

数学分析中的问题和定理

第二卷

G. 波利亚 G. 舍贵 著

上海科学技术出版社



数 学 分 析 中 的 问 题 和 定 理

第 二 卷

函数论 零点 多项式
行列式 数论 几 何

G. 波利亚 G. 舍贵 著

张奠宙 宋国栋 魏国强 译
李锐夫 程其襄 陆洪文 校

上海科学技术出版社

数学分析中的问题和定理

第二卷

G. 波利亚 G. 舍贵 著

张奠宙 宋国栋 魏国强 译

李锐夫 程其襄 陆洪文 校

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路 450 号)

新华书店上海发行所发行 上海商务印刷厂印刷

开本 850×1156 1/32 印张 16 字数 421,000

1985 年 6 月第 1 版 1985 年 6 月第 1 次印刷

印数 1—14,800

统一书号: 13119·1219 定价: 3.90 元

记号和缩写

在全书中应用下列记号和缩写:

$a_n \rightarrow a$ 表示当 $n \rightarrow \infty$ 时, a_n 趋于 a .

$a_n \asymp b_n$ (读作: a_n 渐近等于 b_n) 表示: 对充分大的 n , $b_n \neq 0$, 且

当 $n \rightarrow \infty$ 时 $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 1$.

$O(a_n)$, 这里 $a_n > 0$, 表示与 a_n 的比保持有界的量, $o(a_n)$ 表示与 a_n 的比当 $n \rightarrow \infty$ 时趋于 0 的量.

这些记号同样可用于不是 $n \rightarrow \infty$ 的极限过程.

$x \rightarrow a+0$ 表示 x 从右边趋向于 a ($x \rightarrow a-0$ 是从左边趋向于 a).

$\exp(x) = e^x$, e 是自然对数的底.

给定 n 个实数 $a_1, a_2, \dots, a_n$, $\max(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 表示 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 中的最大者 (或最大者之一), 而 $\min(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 表示 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 中的最小者. $\max f(x)$ 和 $\min f(x)$ 对定义于区间 a, b 上的实函数 $f(x)$ 具有类似的意义, 只要 $f(x)$ 在 a, b 上具有最大值或最小值. 另外我们分别对上确界和下确界采用同样的记号 (在复变量情况中也是这样).

$\operatorname{sgn} x$ 代表符号函数

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

$[x]$ 表示不大于 x 的最大整数 ($x-1 < [x] \leq x$). 然而在不致引起误会时, 我们也常用方括号代替通常的括号 (仅在第 I 篇, 第 1 章, § 5 中有它们在特殊意义下的用途).

$\bar{z}$ 是复数 z 的共轭复数.

对具有通项 $a_{\lambda, \mu}$, $\lambda, \mu = 1, 2, \dots, n$ 的行列式, 我们用缩写记

号

$|a_{\lambda\mu}|^2$ 或 $|a_{\lambda\mu}|_{\lambda,\mu=1,2,\dots,n}$ 或 $|a_{\lambda 1}, a_{\lambda 2}, \dots, a_{\lambda n}|^2$.

非空连通开集(仅含内点)称为区域. 区域的闭包(开集和它的边界的并集)称为域(这术语不大常用,有时要加以特别强调,并说是“开区域”或“闭区域”).

一条连续曲线定义为区间 $0 \leq t \leq 1$ 的单值连续象,即点 $z = x + iy$ 的集合,这里 $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 都是区间 $0 \leq t \leq 1$ 上的连续函数. 若 $\varphi(0) = \varphi(1)$, $\psi(0) = \psi(1)$, 则称曲线是闭的,若由 $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$, $\psi(t_1) = \psi(t_2)$, $t_1 < t_2$ 得到 $t_1 = 0$, $t_2 = 1$, 称曲线无重点. 没有重点的曲线也称为简单曲线. 不闭的简单连续曲线常称为简单弧.

平面上无重点的闭连续曲线(约当曲线)确定了两个以它为公共边界的区域.

我们假定线积分和复积分的路径是连续的和可求长的.

(a, b) 表示开区间 $a < x < b$, $[a, b)$ 表示半开区间 $a \leq x < b$, $(a, b]$ 表示半开区间 $a < x \leq b$, $[a, b]$ 表示闭区间 $a \leq x \leq b$, 当不必区分这四种情况时,我们采用术语“区间 a, b ”.

“iff”常用作“当且仅当”的略语.

目 录

第 IV 篇

单复变量函数 专题部分

第一章 最大项和中心指数, 最大模和零点个数

问题序号	问题页码	解答页码
§ 1(1~40)	$\mu(r)$ 与 $M(r)$ 、 $\nu(r)$ 与 $N(r)$ 之间的类 似	1 206
§ 2(41~47)	关于 $\mu(r)$ 和 $\nu(r)$ 的进一步结果	6 212
§ 3(48~66)	$\mu(r)$, $\nu(r)$, $M(r)$ 和 $N(r)$ 之间的联系	7 214
§ 4(67~76)	在附加正规性假设下的 $\mu(r)$ 和 $M(r)$	11 220

第二章 单叶映射

§ 1(77~83)	预备知识	15 225
§ 2(84~87)	唯一性定理	16 226
§ 3(88~96)	映射函数的存在性	16 227
§ 4(97~120)	内半径和外半径, 正规映射函数	18 230
§ 5(121~135)	不同区域映射之间的关系	22 235
§ 6(136~163)	Koebe 变形定理及有关题材	25 238

第三章 杂 题

§ 1(164~174.2)	各种命题	31 246
§ 2(175~179)	E. Landau 的一个方法	33 251
§ 3(180~187)	沿直线趋向本性奇点	34 252
§ 4(188~194)	整函数的渐近值	35 254
§ 5(195~205)	Phragmén-Lindelöf 方法的进一步 应用	36 257
§ 6(*206~*212)	补充题	38 262

第 V 篇

零点的定位

第一章 Rolle 定理和 Descartes 符号法则

问题序号	问题页码	解答页码
§ 1(1~21)	函数的零点, 序列的符号改变	42 264
§ 2(22~27)	函数的符号变更	45 267
§ 3(28~41)	Descartes 符号法则的第一个证明	46 268
§ 4(42~52)	Descartes 符号法则的应用	49 272
§ 5(53~76)	Rolle 定理的应用	51 275
§ 6(77~86)	Descartes 符号法则的 Laguerre 证明	55 280
§ 7(87~91)	Descartes 符号法则的基础	59 283
§ 8(92~100)	Rolle 定理的推广	60 285

第二章 复平面的几何和多项式的零点

§ 1(101~110)	点系关于一点的重心	64 288
§ 2(111~127)	多项式关于一点的重心, Laguerre 定理	66 290
§ 3(128~156)	多项式关于一点的导数, Grace 定理	69 294

第三章 杂 题

§ 1(157~182)	用有理函数的零点逼近超越函数 的零点	76 301
§ 2(183~189.3)	由 Descartes 符号法则精确确定 零点的个数	81 313
§ 3(190~196.1)	关于多项式零点的附加题	85 315

第 VI 篇

多项式和三角多项式

§ 1(1~7)	Tchebychev 多项式	88 318
----------	----------------------	--------

问题序号	问题页码	解答页码
§ 2(8~15)	三角多项式的一般问题	89 319
§ 3(16~28)	某些特殊的三角多项式	91 321
§ 4(29~38)	有关 Fourier 级数的若干问题	93 324
§ 5(39~43)	实非负三角多项式	95 326
§ 6(44~49)	实非负多项式	96 327
§ 7(50~61)	三角多项式中的极大-极小问题	97 329
§ 8(62~66)	多项式中的极大-极小问题	100 334
§ 9(67~76)	Lagrange 插值多项式	101 336
§ 10(77~83)	S. Bernstein 和 A. Markov 定理	104 338
§ 11(84~102)	Legendre 多项式及有关课题	105 339
§ 12(103~113)	多项式的更进一步的极大-极小问题	110 348

第 VII 篇

行列式和二次型

§ 1(1~16)	行列式的计值, 线性方程组的解	113 352
§ 2(17~34)	有理函数的幂级数展开	118 358
§ 3(35~43.2)	正二次型的推广	124 361
§ 4(44~54.4)	杂题	127 366
§ 5(55~72)	函数组的行列式	132 374

第 VIII 篇

数 论

第一章 数论函数

§ 1(1~11)	关于数的整数部分	137 381
§ 2(12~20)	整点计数	138 382
§ 3(21~27.2)	包含和排除原理	139 385
§ 4(28~37)	部分与因数	143 389
§ 5(38~42)	数论函数, 幂级数, Dirichlet 级数	146 392

问题序号	问题页码	解答页码
§ 6(43~64)	可乘数论函数.....149	393
§ 7(65~78)	Lambert 级数和有关课题.....154	400
§ 8(79~83)	有关整点计数的进一步问题.....158	403

第二章 整系数多项式和整数值函数

§ 1(84~93)	整系数多项式和整数值多项式.....160	404
§ 2(94~115)	整数值函数和它们的素因数.....161	407
§ 3(116~129)	多项式的不可约性.....164	411

第三章 幂级数中的数论问题

§ 1(130~137)	有关二项式系数的预备题目.....167	419
§ 2(138~148)	关于 Eisenstein 定理.....167	420
§ 3(149~154)	关于 Eisenstein 定理的证明.....170	422
§ 4(155~164)	与有理函数有关的整系数幂级数.....171	425
§ 5(165~173)	与整系数幂级数有关的函数论方面 的问题.....173	428
§ 6(174~187)	Hurwitz 意义下的整系数幂级数.....174	430
§ 7(188~193)	在 $z = \infty$ 近旁收敛的幂级数 在整数点的值.....177	433

第四章 关于代数整数的一些问题

§ 1(194~203)	代数整数域.....179	436
§ 2(204~220)	最大公因子.....182	441
§ 3(221~227.2)	同余.....184	445
§ 4(228~237)	幂级数中的数论问题.....186	447

第五章 杂 题

§ 1(237.1~244.4)	二维和三维空间中的整点.....189	449
§ 2(245~266)	杂题.....191	453

第 IX 篇

几 何 问 题

问题序号	问题页码	解答页码
§ 1(1~25)	某些几何问题	196 466

附 录

§ 1	第 I 篇的补充题	204 483
专题索引		486
题目分类索引		497

问 题

第 IV 篇

单复变量函数

专 题 部 分

第一章 最大项和中心指数, 最大模和零点个数

§1. $\mu(r)$ 与 $M(r)$ 、 $\nu(r)$ 与 $N(r)$ 之间的类似

设 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ 是不全为零的复数. 设幂级数

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots$$

有收敛半径 $R, R > 0$. 若 $R = \infty$, 则 $f(z)$ 称为整函数. 设 $0 \leq r < R$, 则序列

$$|a_0|, |a_1|r, |a_2|r^2, \dots, |a_n|r^n, \dots$$

趋于 0, 从而含有最大的项, 称为最大项, 其值记作 $\mu(r)$. 于是, 对 $n=0, 1, 2, 3, \dots, r \geq 0$, 有

$$|a_n|r^n \leq \mu(r) \quad [\text{I, 第三章, § 3}].$$

中心指数 $\nu(r)$ 是使 $|a_n|r^n$ 达到最大值的 n 值, 从而 $\mu(r) = |a_{\nu(r)}|r^{\nu(r)}$. 如果有几个 $|a_n|r^n$ 等于 $\mu(r)$, 则 $\nu(r)$ 表示相应 n 中的最大者.

以上定义用于 $r > 0$ 的情形; 对 $r=0$, 参照 15.

以 $M(r)$ 表示函数 $f(z)$ 在圆 $|z|=r$ 上的最大模, 则 $M(r)$ 也是 $|f(z)|$ 在圆盘 $|z| \leq r$ 上的最大值 [III 266]. 对 $n=0, 1, 2, \dots, r > 0$, 我们有

$$|a_n|r^n \leq M(r).$$

当且仅当序列 $a_0, a_1, a_2, \dots$ 除 a_n 外的所有项都为零时, 等号成立 [III 122].

零点个数 $N(r)$ 是在闭圆盘 $|z| \leq r$ 上的零点个数, 按重数计数.

上述记号适用于整个一章.

1. 试对下列幂级数计算 $\mu(r)$ 和 $\nu(r)$:

$$1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

2. 试对下列幂级数计算 $M(r)$ 和 $N(r)$:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

3. 试对下列幂级数计算 $\mu(r)$ 和 $\nu(r)$:

$$\frac{1}{1!} + \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{5!} + \dots + \frac{z^n}{(2n+1)!} + \dots$$

4. 试对下列级数计算 $M(r)$ 和 $N(r)$:

$$\frac{\sin \sqrt{z}}{\sqrt{z}} = \frac{1}{1!} - \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{5!} - \dots + \frac{(-z)^n}{(2n+1)!} + \dots$$

5. 试对下列几何级数计算 $\nu(r)$:

$$1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots$$

6. 试对下列级数计算 $N(r)$:

$$1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots$$

7. 对 n 次多项式 $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$, $a_n \neq 0$, 我们有

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \mu(r)}{\log r} = \lim_{r \rightarrow \infty} \nu(r) = n.$$

8. 对 n 次多项式 $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$, $a_n \neq 0$, 我们有

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log M(r)}{\log r} = \lim_{r \rightarrow \infty} N(r) = n.$$

9. 对超越整函数, 7 中的两个极限等于 ∞ .

10. 对超越整函数, 8 中第一个极限等于 ∞ , 第二个可为有限或无穷.

11. 以 $\mu_k(r)$ 和 $\nu_k(r)$ 分别表示级数

$$a_0 + a_1 z^k + a_2 z^{2k} + \cdots + a_n z^{nk} + \cdots, \quad k=1, 2, 3, \dots$$

的最大项和中心指数. 试用 $\mu_1(r)$, $\nu_1(r)$ 表示 $\mu_k(r)$, $\nu_k(r)$.

12. 以 $M_k(r)$ 和 $N_k(r)$ 表示 $f(z^k)$ 在圆域 $|z| \leq r$ 上的最大模和零点个数, $k=1, 2, 3, \dots$. 试用 $M_1(r)$, $N_1(r)$ 表示 $M_k(r)$, $N_k(r)$.

13. 试对两个幂级数

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \cdots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \\ & 1 + \frac{2z^2}{2!} + \frac{2^3 z^4}{4!} + \frac{2^5 z^6}{6!} + \cdots + \frac{2^{2n-1} z^{2n}}{(2n)!} + \cdots \\ & = \left(\frac{e^z + e^{-z}}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{e^{2z} + e^{-2z}}{4} \end{aligned}$$

分别计算极限 $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\nu(r)}{\log \mu(r)}$.

14. 和 12 中的记号相对照, 我们用 $M_k(r)$ 和 $N_k(r)$ 分别表示 $(f(z))^k$ 在圆域 $|z| \leq r$ 上的最大模和零点个数. 试证商

$$\frac{N_k(r)}{\log M_k(r)} \text{ 与 } k \text{ 无关.}$$

15. 若 $a_0 = a_1 = \cdots = a_{q-1} = 0$, $a_q \neq 0$, 令 $\nu(0) = q$. 试证, $\nu(r)$ 为阶梯函数, 在其跳跃点上的跃度是递增的正整数, 且处处右连续 [I 120].

16. 若 $a_0 = a_1 = \cdots = a_{q-1} = 0$, $a_q \neq 0$, 则 $N(0) = q$. 试证, $N(r)$ 为阶梯函数, 在其跳跃点上的跃度是递增的正整数, 且处处右连续.

17. 若 $a_0 = 0$, $0 < r_1 < r_2 < R$, 则

$$\frac{\mu(r_2)}{\mu(r_1)} \geq \frac{r_2}{r_1}.$$

18. 若 $f(0) = 0$, $0 < r_1 < r_2 < R$, 则

$$\frac{M(r_2)}{M(r_1)} \geq \frac{r_2}{r_1}.$$

19. 在直角坐标系 ξ, η 中, 函数 $\eta = \log \mu(e^\xi)$ 表示一条非减的凸曲线. [考虑一组直线

$$\eta = \log |a_0|, \eta = \xi + \log |a_1|, \eta = 2\xi + \log |a_2|, \dots,$$

$$\eta = \eta\xi + \log |a_n|, \dots,$$

略去 $a_n=0$ 时无意义的项. 如何用这种图形来解释 $\mu(r)$ 和 $\nu(r)$?

20. 在直角坐标系 ξ, η 中, 函数 $\eta = \log M(e^\xi)$ 表示一条递增的、严格凸的曲线(对某些特殊的多项式, 曲线退化为一条直线).

21. 设 α 为定数, $0 < \alpha < 1$, 则 r 增加时, 商 $\mu(\alpha r)/\mu(r)$ 非增.

22. 设 α 为定数, $0 < \alpha < 1$, 则除了对某些多项式外, 当 r 增加时商 $M(\alpha r)/M(r)$ 为严格递减[20].

23. 设 $R = \infty$, 则对固定的 $\alpha, 0 < \alpha < 1$, 有

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\mu(\alpha r)}{\mu(r)} = 0, \text{ 当幂级数有无穷多项时,}$$

$$= \alpha^n, \text{ 当幂级数退化为 } n \text{ 次多项式时.}$$

24. 设 $f(z)$ 为整函数. 对固定的 $\alpha, 0 < \alpha < 1$, 有

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{M(\alpha r)}{M(r)} = 0, \text{ 当 } f(z) \text{ 为超越整函数时,}$$

$$= \alpha^n, \text{ 当 } f(z) \text{ 为 } n \text{ 次多项式时.}$$

我们将中心指数 $\nu(r)$ 的跳跃点, 按其大小排列, 记作

$$\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots, \rho_n, \dots;$$

$$\rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_q = 0, \rho_{q+1} > 0, q \geq 0,$$

其中, 若一跳跃点的跃度为 m , 则使它出现 m 次; 在点 $r=0$ 上, 我们把 $\nu(0)$ 看作跳跃[15]. 该序列可在有限项以后终止.

我们将 $f(z)$ 的零点按其绝对值增加的次序排列, 当绝对值相等时按其幅角增加的次序排列, 记作

$$w_1, w_2, w_3, \dots, w_n, \dots;$$

$$w_1 = w_2 = \dots = w_q = 0, w_{q+1} \neq 0, q \geq 0,$$

其中 m 重零点要出现 m 次.

设 $|w_n| = r_n, n=1, 2, 3, \dots$, 从而有

$$r_1 \leq r_2 \leq r_3 \leq \dots \leq r_n \leq \dots.$$

这个序列可在有限项以后终止.

上述记号应用于整个一章.

25. 若 $\rho_n < \rho_{n+1}$, 则在半闭区间 $[\rho_n, \rho_{n+1})$ 内

$$\nu(r) = n.$$

26. 若 $r_n < r_{n+1}$, 则在半闭区间 $[r_n, r_{n+1})$ 内

$$N(r) = n.$$

27. 试对下列幂级数计算数 ρ_n :

$$1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots,$$

$$1 + \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{5!} + \cdots + \frac{z^n}{(2n+1)!} + \cdots,$$

$$1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots.$$

28. 试对下列函数计算数 r_n :

$$e^z + i, \quad \frac{\sin \sqrt{z}}{\sqrt{z}}, \quad \cos z.$$

29. 如果存在无穷多个 ρ_n , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = R.$$

30. 如果存在无穷多个 r_n , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = R.$$

31. 设 $a_0 \neq 0$, 则当 $\rho_n \leq r \leq \rho_{n+1}$ 时,

$$\mu(r) = \frac{|a_0| r^n}{\rho_1 \rho_2 \cdots \rho_n}.$$

32. 设 $a_0 \neq 0$, 则

$$M(r) \geq \frac{|f(0)| r^n}{r_1 r_2 \cdots r_n}.$$

[III 120.] 对哪些整函数, 此不等式中的等号成立?

33. 设 $a_0 \neq 0$. 我们有

$$\log \mu(r) - \log |a_0| = \int_0^r \frac{\nu(t)}{t} dt.$$

34. 设 $a_0 \neq 0$. 我们有

$$\log M(r) - \log |f(0)| \geq \int_0^r \frac{N(t)}{t} dt.$$

35. 对任意整函数, 有

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \nu(r)}{\log r} = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log \mu(r)}{\log r}.$$

36. 对任意整函数, 有

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log N(r)}{\log r} \leq \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log M(r)}{\log r}.$$

37. 考虑一处处收敛的幂级数并设 $k > 0$. 无穷级数 $\sum_{n=q+1}^{\infty} \rho_n^{-k}$ 与无穷积分 $\int_1^{\infty} r^{-k-1} \log \mu(r) dr$ 同为收敛或同为发散.

38. 考虑一整函数并设 $k > 0$. 如果无穷积分 $\int_1^{\infty} r^{-k-1} \log M(r) dr$ 收敛, 则无穷级数 $\sum_{n=q+1}^{\infty} r_n^{-k}$ 也收敛 (反之不成立!).

39. 考虑一个在单位圆内部收敛的幂级数, 并设 $k > 0$. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \rho_n)^{k+1}$ 与积分 $\int_0^1 (1-t)^{k-1} \log \mu(t) dt$ 同为收敛或同为发散.

40. 考虑一个在单位圆内部正则的函数, 并设 $k > 0$. 如果积分 $\int_0^1 (1-t)^{k-1} \log M(t) dt$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - r_n)^{k+1}$ 也收敛.

§ 2. 关于 $\mu(r)$ 和 $\nu(r)$ 的进一步结果

41. 在一直角坐标系中标出以下各点:

$$(0, -\log |a_0|), (1, -\log |a_1|),$$

$$(2, -\log |a_2|), \dots, (n, -\log |a_n|), \dots$$

(删去 $a_n = 0$ 时无意义的点), 从每一点垂直向上画一条射线. 包含所有这些射线的最小凸域 $\Re$ 伸展到无穷. 画出具有方向系数 $\log r$ 的支撑线 (即至少包含 $\Re$ 的一个边界点而不含 $\Re$ 的内点, 且与正实轴夹角的正切为 $\log r$ 的直线). 试在得到的图象中解释 $\log \mu(r)$, $\nu(r)$, $\log \rho_n$ 的意义.

42. 若 m 为 $\nu(r)$ 所取到的正整数值, $m > \nu(0)$, 则

$$\rho_m = \max \left(\left| \frac{a_0}{a_m} \right|^{\frac{1}{m}}, \left| \frac{a_1}{a_m} \right|^{\frac{1}{m-1}}, \dots, \left| \frac{a_{m-1}}{a_m} \right| \right).$$

43. 设幂级数

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots$$

的每一项依次成为最大项, 即对每一个指标 $n=0, 1, 2, \dots$, 至少有一个实数 $r, r>0$, 使 $|a_n| r^n$ 不小于其它项. 对此, 充要条件是

$$0 < \left| \frac{a_0}{a_1} \right| \leq \left| \frac{a_1}{a_2} \right| \leq \left| \frac{a_2}{a_3} \right| \leq \dots \leq \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \leq \dots.$$

[31, I 117].

44. 设 $0 < \alpha < 1$. 对于在 $|z| < 1$ 内收敛的幂级数

$$1 + e^{\alpha-1} z + e^{\alpha-2} z^2 + \dots + e^{\alpha-n} z^n + \dots,$$

其中心指数依次取所有的值 $0, 1, 2, 3, \dots$, 其最大项满足

$$\mu(r) \sim \exp \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \left(-\frac{1}{\log r} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \right) \quad (\text{当 } r \rightarrow 1).$$

45(续). 当 r 趋于 1 时,

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{\alpha-1} r^n \sim \frac{\sqrt{2\pi\alpha}}{1-\alpha} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} (\log \mu(r))^{\frac{1}{2} + \frac{1-\alpha}{\alpha}} \mu(r).$$

[考虑 $\int_0^{\infty} e^{\alpha-1} x^{\alpha} r^x dx$; II 208.]

46. 设 $\alpha > 0$. 对于对一切有限的 z 都收敛的幂级数

$$1 + 1^{-\alpha} z + 2^{-2\alpha} z^2 + \dots + n^{-n\alpha} z^n + \dots,$$

试计算 $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots$, 并证明其最大项满足

$$\mu(r) \sim \exp(\alpha e^{-1} r^{\frac{1}{\alpha}}) \quad (\text{当 } r \rightarrow +\infty).$$

47(续). 对固定的 $\alpha, \alpha > 0$, 当 r 趋于 $+\infty$ 时有

$$1 + 1^{-\alpha} r + 2^{-2\alpha} r^2 + \dots + n^{-n\alpha} r^n + \dots$$

$$\sim \frac{\sqrt{2\pi}}{\alpha} [\log \mu(r)]^{\frac{1}{2}} \mu(r). \quad [\text{II 209.}]$$

§ 3. $\mu(r), \nu(r), M(r)$ 和 $N(r)$ 之间的联系

48. 对整函数 $f(z)$, 设