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n-1}{n}\cos\frac{n-1}{n}+\cos 1).$$

解 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}(\frac{i}{n}\cos\frac{i}{n})\cdot\frac{\pi}{n}=\pi\int_0^1 x\cos x\,dx$

$$=\pi[\sin 1+\cos 1-1].$$