流体力学与应用数学讲座 2

水波动力学

梅强中

科学出版社

流体力学与应用数学讲座 (2)

水波动力学

梅强中 讲授

戴世强 周显初 整理

科学出版社

1984

内 容 简 介

本书根据美国麻省理工学院梅强中教授在我国首次流体力学和应用数学讲习班上授课的讲稿整理而成。内容包括：水波的基本数学描述，海洋中瞬变波的传播，水波折射的射线理论，无穷小振幅长波的传播，海浪入射引起的港湾共振，浮体动力学，海浪能量的吸收，浅水中的非线性长波以及深水中的非线性波等。

本书可供海洋工程、水利工程、船舶工程、流体力学和应用数学等专业的大学高年级学生和研究生、教师、科研工作者和工程技术人员参考。

流体力学与应用数学讲座 （2）

水 波 动 力 学

梅强中 讲授

戴世强 周显初 整理

责任编辑 魏茂乐 杨 岭

科学出版社 出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1984年 8月第 一 版 开本：850×1168 1/32

1984年 8月第一次印刷 印张：12 1/2

印数：0,001—4,400 字数：326,000

统一书号：13031·2630

本社书号：3624·13—2

定价：2.30 元

序　　言

一九八一年五月至七月，在北京举办了我国首次流体力学与应用数学讲习班．今天，讲习班的讲稿以讲座丛书的形式陆续与读者见面了，这是值得高兴的事情．

这次讲习班是由美国麻省理工学院林家翘教授倡议，由中国科学院、北京大学和清华大学共同主办的．应邀前来讲学的先后有：美国密执安大学易家训教授、麻省理工学院梅强中教授和加州理工学院吴耀祖教授．他们分别讲授了《分层流》、《水波动力学》、《船舶水动力学、空泡和尾流》这三门水动力学专题课程．内容包括：分层流中的波动和稳定性理论、线性和非线性水波及波浪与海洋工程结构的相互作用、船舶的兴波阻力和二维轴对称自由流线理论等．参加听讲者共约一百七十人次，来自全国三十多个科研机构和高等院校．讲习班期间，中外学者进行了广泛的学术交流，共同探讨了学科的研究方向．同时，我国的力学工作者还作了《海洋大气耦合系统中多年振荡的理论》、《缓变截面渠道中的孤立波》、《渤海潮流的数值模拟》、《地形对洋流影响的实验模拟》、《河口不定常流的数值计算方法》等学术报告．由于讲习班较注意理论和实验的基础知识，又重视实际应用，参加者普遍感到颇有收益．可以肯定，这次讲习班将会对我国的水动力学研究起一定的促进作用．

流体力学是一门古老而目前仍富有生命力的学科，其生命力的源泉在于生产实践．早在二千二百多年前，在李冰父子指导下，我国修建了规模宏大的都江堰．差不多与此同时，古希腊学者阿基米德创立了液体平衡理论，特别是物体浮力理论．经历了中世纪的黑暗之后，随着生产和技术的发展，一批先驱者——伽里略、牛顿等逐步完善了流体静力学理论，并开始探索流体中运动物体的

阻力规律．工业革命推动了流体力学的突飞猛进，从十八世纪中叶到十九世纪下半叶的百余年间，经过力学家的努力，根据牛顿力学原理建立了理论流体动力学的完整体系，并且随着实验技术的发展，奠定了实验流体力学的基础．从而使这门学科在低速(即不可压缩)流动问题中得到了极为广泛的应用．在此同一时期，气体动力学已处于萌芽状态．

本世纪初，人类进入航空时代，作为航空基础之一的气体动力学开始迅速发展．本世纪四、五十年代是这门学科的黄金时代，人类以气体动力学的理论和实践为后盾，跨越了“声障”，闯进了超声速禁区，接着又冲破了“热障”，使飞行器达到了第一宇宙速度，人类迈入了空间时代．六十年代，载人宇宙飞船的问世标志着高速气体动力学的发展已达到成熟阶段．

七十年代前后，根据实践的迫切需要，科学工作者开始对能源开发、环境保护、疾病防治等问题作更深入的研究，从而赋予流体力学以新的使命．地球流体力学、环境流体力学、海洋动力学、生物流体力学等一些边缘学科应运而生，并在海底采油、控制污染、天气预报等方面起着越来越大的作用．所研究的流体速度范围从高速又降到了常见的速度．

流体力学的发展与应用数学密切相关．由于流体力学基本方程具有非线性性质，而且定解条件十分复杂，因此不断给应用数学提出新课题，并使一些数学方法日臻完善，而应用数学的各种方法（例如奇点分布法、运算微积法、渐近分析法以及近几十年来发展起来的奇异摄动法和有限元法等等）对流体力学的研究起了极大的推动作用．事实上，流体力学家往往也是应用数学家．正因为应用数学技巧的发展和高速电子计算机的出现，使原来难于求解的流体力学问题有了解决的途径，经典流体力学的“返老还童”才有了可能．另外，由于实验物理学、电子技术与激光技术的飞跃发展，流体力学实验出现了崭新的局面．

新中国成立以后，流体力学和应用数学的研究在我国有了很大发展．产业部门在结合生产实际开展科学研究的过程中，已形

成了一支力量可观的力学队伍，许多高等院校开设了各种类型的力学专业．五十年代中期，钱学森、郭永怀教授等回国后，在中国科学院数学研究所的力学研究室的基础上，建立了力学研究所．高等院校、产业部门和研究机构的力学队伍共同配合，互相促进，为我国的水利、造船、航空和航天等工程作出了贡献．人造卫星和洲际导弹的发射成功，说明了我国气体动力学的研究达到了相当高的水平．目前，我国的力学工作者要把握住学科发展的新动向，要足够重视水动力学的研究，以期满足大型水利工程、海洋工程和化工工程等方面的发展需要．广大力学工作者要努力学习先进的理论和方法，学习计算机技术和近代实验技术，勇于开辟新的研究领域．

值此讲座丛书正式出版之际，我谨代表中国科学院向为这次讲习班作出积极贡献的国内外学者，特别向林家翘、易家训、吴耀祖、梅强中教授表示衷心的感谢，同时感谢为组织这次讲习班付出辛勤劳动的工作人员，感谢科学出版社的大力支持．我希望这套丛书将为我国流体力学和应用数学界，以及大气物理、海洋工程、船舶建造等方面的工作人员广泛利用，对他们的实际工作有所裨益．

周培源

一九八二年二月八日

目　　录

第一章 概 论

近年来，水波研究引起了人们越来越大的关注，而海浪研究是其中的一个重要方面．本课程将以海浪学及其应用为背景，简要地介绍水波动力学．

大家知道，海洋中存在各种各样的波动，它们的周期各异，起制约作用的物理因素也互有区别．与最简单的弹簧-质量系统一样，各种波动必定与某种恢复力有关，因此，可以按恢复力对海洋中的波动加以粗略的分类(参看表 1.1)．

表 1.1 海洋中的各种波动

波动类型	物理机制	典型周期	存在区域
声 波	可压缩性	10^{-2}—10^{-5} 秒	海洋内部
毛 细 波	表面张力	$<10^{-1}$ 秒	空气与水的界面
风浪和涌浪	重 力	1—25 秒	
地震津波	重 力	10 分—2 小时	
内 波	重力和密度分层	2 分—10 小时	密度剧变的层
风 暴 潮	重力和地球自转	1—10 小时	海岸线附近
潮 波	重力和地球自转	12—24 小时	整个大洋层
行 星 波	重力，地球自转以及纬度或海洋深度的变化	O (100 天)	

人类经历中最常见的也许是波长较短的风浪和涌浪，它们由当地的或远处的风暴产生；不大常见的、却会带来严重后果的是地震津波（地震海啸），通常指的是海底地震或地滑引起的长周期振动（周期约为 1 小时）．海洋中的波动还可能由人类的活动（如船舶运动、爆炸等）产生，时间尺度大致与上述波动相同．因为这些

波动在水面上最为显著，它们的恢复力主要是重力，所以称为表面重力波，简称表面波(这时应理解为不考虑表面张力).

在海洋科学中.出现在温跃层上的内重力波也有重要意义，温跃层是海面之下密度急剧变化的水平层. 这种内波在海面上看来不显著，只有一些间接的迹象. 空气与水的界面上密度变化很大，而自然界的大多数场合下，内波中的密度变化相当小(约为百分之几)，相伴随的物理特征也大大地有别于表面波.

在自然界中，几种恢复力事实上可能同时存在，因此表 1.1 中列出的各种波动的界限不一定总是很明显.

本讲座限于讨论中等尺度的波动，其中两个极端情形下的效应，即可压缩性和表面张力效应以及地球自转效应，显得不很重要. 我们还假定，在感兴趣的深度范围内，海水密度的铅垂分层变化很小. 所以，我们主要论述表面重力波，即风浪、涌浪和地震津波.

这里要着重指出，海浪研究在工程上有着广泛的应用. 例如，在沿海工程方面，海港设施(堤坝等)与海浪有密切关系，波浪冲击引起的大量砂子的运动(海滨冲砂)对海岸有直接影响；在深海工程方面，浮式或固定式钻井平台的设计、海底建筑的建造、海底油管的铺设，都必须考虑海浪压力的传播和作用. 不然，有可能造成重大事故. 海浪研究在造船工程方面的应用更是不言而喻的.

海浪学与其它学科有着密切的联系. 在许多问题中，必须考虑大气运动与海面的相互作用(海气作用)，因而海浪学与大气科学息息相关；与电磁波、声波不同，对于水波来说，色散效应与非线性效应十分重要，小振幅水波已经是这样，更不用说常见的大振幅海浪了，而这两种效应在等离子体物理学和非线性光学中是十分显著的，因此数学处理方法很相近，经常可以相互借鉴；对这两种效应的分析研究在应用数学方面也有重要意义，本讲座中我们就要介绍一些近年来发展起来的应用数学新方法(如奇异摄动法)在海浪研究中的应用；由于海岸边界、海洋工程建筑边界和海底条件相当复杂，加上自由面条件的非线性，所以通常不能用简单的解析

方法求解海浪问题，需要借助于计算数学的方法，本讲座就将举若干实例，介绍有限元法的应用；此外，在解决一系列工程实际问题时，必须把结构力学、固体力学、岩土力学与海浪动力学结合起来.

本讲座取材于作者在美国麻省理工学院对土木工程、海洋工程研究生授课的讲义，论及水波动力学的基本原理和在海洋工程方面的应用. 在数学处理方面力求简易、实用，不追求其严格性和普遍性，对于新方法都作了详尽介绍，因此，具备高等微积分和数学物理方法知识的人员就能理解本讲座的内容. 限于时间，这次讲座只能选讲一些课题，第一章叙述水波的数学处理基础；第二至第六章讨论开阔水域中瞬变波的传播、水波折射的射线理论、无穷小振幅长波的传播、海浪入射引起的港湾共振、浮体动力学和海浪能量的吸收，这几章都涉及发展得比较成熟的无粘流体线性化理论；最后两章阐述浅水和深水中的非线性波.

在这一章中，我们先复习流体力学基本方程和关于无粘无旋流动的若干一般结论；然后导出有关无穷小振幅波的线性化方程；在阐明行波的一般概念之后，考察常深度水中简谐行波的性质；接着，从运动学观点和动力学观点出发，对群速度作了初步讨论.

1.1 常密度不可压缩流体的基本数学描述

1.1.a 控制方程

在各种各样重力波问题中，在有工程实际意义的时空尺度上，水密度的变化通常是微不足道的，因此，基本守恒定律由如下的 Navier-Stokes 方程描述：

质量守恒 $$\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0 \tag{1.1.1}$$

动量守恒 $$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{u}=-\nabla\left(\frac{P}{\rho}+gz\right)+\nu\nabla^2\boldsymbol{u} \tag{1.1.2}$$

其中，$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)=(u,v,w)$ 为速度矢量，$P(\boldsymbol{x},t)$为压力，ρ 为密度，

g 为重力加速度，ν 为运动粘性系数(常数)，$\boldsymbol{x}=(x,y,z)$ 为坐标矢量，z 轴铅垂向上.

从方程(1.1.1)和(1.1.2)推得的最重要的结果是关于涡量矢量 $\boldsymbol{\Omega}$ 的方程，$\boldsymbol{\Omega}$ 定义成

$$\boldsymbol{\Omega}=\nabla\times\boldsymbol{u} \tag{1.1.3}$$

它是当地转动速率的两倍. 取(1.1.2)的旋度，利用(1.1.1)，可得

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{\Omega}\cdot\nabla\boldsymbol{u}+\nu\nabla^2\boldsymbol{\Omega} \tag{1.1.4}$$

从物理上看来，这一方程意味着：跟随着运动流体的涡量的变化率分别由涡线的伸缩扭曲(右端第一项)、粘性扩散(右端第二项)产生(可参看 Batchelor, 1967). 在水中，ν 很小($\cong 10^{-2}\mathrm{cm}^2/\mathrm{sec}$)，除了在速度梯度很大和涡量很大的区域中以外，式(1.1.4)的末项可以忽略；也就是说，除了很薄的边界层中以外，忽略粘性是良好的近似，这时式(1.1.4)变成

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{\Omega}\cdot\nabla\boldsymbol{u} \tag{1.1.5}$$

$\boldsymbol{\Omega}=0$ 是一类重要的情形，相应的流动称作无旋流动. 以 $\boldsymbol{\Omega}$ 点乘式(1.1.5)，得到

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\right)\frac{\Omega^2}{2}=\Omega^2[\boldsymbol{e}_\Omega\cdot(\boldsymbol{e}_\Omega\cdot\nabla\boldsymbol{u})]$$

其中 $\boldsymbol{e}_\Omega$ 为沿 $\boldsymbol{\Omega}$ 的单位矢量. 因为在有实际物理意义的场合下速度梯度是有限的，所以 $\boldsymbol{e}_\Omega\cdot(\boldsymbol{e}_\Omega\cdot\nabla\boldsymbol{u})$ 的最大值必定是有限值，设它为 $M/2$，跟随流体质点的 $\Omega^2(\boldsymbol{x},t)$ 的大小不会超过 $\Omega^2(\boldsymbol{x},0)e^{Mt}$. 因此，如果 $t=0$ 时刻涡量处处为零，则流动永远保持为无旋的.

对于无粘无旋流动来说，速度 $\boldsymbol{u}$ 可表示成标势（速度势）Φ 的梯度

$$\boldsymbol{u}=\nabla\Phi \tag{1.1.6}$$

于是，质量守恒要求速度势 Φ 满足 Laplace 方程

$$\nabla^2\Phi=0 \tag{1.1.7}$$

如果速度势已知，则可由动量方程(1.1.2)求得压力场；下面，

由式(1.1.2)推导 Bernoulli 方程. 利用矢量恒等式

$$\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}=\nabla\frac{\boldsymbol{u}^2}{2}-\boldsymbol{u}\times(\nabla\times\boldsymbol{u})$$

和无旋、无粘的假定,(1.1.2)可改写成

$$\nabla\left[\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2\right]=-\nabla\left(\frac{P}{\rho}+gz\right)$$

关于空间变量进行积分之后,得到

$$-\frac{P}{\rho}=gz+\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2+C(t) \qquad (1.1.8)$$

其中 $C(t)$ 为 t 的任意函数,一般可在不影响速度场的情况下重新定义 Φ 使 $C(t)$ 为零,例如可引进 Φ', 使

$$\frac{\partial\Phi'}{\partial t}=\frac{\partial\Phi}{\partial t}+C(t),\qquad \nabla\Phi'=\nabla\Phi$$

所以,不失一般性,可令方程(1.1.8)中 $C(t)=0$. (1.1.8) 就是 Bernoulli 方程. 方程 (1.1.8) 右端的第一项 gz 为对 P 的流体静压贡献,而其余的项为对 P 的流体动压贡献.

1.1.b 无粘无旋流动的边界条件

在固定的固体边界 B 上,法向速度必须为零,即

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n}=0,\qquad (在 B 上) \qquad (1.1.9a)$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为 B 的单位法矢量, 方向指向流体. 把这个条件用于深度为 $h(x, y)$ 的海的底部,可把它写成

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z}=\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial y},$$

$$在 B_0 上,即 z=-h(x,y)时 \qquad (1.1.9b)$$

现在考虑与大气接界的自由面上的边界条件. 设自由面的铅垂位移为 $\zeta(x, y, t)$, 则自由面的方程为

$$F(\boldsymbol{x}, t)=z-\zeta(x, y, t)=0 \qquad (1.1.10)$$

令运动着的自由面上一几何点$\boldsymbol{x}$的速度为 $\boldsymbol{q}$, 经过短时间 dt 后,自

由面的方程变成

$$F(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{q}dt, t+dt)=0$$

$$=F(\boldsymbol{x}, t)+\left(\frac{\partial F}{\partial t}+\boldsymbol{q}\cdot\nabla F\right)dt+O((dt)^2)$$

利用式(1.1.10)后得到,对于任意的小 dt 有

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\boldsymbol{q}\cdot\nabla F=0$$

流体质点在自由面上并不是单独地运动的,而是要保持与邻近质点的连续性. 考虑控制体积 ΔV_F,它是一个薄层,上表面为一小块自由面 ΔS_F. 倘若 ΔV_F 中流体质点的法向速度与 ΔS_F 的法向速度不同,那么,流体就得通过 ΔV_F 的底面以有限的速率损失或获得;由于 ΔS_F 是物质面,流体必须通过 ΔV_F 的侧缘以无限大的速度补充或流失,而这在物理上是不可能的,因此,自由面上流体的法向速度必定与自由面的法向速度相同,也就是说,自由面上的所有流体质点除了随自由面整体移动外,只能作切向移动,

$$\boldsymbol{u}\cdot\nabla F/|\nabla F|=\boldsymbol{q}\cdot\nabla F/|\nabla F|$$

从而得到

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla F=0,\quad (z=\zeta\ \text{时}) \tag{1.1.11}$$

它等价于

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\Phi_x\zeta_x+\Phi_y\zeta_y=\Phi_z,\quad (z=\zeta\ \text{时}) \tag{1.1.12}$$

方程(1.1.11)或(1.1.12)称作自由面上的运动学边界条件,显然,如果$z=\zeta$是运动物体的不可穿透的表面,上述条件也是适用的. 条件(1.1.11)或(1.1.12)中,Φ与ζ是未知函数,而且加在未知表面$z=\zeta$上,因而是复杂的非线性方程.

上述运动学条件未涉及作用力,下面考虑与作用力有关的动力学条件. 对于本讲座的大部分论题来说,所考虑的波的波长很大,因而表面张力不起重要作用,紧接自由面之下处的压力必定等于自由面上的大气压力 P_a(通常取 $P_a=\text{const}=0$),把 Bernoulli 方