

·工科数学教学参考丛书(一)·

高等数学 常见题型分析

四川工业学院数学教研室 编



电子科技大学出版社

013-44

S71

工科数学教学参考丛书

高等数学

常见题型分析

四川工业学院数学教研室 主编

电子科技大学出版社

内 容 提 要

本书是《工科数学教学参考丛书》的第一册，书中简明地列出了高等数学的常见题型并结合例子分析其解法，以帮助学生加深对所学概念与公式的理解，提高解决问题的技能。本书也可供教师讲授高等数学学习题课时参考。

工科数学教学参考丛书
高等数学常见题型分析

四川工业学院数学教研室 主编

*

电子科技大学出版社出版
(成都建设北路二段四号)邮编 610054

四川省仁寿县印刷厂印装

新华书店经销

*

开本 850×1168 1/32 印张 9.5 字数 250千字
版次 1996年2月第一版 印次 1997年1月第二次印刷

印数 6001—9000册

ISBN7-81043-490-X/O·43

定价 9.80元

前 言

作为工科院校重点课程建设内容之一，我们编写了这套《工科数学教学参考丛书》。该书是这丛书中的第一册，编写时按工科《高等数学教学大纲》的要求，简明地列出了高等数学的常见题型并结合例子分析其解法，以帮助学生加深对所学概念的理解和提高解决问题的技能。它也可供教师讲授高等数学学习题课时参考。

书中的选例以工科院校考试的中等难度的题目为主，未选入超出通常考试要求的过难、过繁的例子，以使学生易于阅读与掌握。对于各院校考试中使用较少的客观性试题(如是非题、选择题等)书中也未选入。为了便于复习时使用，有少数章节也偶尔选入了涉及后面章节所述概念的例子，对于初学者，可暂时跳过它而不会影响对其它题型的阅读与理解。

本书的编写得到了学院和基础科学部领导的热忱指导与支持，在此表示感谢！书中各章依次由我室鲁家琳、伊良忠、何明星与朱 雯、蒲 俊、张文忠、陈 华、杨孝春、彭 谦、黄茵杰、陈绍炆、张成武等老师编写，由简大正老师绘图，最后由主编张文忠统稿，由许蜀麟、张 浩审阅校核。

愿本书能在促进高等数学教学质量的提高上起到有益的作用。限于编者水平，有不妥之处，敬请识者指正。

四川工业学院基础科学部
数学教研室 1995. 8.

目 录

第一章 函数与极限.....	(1)
题型一 函数的概念与性质.....	(1)
(一) 求函数的表达式 (1)	(二) 求函数的定义域 (2)
(三) 求函数的值域 (3)	(四) 函数的性质 (4)
题型二 求数列的极限.....	(6)
(一) 经过变形求数列的极限 (6)	
(二) 利用极限存在准则求极限 (8)	
题型三 求未定式的极限.....	(10)
(一) $\frac{0}{0}$ 型的极限 (10)	(二) $\frac{\infty}{\infty}$ 型的极限 (11)
(三) $\infty - \infty$ 型的极限 (11)	(四) $0 \cdot \infty$ 型的极限 (13)
(五) $0^0, \infty^0, 1^\infty$ 三类极限 (14)	
题型四 极限存在性的讨论.....	(15)
题型五 极限式中常数的确定.....	(17)
题型六 函数的连续性.....	(18)
(一) 连续性的判断 (18)	(二) 间断点及其类型的判定 (19)
(三) 闭区间上连续函数的命题的证明 (20)	
第二章 导数与微分.....	(23)
题型一 按定义求导数.....	(23)
(一) 求函数在一点处的导数 (23)	(二) 判断函数是否可导 (24)
(三) 分段函数在分点处的导数 (25)	
题型二 按公式求导数.....	(28)
(一) 利用基本初等函数及和、差、积、商的求导公式计算导数 (28)	
(二) 复合函数求导数 (29)	(三) 利用对数求导法求导数 (30)
(四) 隐函数及反函数求导 (32)	(五) 参数方程所确定的函数

求导数 (33) (六) 变上限积分求导数 (34)	
题型三 求高阶导数.....	(34)
题型四 求微分.....	(36)
题型五 相关变化率.....	(37)
第三章 中值定理与导数的应用.....	(39)
题型一 中值问题.....	(39)
(一) 验证中值定理 (39) (二) 用中值定理证明等式 (41)	
(三) 用中值定理证明不等式 (44) (四) 用中值定理判定方	
程根的情况 (48) (五) 用泰勒中值定理求极限 (50)	
题型二 按罗比达法则求极限.....	(51)
(一) “ $\frac{0}{0}$ ”型 (51) (二) “ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型 (53) (三) “ $0 \cdot \infty$ ”型、	
“ $\infty - \infty$ ”型 (54) (四) “ 1^∞ ”型 “ 0^0 ”型、“ ∞^0 ”型(56)	
题型三 求函数的单调区间与极值.....	(58)
(一) 求函数的单调区间 (58) (二) 求函数的极值 (59)	
(三) 求函数的最大值和最小值 (61)	
题型四 求函数的拐点与凹凸区间.....	(64)
题型五 作函数的图形.....	(66)
第四章 不定积分.....	(70)
题型一 运用基本积分公式积分.....	(70)
题型二 运用第一换元法(凑微分法)积分.....	(71)
题型三 运用第二换元法(变量置换法)积分.....	(77)
(一) $\int R(\sqrt{a^2 - x^2}) dx$ 型 ($ x < a$) (77) (二) $\int R(\sqrt{a^2 + x^2}) dx$	
型 (80) (三) $\int R(\sqrt{x^2 - a^2}) dx$ 型 (82) (四) $\int R(\sqrt{ax + b}) dx$	
型(82) (五) $\int R(x, \sqrt{ax + b}, \sqrt[3]{ax + b}) dx$ 型(83) (六) 其它(84)	
题型四 运用分部积分法积分.....	(86)
(一) $\int P_n(x)e^{mx} dx, \int P_n(x) \sin mx dx, \int P_n(x) \cos mx dx$ 型 (86)	
(二) $\int P_n(x) \ln x dx, \int P_n(x) \arcsin x dx, \int P_n(x) \operatorname{arctg} x dx$ 型 (89)	

(三) $\int e^{ax} \sin \beta x dx, \int e^{ax} \cos \beta x dx$ 型 (92)	(四) 其它 (94)
题型五 分式有理函数的积分	(96)
题型六 三角有理式的积分	(98)
(一) 利用三角函数积化和差公式 (98)	(二) 利用倍角半角公式 (99)
(三) 利用万能公式 (99)	(四) 其它 (101)
第五章 定积分	(103)
题型一 定积分的性质	(103)
(一) 比较大小 (103)	(二) 估值 (104)
(三) 函数的均值 (106)	(四) 求函数 (106)
题型二 定积分的计算	(107)
(一) 使用微积分基本公式 (107)	(二) 利用换元法计算 (108)
(三) 利用分部积分法计算 (113)	(四) 利用递推公式 (115)
(五) 利用函数的奇偶性 (116)	(六) 利用定积分的定义 (117)
题型三 有关的证明	(119)
题型四 广义积分	(122)
(一) 无限区间上的积分 (122)	(二) 无界函数的广义积分 (123)
题型五 积分上限的函数	(124)
(一) 求函数 $f(x)$ (124)	(二) 求导数 (125)
(三) 求极限 (127)	(四) 求极值 (129)
第六章 定积分的应用	(130)
题型一 求平面图形的面积	(130)
题型二 求曲线的长度	(132)
题型三 求体积	(133)
(一) 求旋转体的体积 (133)	(二) 求平行截面面积为已知的立体体积 (138)
题型四 求变力所作的功	(139)
题型五 求水压力	(140)
题型六 求引力	(141)
题型七 求函数的平均值	(142)

第七章 空间解析几何与向量代数	(143)
题型一 向量的运算	(143)
(一) 向量的运算 (143) (二) 用向量运算解有关的几何问题 (146)	
题型二 曲面方程	(147)
(一) 按条件求曲面方程 (147) (二) 由方程判别曲面形状 (149)	
题型三 空间曲线的方程	(150)
题型四 求平面方程	(153)
题型五 求空间直线方程	(155)
题型六 求夹角与距离	(157)
(一) 求夹角 (157) (二) 求距离 (158)	
题型七 综合题	(160)
第八章 多元函数微分法及其应用	(163)
题型一 多元函数极限的判定与计算	(163)
(一) 判定二元函数的极限是否存在 (163) (二) 利用函数的连续性 与极限四则运算性质计算极限 (164) (三) 转化为一元函数的 极限问题 (165) (四) 利用夹逼法则求极限 (166)	
题型二 求函数的偏导数	(167)
(一) 对具体的函数求偏导数 (167) (二) 对抽象的复合函数求 偏导数 (169) (三) 对隐函数求偏导数 (170)	
题型三 微分法在几何上的应用	(175)
(一) 求空间曲线的切线与法平面 (175) (二) 求曲面的切平面 与法线 (177)	
题型四 求函数的方向导数与梯度	(179)
题型五 求多元函数的极值及应用	(181)
(一) 求多元函数的无条件极值 (181)	
(二) 求最大(小)值的应用题 (182)	
第九章 重积分	(185)
题型一 二重积分性质的应用	(185)
(一) 利用性质进行证明 (185) (二) 利用性质估值 (186)	

题型二 二重积分的计算.....	(188)
(一) 按一般步骤计算 (188)	(二) 将区域分片后计算 (191)
(三) 交换积分次序后计算 (192)	(四) 交换坐标系后计算 (193)
* (五) 变量替换 (194)	(六) 利用对称性计算 (196)
(七) 被积函数为绝对值的情况 (199)	
题型三 三重积分的计算.....	(200)
(一) 利用直角坐标系计算 (200)	(二) 利用柱坐标系计算 (203)
(三) 利用球坐标系计算 (203)	
题型四 重积分的应用.....	(206)
(一) 求平面图形的面积 (206)	(二) 求曲面的面积 (206)
(三) 求几何体的体积 (207)	(四) 求物体的质量 (208)
(五) 求物体的重心 (209)	(六) 求转动惯量 (210)
(七) 求引力 (211)	
第十章 曲线积分与曲面积分.....	(213)
题型一 曲线积分.....	(213)
(一) 对弧长的曲线积分 (213)	(二) 对坐标的曲线积分 (213)
题型二 格林公式及其推论.....	(217)
(一) 直接用格林公式 (217)	(二) 积分与路径无关的条件 (220)
(三) 二元函数的全微分求积 (222)	
题型三 曲面积分.....	(224)
(一) 对面积的曲面积分 (224)	(二) 对坐标的曲面积分及高斯公式 (230)
题型四 流量 散度·斯托克斯公式及旋度.....	(235)
第十一章 无穷级数.....	(238)
题型一 常数项级数收敛性的判定.....	(238)
(一) 正项级数的比较审敛法及其极限形式 (238)	(二) 正项级数的比值审敛法 (241)
(三) 正项级数的根值审敛法 (243)	
(四) 按级数收敛的必要条件判定 (243)	(五) 按级数收敛的定义判定(244)
(六) 交错级数收敛性及级数的绝对收敛和条件	

收敛性的判定 (245)	
题型二 求一般函数项级数的收敛域.....	(249)
题型三 求幂级数的收敛半径与收敛区间.....	(250)
(一) 一般情形($a_n \neq 0$)时幂级数的收敛半径与收敛区间	(250)
(二) 缺偶次(或奇次)项时幂级数收敛半径与收敛区间	(254)
题型四 求幂级数的和函数.....	(255)
题型五 求函数的幂级数展开式.....	(259)
(一) 直接展开法 (259)	(二) 间接展开法 (259)
题型六 傅立叶级数.....	(264)
(一) 将周期为 2π 的函数展开成傅立叶级数 (264)	(二) 将函数展开成正弦级数或余弦级数(267)
(三) 将周期为 $2l$ 的函数展开成傅立叶级数(270)	(四) 求函数的傅立叶级数的和函数 (271)
第十二章 微分方程.....	(273)
题型一 一阶微分方程的求解.....	(273)
(一) 可分离变量的微分方程 (273)	(二) 齐次方程 (275)
(三) 一阶线性微分方程 (276)	(四) 全微分方程 (278)
题型二 可降阶的高阶微分方程的求解.....	(279)
(一) $y^{(n)} = f(x)$ (279)	(二) $y'' = f(x, y')$ (280)
(三) $y'' = f(y, y')$ (281)	
题型三 二阶常系数齐次方程的求解.....	(282)
(一) 二阶常系数齐次线性微分方程 (282)	(二) 二阶常系数非齐次线性微分方程 (282)
(三) 线性方程解的构造 (285)	
题型四 微分方程的幂级数解法.....	(287)
题型五 微分方程的应用.....	(288)
(一) 求函数 (288)	(二) 几何问题 (289)
(三) 力学问题 (291)	(四) 热传导问题 (295)
(五) 微量分析法 (295)	

第一章 函数与极限

题型一 函数的概念与性质

(一) 求函数的表达式

例1 设 $f(x+3) = \frac{x+1}{x+2}$, 求 $f(x)$.

解 令 $x+3=t$, 则 $x=t-3$.

所以 $f(x+3) = \frac{t-3+1}{t-3+2} = \frac{t-2}{t-1}$,

即 $f(t) = \frac{t-2}{t-1}$, 所以 $f(x) = \frac{x-2}{x-1}$.

注 上题是利用函数的表示法与用什么字母表示无关的“特性”, 这是一种常用的方法.

例2 设 $f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1+x^2}$ ($x \neq 0$), 求 $f(x)$.

解 令 $\frac{1}{x} = t$, 则 $x = \frac{1}{t}$.

所以 $f(t) = \frac{1}{t} + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{t}\right)^2} = \frac{1}{t} + \frac{\sqrt{1+t^2}}{|t|}$,

即 $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}$ ($x \neq 0$).

例3 设 $f\left(x \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) = (x + \sin x) \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \cos x$, 求 $f(x)$.

解 $(x + \sin x) \operatorname{tg} \frac{x}{2} = x \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}$

$$= x \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2 - \frac{2}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}},$$

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = -1 + \frac{2}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}},$$

故 $f(x \operatorname{tg} \frac{x}{2}) = x \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1$, 所以 $f(x) = x + 1$.

例 4 $f(t) = \lim_{x \rightarrow \infty} t(1 + \frac{1}{x})^{2tx}$, 求 $f(t)$.

$$\text{解 } f(t) = \lim_{x \rightarrow \infty} t[(1 + \frac{1}{x})^x]^{2t} = te^{2t},$$

注 此题是利用极限运算求函数的表达式. 同样的方法可求得下题.

$$\text{例 5 } f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{1 + x^n} \quad (x > 0).$$

解 当 $0 < x < 1$ 时, $f(x) = 0$,

$$x = 1 \text{ 时, } f(x) = \frac{1}{2},$$

$$x > 1 \text{ 时, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{1 + x^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + (\frac{1}{x})^n} = 1,$$

故 $f(x) = 1$,

$$\text{所以 } f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < 1, \\ \frac{1}{2}, & x = 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

(二) 求函数的定义域

例 1 求 $y = \log_{x-1}(16 - x^2)$ 的定义域.

$$\text{解 出 } \begin{cases} 16-x^2 > 0, \\ x-1 > 0, \\ x-1 \neq 1, \end{cases} \quad \text{得 } \begin{cases} -4 < x < 4, \\ x > 1, \\ x \neq 2, \end{cases}$$

故函数的定义域为 $1 < x < 2$ 及 $2 < x < 4$.

例 2 已知 $f(x) = \sin x$, $f[\varphi(x)] = 1 - x^2$, 求 $\varphi(x)$ 及其定义域.

$$\text{解 } f[\varphi(x)] = 1 - x^2 = \sin[\varphi(x)],$$

$$\text{故 } \varphi(x) = \arcsin(1 - x^2).$$

$$\text{由 } -1 \leq 1 - x^2 \leq 1, \text{ 即 } 0 \leq x^2 \leq 2.$$

所以 $\varphi(x)$ 的定义域为 $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

例 3 已知 $f(x) = e^{x^2}$, 而 $f[\varphi(x)] = 1 - x$, 且 $\varphi(x) \geq 0$, 试求函数 $\varphi(x)$ 及其定义域.

$$\text{解 } f[\varphi(x)] = e^{\varphi^2(x)} = 1 - x,$$

$$\text{故 } \varphi^2(x) = \ln(1 - x).$$

$$\text{而 } \varphi(x) \geq 0, \text{ 所以 } \varphi(x) = \sqrt{\ln(1 - x)}.$$

$\varphi(x)$ 的定义域为 $1 - x \geq 1$, 即 $x \leq 0$.

(三) 求函数的值域

例 1 求 $y = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + 17$ 的值域.

解 采用配方法,

$$\begin{aligned} y &= [(x-1)(x-4)][(x-2)(x-3)] + 17 \\ &= (x^2 - 5x + 5 - 1)(x^2 - 5x + 5 + 1) + 17 \\ &= (x^2 - 5x + 5)^2 + 16, \end{aligned}$$

故 $y \in [16, +\infty)$.

例2 求 $y = \frac{3}{x^2 - x + 1}$ 的值域.

解 应用判别式法, 将原式改写为 $x^2 y - xy + y - 3 = 0$,
由 $\Delta = (-y)^2 - 4y(y-3) \geq 0$, 得 $y(12-3y) \geq 0$,
即 $0 \leq y \leq 4$. 显然 $y \neq 0$, 故 $y \in (0, 4]$.

例3 求 $y = \frac{x+2}{x-1}$ 的值域.

解 应用反函数法, 当 $x \neq 1$ 时, 由原式可知

$$xy - y = x + 2$$

即 $x = \frac{y+2}{y-1}, y \neq 1,$

由此得 $y \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty).$

例4 求 $y = \frac{4x-3}{x^2+1}$ 的值域.

解 应用导数法. $y' = \frac{-4x^2 + 6x + 4}{(x^2+1)^2}.$

令 $y' = 0$. 得 $x_1 = 2, x_2 = -\frac{1}{2}.$

经计算可得 $f''(x_1) < 0, f''(x_2) > 0$, 故当 $x = 2$ 时,
 $f(x)$ 有极大值 1; 当 $x = -\frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 有极小值 -4,

又因 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x-3}{x^2+1} = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x-3}{x^2+1} = 0,$

故 $f(2) = 1, f(-\frac{1}{2}) = -4$. 分别是 $f(x)$ 的最大值和最小值,

因此 $f(x) \in [-4, 1].$

(四) 函数的性质

例1 设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有定义, $x_1 > 0, x_2 > 0,$

求证:

(1) 若 $\frac{f(x)}{x}$ 单调下降, 则 $f(x_1 + x_2) < f(x_1) + f(x_2)$;

(2) 若 $\frac{f(x)}{x}$ 单调上升, 则 $f(x_1 + x_2) > f(x_1) + f(x_2)$.

证 (1) 因 $\frac{f(x)}{x}$ 单调下降, $x_1 > 0, x_2 > 0, x_1 + x_2 > x_1,$
 $x_1 + x_2 > x_2$, 故有

$$\frac{f(x_1 + x_2)}{x_1 + x_2} < \frac{f(x_1)}{x_1}, \quad \frac{x_1 f(x_1 + x_2)}{x_1 + x_2} < f(x_1),$$

$$\frac{f(x_1 + x_2)}{x_1 + x_2} < \frac{f(x_2)}{x_2}, \quad \frac{x_2 f(x_1 + x_2)}{x_1 + x_2} < f(x_2),$$

上两式相加得 $f(x_1 + x_2) < f(x_1) + f(x_2)$.

同理可证(2).

例 2 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 内连续的偶函数, 且

$F(x) = \int_0^x (x-2t)f(t)dt$, 判断函数 $F(x)$ 的奇偶性.

解 $F(-x) = \int_0^{-x} (-x-2t)f(t)dt$

$$\stackrel{u=-t}{=} \int_0^x (-x+2u)f(-u)(-du)$$

$$= \int_0^x (x-2u)f(u)du = F(x).$$

所以 $F(x)$ 为偶函数.

例 3 (1) 若 $f(x)$ 为可导的周期函数, 问 $f'(x)$,

$F(x) = \int_a^x f(t)dt$ 是否为周期函数?

(2) $f(x)$ 、 $g(x)$ 都是周期函数, 问 $f(x) + g(x)$ 是否为周期函数?

解 (1) $f(x)$ 为周期函数, 设周期为 T , 则

$f(x+T) = f(x)$, 两边对 x 求导得 $f'(x+T) = f'(x)$,
 即 $f'(x)$ 为周期函数.

而 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ 不一定为周期函数, 例如 $f(x) = \cos x + 1$ 为周期函数, 而 $F(x) = \int_0^x (\cos t + 1) dx = \sin x + x$ 非周期函数.

(2) $f(x) + g(x)$ 不一定为周期函数, 例如

$f(x) = \sin x$, 其周期 $T_1 = 2\pi$,

$g(x) = \sin \sqrt{2}x$, 其周期 $T_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{2}}$.

若 $f(x) + g(x) = \sin x + \sin \sqrt{2}x$ 为周期函数, 则有周期 T 是 2π 和 $\frac{2\pi}{\sqrt{2}}$ 的最小公倍数, 即 $T = 2\pi m$, $T = \frac{2\pi}{\sqrt{2}}n$, 所以

$\frac{m}{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, 这是不可能的.

题型二 求数列的极限

(一) 经过变形求数列的极限

例 1 计算数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a^n + 3(-b)^n}{2a^{n+1} + 3(-b)^{n+1}}$ ($a > b > 0$).

解 原式 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + 3(-\frac{b}{a})^n}{2a - 3b(-\frac{b}{a})^n} = \frac{1}{a}$.

注 该法关键在于认清分子、分母中绝对值最大的项, 分子、分母同除以 a^n .

例 2 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n})}{(n+1) + 2(n+2) + \cdots + n(n+n)}$.

$$\begin{aligned}
 \text{解 原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \cdot \frac{1 - (\frac{1}{2})^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}}{n^2 \cdot \frac{n+1}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2[1 - (\frac{1}{2})^{n+1}]}{\frac{1}{2}(1 + \frac{1}{n}) + \frac{1}{6}(1 + \frac{1}{n})(2 + \frac{1}{n})} \\
 &= \frac{2}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = \frac{12}{5}.
 \end{aligned}$$

注 求这类极限时，先将分子、分母中的无穷多项利用求和公式化为有限多项，再采用例1的方法。

例3 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2^2} \cdots \cos \frac{x}{2^n}) \quad (x \neq 0)$.

$$\begin{aligned}
 \text{解 原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{2 \sin \frac{x}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{4}} \cdot \frac{\sin \frac{x}{4}}{2 \sin \frac{x}{8}} \cdots \frac{\sin \frac{x}{2^{n-1}}}{2 \sin \frac{x}{2^n}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{x}{2^n} \cdot \frac{1}{\sin \frac{x}{2^n}} \\
 &= \frac{\sin x}{x}.
 \end{aligned}$$

注 本题是利用三角函数之间的关系，将无穷多个因式的积化为有限多个因式的积，再利用重要极限。

例4 利用定积分的定义求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \left(\frac{1}{n} \cos \frac{1}{n} + \frac{2}{n} \cos \frac{2}{n} + \cdots + \frac{n-1}{n} \cos \frac{n-1}{n} + \cos 1 \right).$$

$$\begin{aligned}
 \text{解 原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n} \cos \frac{i}{n} \right) \cdot \frac{\pi}{n} = \pi \int_0^1 x \cos x \, dx \\
 &= \pi [\sin 1 + \cos 1 - 1].
 \end{aligned}$$