线性代数

陆吉祥　王宁生　主编

复旦大学出版社

线 性 代 数

主　　编　陆吉祥　王宁生
编写人员　陆吉祥　王宁生　董丕明

复旦大学出版社

责任编辑　范仁梅
责任校对　马金宝

线　性　代　数

陆吉祥　王宁生　主编
复旦大学出版社出版
（上海国权路 579 号）
新华书店上海发行所发行　复旦大学印刷厂印刷
开本 850×1168　1/32　印张 6.875　字数 201,000
1995 年 2 月第 1 版　　1997 年 5 月第 2 次印刷
印数 10 001—11 500
ISBN7-309-01441-3/O·149
定价：7.00 元

内 容 提 要

本书主要内容为行列式、向量、矩阵、线性方程组、矩阵的相似对角化、二次型、线性空间与线性变换。书中例题较多，书末附有习题答案，可作为高等工业院校的教材及高等工业院校成人教育的教材，也可作为工程技术人员的自学用书。

序

众所周知，在科学技术高度发展的当今世界，无论是作为一门基础理论学科，还是作为用于自然科学、社会科学以及工程技术的一个工具，数学正在发挥日益重要的影响和作用。可以说，现代科技的几乎每个重大成果都离不开数学的参与和渗透。因此，在我国高等工科院校中加强数学教育，已成为十分迫切的需要。应此需要，铁路高校数学协作组组织编写了这套系列数学教材。

一本数学教材，既不是原材料的堆砌，也不是某些定理和公式的随机选取，它应当对所考察的领域提供一个可供游览的园地和一条入门途径。作为工科数学教材，既要考虑到数学的严谨性，又要注意各种应用实例。一本成功的教材，应该瞄准培养适应现代化建设要求的专门人才这个大目标，面向世界，面向未来，根据数学在全局中的地位与作用，精心组织教材内容，注重基本理论、基本知识、基本技能的训练。本系列教材的作者们大都从教多年，具有丰富教学经验。因此，我认为本套系列教材是能够而且已经瞄准了上述目标，为我国工科院校数学教材建设做出重要贡献的。

侯振挺

1994年仲夏之夜写于

长沙铁道学院荷花村

前　言

根据铁道部部属高校数学协作组1991年成都会议精神，为了满足铁路高校培养人材的需要，加强教材建设，提高教学质量，我们在协作组的领导下，依据高等学校工科数学教材编审委员会审定的《工科数学教学大纲》，编写了这本教材。

本书包括行列式、向量、矩阵、线性方程组、矩阵的相似对角化、二次型、线性空间与线性变换，各章都配有足够数量的习题，书末还附有习题答案。书中“*”部分为选学内容。

考虑到工科院校的要求与特点，总结编者多年讲授这门课程的体会，在教材编写中，我们坚持难点分散、说理浅显、循序渐进、学以致用的原则，从内容选择、次序安排、表述方式、习题配置等方面入手，基本概念的引入力求富有启发性；推理论证适当引入想法由来，着重证明思路；理论阐述与归纳方法相结合，注意把理论应用于解决具体问题；文字叙述尽力做到通俗易懂，便于自学。

本书可作为高等工业院校的教材及高等工业院校成人教育的教材，也可作为工程技术人员的自学用书。

本书第一、二、七章由陆吉祥编写，第五、六章由王宁生编写，第三、四章由董丕明编写。陆吉祥、王宁生担任主编。

本书在编写过程中，自始至终得到了铁路高校各兄弟数学教研室的关心与支持。

感谢在本书编写过程中细心阅读书稿并提出过宝贵意见的长沙铁道学院老师廖玉麟、赵新泽、王家宝，兰州铁道学院老师付作钊、赵崇鼎，华东交通大学老师谢文华等。

感谢使用过本书初稿的兰州铁道学院92级本科部分班级的学生与任课老师。特别感谢北方交通大学任国臣教授在繁忙中对书稿进行

了认真细致的审阅，并提出了许多宝贵的意见。

由于编者水平有限，书中错误与缺点在所难免，敬请各位老师和读者批评指正。

编　者

1994.1.1

目　　录

第一章　行　列　式

行列式是从二、三元线性方程组解的公式中引出来的，它是研究线性方程组的重要工具。本章首先在分析二、三阶行列式结构的基础上，把行列式的概念从二、三阶推广到 n 阶，然后讨论 n 阶行列式的性质和计算方法以及在解 n 元线性方程组中的应用。

第一节　n 阶行列式概念

一、排列及其逆序数

在初等数学中，由解二、三元线性方程组引出了二、三阶行列式。为了将二、三阶行列式的概念推广到 n 阶行列式，我们首先介绍排列及其逆序数的概念。

n 个不同的元素排成一列，称为这 n 个元素的一个 n 元 **排列**。n 个不同元素的所有 n 元排列种数用 P_n 表示。例如，由 $1,2,\cdots,n-1,n$ 组成的所有 n 元排列种数 $P_n=1\cdot 2\cdot\cdots\cdot(n-1)\cdot n=n!$。

排列 $12\cdots n$ 具有自然顺序，称为**自然排列**。在排列 $p_1p_2\cdots p_t\cdots p_s\cdots p_n$ 中，如果 $p_t>p_s$，则称数 p_t 与 p_s 构成该排列的一个**逆序**，记为 p_tp_s。例如，排列 132 有逆序 32。排列 312 有逆序 31、32 等。

排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中出现的逆序的总个数称为这个排列的**逆序数**，记为 $t(p_1p_2\cdots p_n)$。给出排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 后，求其逆序数 $t(p_1p_2\cdots p_n)$的方法是：

先从这个排列最左端的数 p_1 开始，数出 p_1 右端比 p_1 小的数的个数，记为 t_1(p_1 右端没有比它小的数时，取 $t_1=0$，以下同)。然后从 p_2 开始，数出 p_2 右端比 p_2 小的数，记为 t_2。依次下去，直到数 p_n。于是

$$t(p_1p_2\cdots p_n)=t_1+t_2+\cdots+t_n。$$

例1 求排列 45321 和排列 54321 的逆序数。

解 对于排列 45321，数 4 右端比数 4 小的数有 3,2,1 等三个，所以数 4 与这三个数分别构成三个逆序 43,42,41，即 $t_1=3$。同理，数 5 与数 3,2,1 分别构成三个逆序 53,52,51，即 $t_2=3$。数 3 与数 2,1分别构成两个逆序 32,31，即 $t_3=2$。数 2 与数 1 构成一个逆序 21，即 $t_4=1$。数 1 排在末尾，不构成逆序，即 $t_5=0$。因此

$$t(45321)=3+3+2+1+0=9。$$

类似地 $$t(54321)=4+3+2+1+0=10。$$

一个排列的逆序数为奇数时，称这个排列为**奇排列**，逆序数为偶数时称为**偶排列**。例如，由于 $t(45321)=9$，所以 45321 为奇排列。由于 $t(54321)=10$，所以 54321 为偶排列。

在一个排列中，对换某两个数的位置，其余数不动，则构成一个新的排列。例如，将排列 45321 中的数 4 与数 5 对换，得到排列54321，再将排列 54321 中的数 1 与数 5 对换，又得到排列 14325 等。容易看出，对排列施行一次对换后，排列的奇偶性发生改变。例如，排列 45321 为奇排列，排列 54321 为偶排列，而排列 14325 又为奇排列。一般地，对换具有下面的性质。

性质 任一排列经一次对换后，必改变其奇偶性。

证 先讨论互换相邻两数的对换。设排列

$$\cdots jk\cdots, \tag{1}$$

其中“…”表示排列中其他的数。将数 j 与数 k 对换，得

$$\cdots kj\cdots。 \tag{2}$$

比较排列(1)与(2)，除了数 j 与数 k 的顺序改变外，所有“…”位置上的数与数 j、k 间的顺序没有改变。当 $j>k$ 时，数 j 与数 k 在排列(1)中构成逆序，但在排列(2)中不构成逆序，因此，排列(2)的逆序个数比排列(1)减少 1 个。当 $j<k$ 时，数 j 与数 k 在排列(1)中不构成逆序，却在排列(2)中构成逆序，即排列(2)比排列(1)增加 1 个逆序。由此可知，奇(偶)排列经过互换相邻两数的对换后，必成偶(奇)排列，即排列的奇偶性发生了改变。

再讨论互换任意两数的对换。设排列

$$\cdots j i_1 i_2 \cdots i_{s-1} i_s k \cdots, \tag{3}$$

将数 j 与数 k 对换，得

$$\cdots k i_1 i_2 \cdots i_{s-1} i_s j \cdots。 \tag{4}$$

排列(4)实际上可以由排列(3)出发，接连施行若干次相邻两数的对换得到。首先，将数 k 依次地与数 $i_s, i_{s-1}, \cdots, i_2, i_1$ 直到数 j 对换，在施行 $s+1$ 次相邻两数的对换后得到下面排列

$$\cdots k j i_1 i_2 \cdots i_{s-1} i_s \cdots。 \tag{5}$$

再将排列(5)中的数 j 依次地与数 $i_1, i_2, \cdots, i_{s-1}$ 直到数 i_s 对换，在施行 s 次相邻两数的对换后即得到排列(4)。这样，从排列(3)到排列(5)，最后到排列(4)，共施行了 $2s+1$ 次互换相邻两数的对换。由于每经过一次互换相邻两数的对换，排列的奇偶性发生改变，而对换的次数$2s+1$ 又是奇数，所以排列(3)与(4)的奇偶性相反。

二、二、三阶行列式的结构

我们知道，二、三阶行列式的定义如下：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}。$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}。$$

现以三阶行列式为例，观察它的结构，分析所具有的共性。从三阶行列式的定义看出：

(1) 行列式的值是一些项的和，一般项为 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$，其中由元素列序号构成的排列 $p_1p_2p_3$ 是 1,2,3 的一个排列。由于 1,2,3 三个数的三元排列种数共有 $3!=6$ 种，所以行列式展式中的项数为 6 项；

(2) 每项相乘的三个元素取自行列式中不同的行和不同的列。或者说，每项中包含行列式每行的一个元素和每列的一个元素；

(3) 对于每一项，当相乘的三个元素的行序号按自然顺序 123 排列时，如果列序号 p_1,p_2,p_3 构成的排列 $p_1p_2p_3$ 为偶排列，则对应的项带正号；若 $p_1p_2p_3$ 为奇排列，则对应的项带负号。例如

$$123,312,231$$

都是偶排列，对应的三项 $a_{11}a_{22}a_{33}$，$a_{13}a_{21}a_{32}$，$a_{12}a_{23}a_{31}$ 前带正号。

$$321,132,213$$

都是奇排列，对应的三项 $a_{13}a_{22}a_{31}$，$a_{11}a_{23}a_{32}$，$a_{12}a_{21}a_{33}$ 前带负号。因此，一般项 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$ 前面的正负号为 $(-1)^t$，其中 t 为排列 $p_1p_2p_3$ 的逆序数。

按照上述分析，三阶行列式可以写为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3},$$

其中$\sum$是对 1,2,3 的所有三元排列 $p_1p_2p_3$ 求和，t 是排列 $p_1p_2p_3$ 的逆序数。

类似地，二阶行列式可以写为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2},$$

其中$\sum$是对 1,2 的所有二元排列 p_1p_2 求和，t 是排列 p_1p_2 的逆序数。

三、n 阶行列式定义

现在，我们根据二、三阶行列式具有的规律性，定义 n 阶行列式。

定义 将 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 排成 n 行 n 列的记号：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}。$$

D 是通过下面式子确定的一个数：

$$D=\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}, \tag{6}$$

其中 a_{ip_i} 为 D 中第 i 行第 p_i 列的元素，$\sum$ 是对 $1,2,\cdots,n$ 的所有 n 元排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 求和，t 是排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数。我们称 D 为 **n 阶行列式**。

由定义知，n 阶行列式 D 是 $n!$ 项的代数和；和式中的每一项是取自 D 中不同行和不同列的 n 个元素的乘积；当每项中相乘的 n 个元素的行序号按自然顺序 $1\ 2\ \cdots n$ 排列时，如果列序号的排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 为偶排列，则该项带正号，反之则带负号。

显然，当 $n=2$，3 时，D 为二、三阶行列式，它与我们学过的用对角线法则定义的二、三阶行列式完全一致。当 $n=1$ 时，$D=|a_{11}|=a_{11}$ 是一阶行列式。注意不要将一阶行列式与数的绝对值记号相混淆。

在行列式定义中，我们把每项中相乘的 n 个元素的行序号按自然顺序 $12\cdots n$ 排列。其实，由于数的乘法是可交换的，所以行列式每项中相乘的 n 个元素的顺序可以任意交换。例如，在三阶行列式中，乘积 $a_{12}a_{21}a_{33}$ 可以写成 $a_{33}a_{21}a_{12}$ 或 $a_{21}a_{12}a_{33}$ 等。在 n 阶行列式中，乘积 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 可以写成 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$，其中 $i_1i_2\cdots i_n$ 与 $j_1j_2\cdots j_n$ 都是 $1,2,\cdots,n$ 的 n 元排列。

定理 n 阶行列式可以定义为

$$D=\sum(-1)^{t_1+t_2}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}, \tag{7}$$

其中 $i_1i_2\cdots i_n$ 与 $j_1j_2\cdots j_n$ 都是 $1,2,\cdots,n$ 的 **n 元排列**，$t_1=t_1(i_1i_2\cdots i_n)$，$t_2=t_2(j_1j_2\cdots j_n)$，但 $\sum$ 表示对这样一些排列求和，即 $i_1i_2\cdots i_n$ 为 $1,2,\cdots,n$ 的某一固定排列，而 $j_1j_2\cdots j_n$ 取 $1,2,\cdots,n$ 的所有 n 元排列(共 $n!$ 个)。或者，$j_1j_2\cdots j_n$ 为 $1,2,\cdots,n$ 的某一固定排列，而 $i_1i_2\cdots i_n$ 取 $1,2,\cdots,n$ 的所有 n 元排列(共 $n!$ 个)。

证 首先，交换乘积 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_kj_k}\cdots a_{i_lj_l}\cdots a_{i_nj_n}$ 中的任意两个元素 $a_{i_kj_k}$ 与 $a_{i_lj_l}$。由于交换 $a_{i_kj_k}$ 与 $a_{i_lj_l}$ 后，行序号排列 $i_1i_2\cdots i_k\cdots i_l\cdots i_n$ 和列序号排列 $j_1j_2\cdots j_l\cdots j_k\cdots j_n$ 各同时经过一次互换，得到两个新排列 $i_1i_2\cdots i_l\cdots i_k\cdots i_n$ 和 $j_1j_2\cdots j_l\cdots j_k\cdots j_n$。根据排列的性质，$t_1(i_1i_2\cdots i_l\cdots i_k\cdots i_n)$ 与 $t_1(i_1i_2\cdots i_k\cdots i_l\cdots i_n)$ 的奇偶性相反，$t_2(j_1j_2\cdots j_l\cdots j_k\cdots j_n)$ 与 $t_2(j_1j_2\cdots j_k\cdots j_l\cdots j_n)$ 的奇偶性相反，从而 $t_1(i_1i_2\cdots i_k\cdots i_l\cdots i_n)+t_2(j_1j_2\cdots j_k\cdots j_l$

$\cdots j_n)$ 与 $t_1(i_1i_2\cdots i_l\cdots i_k\cdots i_n)+t_2(j_1j_2\cdots j_l\cdots j_k\cdots j_n)$的奇偶性相同，即在乘积 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 中，任意两个元素经过一次交换后，行序号排列的逆序数与列序号排列的逆序数之和的奇偶性不变。

其次，设经过若干次任意两个元素的交换后，将乘积 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 中行序号的排列调换为自然顺序 $12\cdots n$，并记此时相应的列序号排列为 $p_1p_2\cdots p_n$。因为任意两个元素经过一次交换后，行、列序号排列的逆序数之和的奇偶性不变，所以，经过若干次两个元素的交换后，行、列序号排列的逆序数之和的奇偶性也不变。也就是说，$t_1(i_1i_2\cdots i_n)+t_2(j_1j_2\cdots j_n)$与 $t_1(12\cdots n)+t_2(p_1p_2\cdots p_n)$的奇偶性相同，于是

$$(-1)^{t_1(i_1i_2\cdots i_n)+t_2(j_1j_2\cdots j_n)}=(-1)^{t_1(12\cdots n)+t_2(p_1p_2\cdots p_n)}$$
$$=(-1)^{t_2(p_1p_2\cdots p_n)},$$

其中 $t_1(12\cdots n)=0$。因此

$$\sum(-1)^{t_1+t_2}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}=\sum(-1)^{t_2(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

即

$$D=\sum(-1)^{t_1+t_2}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n},$$

其中 $t_1=t_1(i_1i_2\cdots i_n)$，$t_2=t_2(j_1j_2\cdots j_n)$，$\sum$表示对这样一些排列求和，即 $i_1i_2\cdots i_n$ 为 $1,2,\cdots,n$ 的某一固定排列，而 $j_1j_2\cdots j_n$ 取 $1,2,\cdots,n$ 的所有 n 元排列(共 $n!$ 个)。或者，$j_1j_2\cdots j_n$ 为 $1,2,\cdots,n$ 的某一固定排列，而 $i_1i_2\cdots i_n$ 取 $1,2,\cdots,n$ 的所有 n 元排列(共 $n!$ 个)。

特别地，如果将 n 阶行列式各项中相乘的 n 个元素的列序号按自然顺序 $12\cdots n$ 排列，记相应的行序号排列为 $i_1i_2\cdots i_n$，则由上述定理，n 阶行列式又可定义为

$$D=\sum(-1)^{t_1}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}, \tag{8}$$

其中$\sum$是对 $1,2,\cdots,n$ 的所有 n 元排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 求和，t_1 是排列$i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数。

例 2 计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ & & & \cdots & \cdots \\ & & & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ & & & & a_{nn} \end{vmatrix},$$

这个行列式的特点是主对角线(即从左上角到右下角的直线)下的元素皆为零，即当 $j<i$ 时，$a_{ij}=0$，这种行列式称为**上三角形行列式**。

解 n 阶行列式的展式中有 $n!$ 项，如果每项相乘的 n 个元素 a_{1p_1}，a_{2p_2}，$\cdots$，a_{np_n} 中有一个元素为零，则这一项的值便为零，所以本例只需计算展式中非零的项即可。由于第 n 行中除 a_{nn} 外，其他元素为零，因此，要得到非零项，必须取 $p_n=n$，即取元素 a_{nn}。这样，在第 $n-1$ 行就不能取 $a_{n-1\ n}$，因为这个元素位于第 n 列，而第 n 列只能取一个元素(已取第 n 列元素 a_{nn})。于是，在第 $n-1$ 行只能取元素 $a_{n-1\ n-1}$，即取 $p_{n-1}=n-1$。同理，取 $p_{n-2}=n-2,\cdots,p_1=1$。因此，行列式中只有唯一的一项 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 非零，于是

$$D=(-1)^t a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

其中 $t=t(12\cdots n)=0$。

例 2 说明，上三角形行列式的值等于主对角线上的 n 个元素的乘积。因此，如果能将一个行列式化成上三角形，则可立即求得其值，这就为行列式计算提供了一条途径。

例 3 计算 n 阶行列式：

$$D=\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2\ n-1} & a_{2n} \\ & & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\ a_{n\ n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}。$$

这个行列式的对角线(即从右上角到左下角的直线)以上的元素都为零，即当 $i+j\leqslant n$ 时，$a_{ij}=0$，这种行列式称为**下三角形行列式**。

解 与例 2 的解法相同，D 展式中唯一的非零项为 $a_{1n}\ a_{2\ n-1}\cdots a_{nn}$，它前面的正负号由排列 $n(n-1)\cdots 1$ 的逆序数确定。因为

$$\begin{aligned} t(n(n-1)\cdots 1)&=(n-1)+(n-2)+\cdots+1+0 \\ &=\frac{n(n-1)}{2}, \end{aligned}$$

所以 $$D=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2\ n-1}\cdots a_{n1}。$$

在例 3 中，取 $n=3$，则 $D=-a_{13}a_{22}a_{31}$；取 $n=4$，则 $D=a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$。

第二节　行列式的性质

性质 1　行列式的行列互换，其值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}。$$

我们称上式右端的行列式为左端行列式的**转置行列式**。如果左端行列式记为 D，则其转置行列式记为 D'，显然 D 与 D' 互为转置行列式。因此，性质 1 可叙述为：行列式和它的转置行列式相等。

证　记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D'=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

其中 $b_{ij}=a_{ji}, i,j=1,2,\cdots,n$。根据式(6)，对行列式 D'，有

$$\begin{aligned} D' &= \sum(-1)^t b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{np_n} \\ &= \sum(-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}。\end{aligned}$$

根据式(8)，对行列式 D，有

$$D=\sum(-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n},$$

所以

$$D=D'。$$

性质 1 表明，行列式中行与列的地位是对称的。因此，行列式中凡有关于行所具有的性质，对列也同样成立，反之亦然。

性质 2　互换行列式的任意两行(列)，行列式变号。

证　设